Bedingte Wahrscheinlichkeiten

von xxx xxx, K13/2

(überarbeitete Version vom 02. März 2003)

Die *bedingten Wahrscheinlichkeit* ist definiert als die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A unter der Bedingung, daß ein anderes Ereignis B mit $P(B) \neq 0$ bereits eingetreten ist. Sie wird mit $P_B(A)$ bezeichnet und heißt *W. von A unter der Bedingung B*. Da sich die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A i. allg. ändert, wenn bereits bekannt ist, daß ein anderes Ergebnis B eingetreten ist, so ist $P_B(A)$ i. allg. verschieden von $P(A)$. Wird z. B. mit zwei Würfeln gleichzeitig gewürfelt, ist B das Ereignis „Augensumme gerade" und A das Ereignis „Augensumme mindestens 10", so gibt es, nachdem B eingetreten ist, noch 18 mögliche Ausgänge, z. B. ist (1,1) möglich, (1,2) aber nicht. Günstig für A sind dann (4,6), (6,4), (5,5), (6,6). Also ist $P_B(A) = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$.

Sind zwei Urnen vorhanden, von denen die erste 5 schwarze und 5 weiße Kugeln, die zweite 1 weiße und 9 schwarze Kugeln enthält, so soll der Versuch darin bestehen, blindlings eine Urne zu wählen und dann daraus blindlings eine Kugel zu ziehen. Ist dann B das Ergebnis „die gezogene Kugel ist weiß" und sind A_i die Ereignisse „die Kugel wurde aus der i-ten Urne (Ereignisraum Ω: i = 1,2) entnommen", so ist $P_B(A_1) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ und $P_B(A_2) = \frac{1}{10}$. Dabei lassen sich folgende Formeln herleiten:

(1) $$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$ (2) $$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Die *Bayes*-Formel

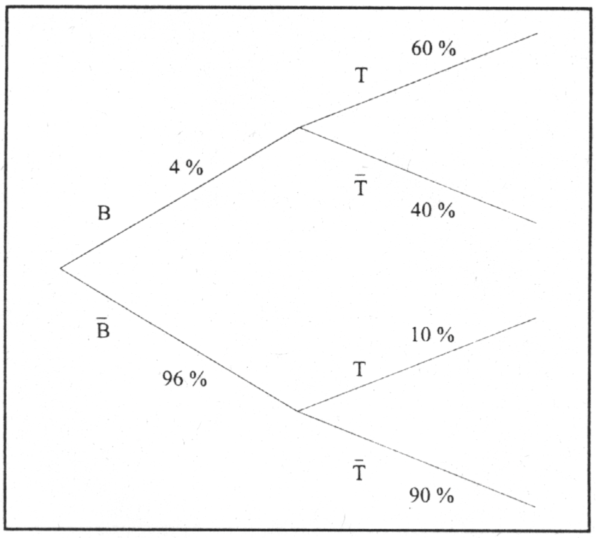
Beispiel: Leistungskurs Mathematik 1996, Wahrscheinlichkeitsrechnung/Statistik III

Die Fernsehsendung „Sport TV" berichtet über das Sportgeschehen.
1. Bei „Sport TV" treten Bildstörungen mit 4% Wahrscheinlichkeit auf. Ist das Bild gestört, so kommt es mit 60% Wahrscheinlichkeit auch noch zu Tonstörungen. Ist das Bild einwandfrei, so ist auch der Ton mit 90% Wahrscheinlichkeit in Ordnung. Verwenden Sie folgende Bezeichnungen:
B: „Bei ´Sport TV´ treten Bildstörungen auf",
T: „Bei ´Sport TV´ treten Tonstörungen auf".
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für ein einwandfreies Bild, falls der Ton gestört ist?

Es handelt sich um ein Umkehrproblem: Aus bekanntem $P_{\overline{T}}(B)$ soll das unbekannte $P_T(\overline{B})$ berechnet werden.
Wegen $P_T(\overline{B}) = \frac{P(\overline{B} \cap T)}{P(T)}$ wäre das Problem gelöst, wenn die Wahrscheinlichkeiten $P(T)$ und $P(\overline{B} \cap T)$ bekannt wären.

Bevor ich diese Abituraufgabe rein rechnerisch angehe, möchte ich zeigen, daß sie sich bei Verwendung eines Baumdiagramms oder einer Vierfeldertafel besonders leicht lösen läßt.[1]

1. Lösung mit Hilfe eines Baumdiagrammes:



$P(B \cap T) = 0.04*0.6 = 0.024$

$P(B \cap \overline{T}) = 0,04*0,4 = 0,016$

$P(\overline{B} \cap T) = 0,96*0,1 = 0,096$

$P(\overline{B} \cap \overline{T}) = 0,96*0,9 = 0,864$

Dem Baum entnimmt man:
$P(T) = P(B \cap T) + P(\overline{B} \cap T) = 0,04*0,6+0,96*0,1 = 0,12$ (2. Pfadregel)
$P(\overline{B} \cap T) = 0,96*0,1 = 0,096$ (1. Pfadregel)

$$\Rightarrow P_T(\overline{B}) = \frac{P(\overline{B} \cap T)}{P(T)} = \frac{0,096}{0,12} = 0,8 = 80\%$$

Die Wahrscheinlichkeit für ein einwandfreies Bild, falls der Ton gestört ist, beträgt 80%.

2. Lösung mit Hilfe einer Vierfeldertafel:

Man erhält eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel in 3 Schritten:
1. Schritt: Eintragen des gegebenen P(B) und damit auch von $P(\overline{B}) = 1\text{-}P(B)$.
2. Schritt: Ausfüllen der Felder für $P(B \cap T)$ und $P(\overline{B} \cap \overline{T})$ mit Hilfe der gegebenen bedingten Wahrscheinlichkeiten und des Produktsatzes
3. Schritt: Berechnung der restlichen Werte durch Addition und Subtraktion

1)

	T	$\overline{T}$	
B			0,04
$\overline{B}$			0,96

2)

	T	$\overline{T}$	
B	0,04*0,60		0,04
$\overline{B}$		0,96*0,90	0,96
			1

3)

	T	$\overline{T}$	
B	0,024	0,016	0,04
$\overline{B}$	0,096	0,864	0,96
	0,12	0,88	1

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P_T(\overline{B})$ liest man nun ab zu $P_T(\overline{B}) = \frac{P(\overline{B} \cap T)}{P(T)} = \frac{0,096}{0,12} = 0,8$ = 80%.

[1] nach Ehrenwirth: Stochastik Leistungskurs, S. 135.

Aus der Vierfeldertafel kann man aber auch kompliziertere bedingte Wahrscheinlichkeiten ablesen, die mit Hilfe des Baumdiagramms nur sehr mühsam zu berechnen sind, z. B.:

$$P_{T\cup\overline{B}}(B) = \frac{P([T\cup\overline{B}]\cap B)}{P(T\cup\overline{B})} = \frac{P(T\cap B)}{P(T)+P(\overline{B})-P(T\cap\overline{B})} = \frac{0{,}024}{0{,}984} \approx 2{,}4\% .$$

3. Lösung durch Rechnung:

Ohne graphische Hilfsmittel erhält man aus der Definitionsgleichung von $P_T(\overline{B})$ unter Verwendung des Produktsatzes und, da B und $\overline{B}$ eine Zerlegung von Ω bilden, des Satzes von den totalen Wahrscheinlichkeit:

Produktsatz:
Ist $P(A) \neq 0$, so gilt: $P(A\cap B) = P(A) * P_A(B)$.

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit:
Bilden die Ereignisse $A_1, A_2, ..., A_n$ mit $P(A_i) \neq 0$ für alle i eine Zerlegung des Ereignisraumes Ω, so gilt für die Wahrscheinlichkeit eines beliebigen Ereignisses B:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) * P_{A_i}(B)$$

$$P_T(\overline{B}) = \frac{P(\overline{B}\cap T)}{P(T)} = \frac{P(\overline{B}) * P_{\overline{B}}(T)}{P(\overline{B}) * P_{\overline{B}}(T) + P(B) * P_B(T)} = \frac{0{,}96 * 0{,}1}{0{,}96 * 0{,}1 + 0{,}04 * 0{,}6} = 0{,}8 = 80\%$$

Das vorgeführte war zwar typisch, aber einfach, da die Zerlegung von Ω durch zwei Ereignisse bewirkt wurde. Im allgemeinen Fall liegt eine Zerlegung von Ω durch n Ereignisse $A_1, A_2, ..., A_n$ vor. Man kann dann einen Baum mit 2n Ästen und statt der 4-Feldertafel eine 2n-Feldertafel zeichnen.

Zur Berechnung einer Wahrscheinlichkeit $P_B(A_i) = \frac{P(B\cap A_i)}{P(B)}$ wendet man auf den Zähler den Produktsatz und auf den Nenner den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit an und erhält die

***Bayes*-Formel:**
Bilden die Ereignisse $A_1, A_2, ..., A_n$ mit $P(A_i) \neq 0$ für alle i eine Zerlegung von Ω und ist B ein Ereignis mit $P(B) \neq 0$, so gilt für jedes i $P_B(A_i) = \dfrac{P(A_i) * P_{A_i}(B)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) * P_{A_j}(B)}$. (siehe FS: Seite 107, C 1-2)

Sonderfall für n = 2:

Mit $A_1 = A$ und $A_2 = \overline{A}$ gilt $P_B(A) = \dfrac{P(A) * P_A(B)}{P(A) * P_A(B) + P(\overline{A}) * P_{\overline{A}}(B)}$.

bedingte Wahrscheinlichkeiten - relevant für das Abitur?

Mit Ausnahme von 1989 kamen bedingte Wahrscheinlichkeiten (Zeitraum: von 1987 bis 1996) in jeder Abiturprüfung vor:

1) **1987**
   - III 1b)
2) **1988**
   - IV 1c)
3) **1990**
   - III 4b)
   - IV 2a)
4) **1991**
   - III 2b)
   - IV 1b)
5) **1992**
   - III 1c)
   - IV 3b)
6) **1993**
   - III 5b)
   - IV 4a)
7) **1994**
   - III 2b)
   - III 4a)
   - IV 2)
8) **1995**
   - III 4a)
9) **1996**
   - III 1b)
   - IV 2b)