AYUDANTÍA DE MAT 101: Guía No. 4
Tema: Funciones cuadráticas.

1. Dibuje las gráficas de: a) $y = x^2$ b) $y = x^2 + 3$ c) $y = x^2 - 2$ d) $y = - x^2$ e) $y = 2x^2 + 1$
¿Qué observa? ¿Puede extraer una conclusión generalizada de la función de la forma $y = x^2 + k$?

2. Considere las siguientes gráficas:
a) $y = x^2$ b) $y = (x - 2)^2$ c) $y = (x + 3)^2$ d) $y = (x - 1)^2$
¿Qué observa? ¿Puede extraer una conclusión generalizada de la función de la forma $y = (x - h)^2$?

3. ¿Dónde esperaría encontrar el vértice de la gráfica $y = (x – 3)^2 + 2$? Justifique.

4. Dada la función: $y = - (x – h)^2 + k$, determine: coordenadas del vértice, concavidad, dominio y recorrido, ceros de la función, punto de intersección con el eje y.

5. Determine los puntos de intersección con los ejes en las siguientes funciones:
a) $y = x^2 + 5x + 6$ b) $y = x^2 - 5x$ c) $y = (x + 3)^2 – 1$ d) $y = -2x^2 - 16x – 14$ e) $y = - x^2 - 8x – 7$

6. Un atleta lanza una jabalina con trayectoria parabólica: $y = – 0.003x^2 + 0.18x + 2$, donde ***x*** es el alcance horizontal e ***y*** el alcance vertical (ambos se miden en metros). Calcula:
a) ¿Desde qué altura se lanzó la jabalina?
b) ¿Qué tan lejos llegó la jabalina?
c) ¿Cuál fue la altura máxima alcanzada?

7. Ídem para un disparo de cañón de trayectoria dada por: $y = –0.0003x^2 + 0.6x + 1$.

8. La altura de un objeto que es lanzado hacia arriba viene dada por la función: $h(t) = v_0\,t - \frac{1}{2}gt^2$ donde v_0 es la velocidad inicial con que es lanzado, t el tiempo transcurrido y g la aceleración de la gravedad (Suponga: $g = 9.8\ m/seg^2$), Si lanzamos una pelota de golf a una velocidad de 24.5 m/seg.:
a) ¿Qué altura tiene a los 2 segundos?
b) ¿Cuándo vuelve a pasar por la misma altura?
c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?
d) ¿Cuántos segundos tarda en regresar al suelo?

9. Ídem para el caso de una piedra lanzada por una catapulta a una velocidad de 49 m/seg.

10. Un fuego artificial parte desde el suelo. ¿Con qué velocidad inicial debe partir. para que alcance una altura máxima de 300 metros? Usar fórmula del ejercicio 8.

11. El número de hormigas con alas H(x), en millones, en una región, depende de la lluvia caída x, en milímetros. Si la función que relaciona una y otra variable es: $H(x) = 70x – 5x^2$, determina:
a) ¿Cuánto debe llover para que haya 75 millones de hormigas?
b) ¿Cuántas hormigas hay si caen 200 mm de agua?
c) La cantidad de lluvia que hace máxima la población de hormigas.

12. Un túnel tiene forma parabólica, dada por la función: $h(x) = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x$
(h: altura en metros; x: distancia en metros desde que empieza el túnel):
a) ¿Qué altura tiene el túnel a 2 m del arranque del arco?
b) ¿Cuál es la altura máxima del túnel?
c) ¿Hay que tomar alguna precaución para que circule un autobús de 3 m de alto por 2.5 m de ancho?

13. En una ciudad se realiza un estudio de mercado sobre el comportamiento de la oferta y la demanda de un determinado artículo, los resultados obtenidos quedaron caracterizados por las siguientes funciones:
    $p = -3/5\ q + 72$; $p = 1/30\ q^2 + 24$
    en las que "q" representa las unidades del artículo y "p" el precio por unidad.
    a) Representa gráficamente las funciones dadas, en el mismo sistema coordenado, identificando cuál es la función de oferta y cuál es la de demanda.
    b) Halla analíticamente el punto de equilibrio.
    c) Si se fija un precio de $24, analiza el comportamiento de la oferta y de la demanda.
    d) Halla el precio según la oferta y según la demanda para 24 unidades.
    e) Halla la expresión analítica de la función ingreso considerando la demanda.
    f) Halla el máximo ingreso.

14. Se estudia de la oferta y la demanda de un determinado artículo. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:
    La oferta quedó caracterizada por la función: $p = 1/30\ q^2 + 24$, en la que "q" representa las unidades del artículo y "p" el precio por unidad.
    La demanda tiene un comportamiento lineal, siendo la máxima demanda de 120 unidades, y por cada aumento en 10 unidades el precio disminuye en $6.
    a) Hallar la función que modela la demanda.
    b) Representar gráficamente la función de oferta y demanda, en el mismo sistema coordenado.
    c) Hallar analíticamente el punto de equilibrio.
    d) Si se fija un precio de $60, determinar si hay un exceso de oferta o de demanda y calcúlalo.
    e) Halla la expresión analítica de la función ingreso considerando la demanda.
    f) Halla el máximo ingreso.

15. Se estudia la oferta y la demanda de un determinado artículo.
    La demanda quedó caracterizada por la función: $p = -1/200\ q^2 + 72$, en las que "q" representa las unidades del artículo y "p" el precio por unidad.
    La oferta tiene un comportamiento lineal, siendo el precio mínimo de $24, y cada vez que aumenta $1, la cantidad ofrecida aumenta una unidad.
    a) Halla la función que modela la oferta.
    b) ¿Cuáles son los valores correspondientes al punto de equilibrio?
    c) Representa gráficamente la función de oferta y demanda, en el mismo sistema coordenado.
    d) Halla la expresión analítica de la función ingreso considerando la demanda.

16. La oferta y la demanda de un determinado artículo son:
    La oferta quedó caracterizada por la función: $p = q + 24$, en la que "q" representa las unidades del artículo y "p" el precio por unidad.
    El equilibrio de la oferta y la demanda ocurre para el precio $64.
    La demanda es una función cuadrática con eje de simetría $x = 0$, siendo el precio máximo de $72.
    a) Halla la función que modela la demanda.
    b) Si se fija un precio de $55, determina si hay un exceso de oferta o de demanda y calcúlalo.
    c) Representa gráficamente la función de oferta y demanda, en el mismo sistema coordenado.
    d) Halla la expresión analítica de la función ingreso considerando la demanda.
    e) Calcula el ingreso cuando se venden 70 artículos.

17. Las funciones de oferta y demanda de un determinado producto son:
    $$O:\ q = -200 + \frac{1}{4}p^2 \qquad y \qquad D:\ q = 520 - \frac{1}{5}p^2$$
    a) Si el fabricante piensa que puede vender cada unidad a $50, ¿qué cantidad produciría?
    b) A ese precio de $50, ¿qué cantidad de producto demanda el mercado?
    c) ¿Cuál es la cantidad y el precio de equilibrio?

18. Las funciones de oferta y demanda de un determinado producto son:
    O: $q = -150 + 10p$ y D: $q = 450 - p^2$; donde p viene dado en miles de dólares.
    a) Determina las cantidades de oferta y demanda a un precio de 15 000 dólares.
    b) ¿Cuál es la cantidad y el precio de equilibrio?

19. Las funciones de oferta y demanda de un producto son: O: $q = -5 + 2p$ y D: $q = 210 - 0.4p^2$ donde p viene dado en miles de pesos y q en miles de unidades.
    a) Hallar las cantidades de oferta y demanda a un precio de ocho mil pesos.
    b) Hallar el precio y la cantidad de equilibrio para ese producto.

20. Ídem para O: $q = -5 + 2p^2$ y D: $q = 11 - 2p^2$

21. El ingreso y el costo, en millones, de una empresa vienen dados por las funciones:
    $I(x) = 50x - 4x^2$ y $C(x) = 100 + 5x$, donde x son miles de unidades producidas y vendidas.
    a) Hallar el punto de equilibrio, donde la empresa no gana ni pierde.
    b) Hallar la función que da la ganancia de la empresa y la región donde esa ganancia es positiva.

22. Las funciones de ingreso y costo para un determinado producto, son
    $I(x) = 100x - 10x^2$ y $C(x) = 100 + 5x$, donde x viene dada en miles de unidades e I(x) y C(x) en millones de pesos.
    a) ¿Cuál es el ingreso, el costo y la ganancia de la empresa si produce y vende 1.000, 3.000, 10.000 unidades?
    b) ¿Cuál es la función ganancia?
    c) ¿Cuántas unidades hay que producir y vender para que la ganancia sea positiva?

23. Una empresa decide invertir en publicidad para su producto para aumentar sus ganancias. Se sabe que la ganancia (en miles de dólares) viene dada por la función: $P(x) = 5000 + 1000x - 5x^2$, en donde x es el dinero invertido en publicidad (en miles de dólares).
    Determine cuánto dinero se debe invertir para que la ganancia sea máxima y encuentre dicha ganancia.

24. La ganancia diaria P de una refinería de petróleo viene dada por la función: $P = 8x - 0.02x^2$, en donde x es el número de barriles de petróleo refinado. ¿Cuántos barriles debe producirse diariamente para que la ganancia de la refinería sea lo mayor posible y cuál es dicha ganancia?

25. Un fondo de inversión genera una rentabilidad que depende de la cantidad de dinero invertida, según la fórmula: $R(x) = -0.002x^2 + 0.8x - 5$, donde R(x) representa la rentabilidad generada cuando se invierte la cantidad x. Determinar, teniendo en cuenta que disponemos de 500 euros:
    a) Cuando aumenta y cuando disminuye la rentabilidad
    b) Cuánto dinero debemos invertir para obtener la máxima rentabilidad posible.
    c) Cual será el valor de dicha rentabilidad máxima.

26. La suma de dos números no negativos es 36. Halla dichos números para que la suma de sus cuadrados sea lo mas pequeña posible.

27. La suma de un número y el doble de otro es 7,5. Calcula dichos números para que:
    a) La suma de sus cuadrados sea mínima
    b) La diferencia de sus cuadrados sea máxima.

28. Hallar el rectángulo de mayor área que es posible construir si su perímetro debe medir 36 m.

29. En una plantación de árboles frutales hay 50 manzanos. Cada manzano produce 800 manzanas. Por cada nuevo manzano que se plante, la cantidad de manzanas producidas por árboles cae en 10 manzanas. ¿Cuántos manzanos debieran agregarse a los 50 ya existentes para maximizar la producción de manzanas?

30. Una empresa quiere construir un área de estacionamientos. Se determinó que dicha área sea rectangular y que uno de los lados del rectángulo sea una de las paredes del edificio. Para los otros tres lados del rectángulo se dispone de material suficiente para construir una reja de 800 metros. ¿Cuáles son las dimensiones más grandes que puede tener el rectángulo?