עליך לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות.

כל תשובה נכונה ומלאה תזכה אותך ב- 25 נקודות.

### שאלה 1

א. הוכח או הפרך את הטענה הבאה:

אם פונקציה $f(x)$ רציפה ב- $[1,\infty)$ והאינטגרל $\int_1^\infty f(x)dx$ מתכנס

אז גם האינטגרל $\int_1^\infty \frac{f(x)}{x}dx$ מתכנס.

ב. חשב את הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n^4+n^2+1}+\frac{2}{2n^4+n^2+2}+\frac{3}{2n^4+n^2+3}+\cdots+\frac{n^2}{2n^4+2n^2}\right).$$

### שאלה 2

א. העזר בפיתוח טיילור מתאים על מנת לחשב את $\sqrt[4]{83}$ כך שהשגיאה לא תעלה על $0.5\cdot 10^{-3}$ (כלומר בדיוק של 3 ספרות אחרי הנקודה).

ב. תהי $g(x)$ פונקציה רציפה במידה שווה ב- $\mathbf{R}$,

ויהיו $f_n(x)$ מוגדרות ב- $\mathbf{R}$ על-ידי $f_n(x)=g(x+\frac{1}{n})$, לכל $n$ ולכל $x$.

הוכח כי הסדרה $\left(f_n(x)\right)$ מתכנסת במידה שווה ב- $\mathbf{R}$.

### שאלה 3

א. יהיו $(a_n)$, $(b_n)$ סדרות חסומות של מספרים אי-שליליים.

הוכח כי $\underline{\lim}\left(a_nb_n\right)\geq \underline{\lim}\,a_n\cdot\underline{\lim}\,b_n$

ותן דוגמה של $(a_n)$, $(b_n)$ עבורן מתקיים אי-שוויון ממש.

ב. האם מתקיים השוויון הבא? נמק את תשובתך.

$$\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x}\right)dx=\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{(-1)^n}{n+\sin x}dx.$$

**שאלה 4**

א. מצא את כל הערכים של $\alpha$ ו- $\beta$ עבורם מתכנס האינטגרל

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta} \, .$$

ב. תהי $(u_n)$ סדרה מתכנסת, $\lim_{n\to\infty} u_n = u < 0$, ויהי $a$ מספר חיובי.

הוכח כי הטור $\sum_{n=1}^\infty a^{u_1+u_2+\cdots+u_n}$ מתכנס אם ורק אם $a > 1$ .

**שאלה 5**

א. תהי $f(x)$ גזירה בנקודה $x = 0$ ומקיימת $f(0) = 1$ , $f'(0) = 2$ .

העזר בפיתוח מקלורן על מנת לחשב את $\lim_{x\to 0} \left( f(x) \right)^{1/x}$ .

(שים לב: לא נתון ש- $f(x)$ גזירה בסביבה של $x = 0$ )

ב. קבע לגבי הטור הבא אם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר. נמק את קביעתך.

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin n}{n} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right)$$

***בהצלחה!..***