עליך לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות.

כל תשובה נכונה ומלאה תזכה אותך ב- 25 נקודות.

שאלה 1

א. תהי סדרה (a_n) מוגדרת באינדוקציה על-ידי $a_1 > 0 \quad , \quad a_{n+1} = \arctan a_n$.

הוכח כי (a_n) מתכנסת וחשב את גבולה.

ב. נגדיר $u_n = \dfrac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1}}$ כאשר (a_n) סדרה חיובית, עולה ממש ושואפת לאינסוף.

הוכח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ מתבדר.

שאלה 2

א. נגדיר $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n \sin(nx)}{n!}$. האם $f(x)$ רציפה בתחום הגדרתה? נמק היטב!

(שים לב שהטור הנתון אינו טור חזקות!)

ב. תהי פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[0,\infty)$ והאינטגרל $\int_0^{\infty} f(x)dx$ מתכנס.

הוכח כי האינטגרל $\int_2^{\infty} \dfrac{f(x)}{\ln x} dx$ מתכנס.

שאלה 3

א. קבע לגבי האינטגרל הבא האם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר. נמק את קביעתך.

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} - 1}{\sqrt{x^3}} dx \ .$$

ב. נניח כי פונקציה $f(x)$ היא בעלת נגזרת שנייה חסומה בקטע $[0,\infty)$, ולכל n טבעי בקטע $[n, n+1]$ יש אפס של $f(x)$.

הוכח כי $f(x)$ חסומה ב- $[0,\infty)$.

שאלה 4

א. השתמש בפיתוח מקלורן לחישוב של $\int_0^{1/2} \frac{\ln(1+x)}{x}dx$ בדיוק של 0.01. נמק כל שלב.

<u>הדרכה</u>: להערכת השגיאה ניתן להשתמש בתכונה של טורי לייבניץ.

ב. הוכח: אם הסדרות החלקיות (a_{2n}) , (a_{2n-1}) ו- (a_{7n}) של הסדרה (a_n) מתכנסות אז גם (a_n) מתכנסת.

שאלה 5

א. בדוק האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n!e^{-n^2}$ מתכנס. נמק היטב!

ב. תהי $\left(f_n(x)\right)$ סדרת פונקציות רציפות במידה שווה ב- $\mathbf{R}$ המתכנסת במידה שווה ב- $\mathbf{R}$ לפונקציה $f(x)$. הוכח כי $f(x)$ רציפה במידה שווה ב- $\mathbf{R}$.

בהצלחה!..