

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ШАРИПОВ Р. А.

КУРС ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие

УФА 1996

УДК 514.7

Шарипов Р. А. **Курс дифференциальной геометрии:** учебное пособие для вузов / Издание Башкирского университета. — Уфа, 1996. — 211 с. ISBN 5-7477-0129-0

Электронная версия книги свободно распространяются в сети Интернет, она бесплатна для персонального использования и учебных целей. Любое коммерческое использование без письменного согласия автора запрещено.

Книга представляет собой учебное пособие по основному курсу дифференциальной геометрии и предназначена для первоначального знакомства с этой дисциплиной.

Подготовка книги к изданию выполнена методом компьютерной верстки на базе пакета $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\mathcal{T}\mathcal{E}\mathcal{X}$ от Американского Математического Общества. При этом были использованы кириллические шрифты семейства Lh, распространяемые Ассоциацией *СугTUG* пользователей кириллического $\mathcal{T}\mathcal{E}\mathcal{X}$ 'а.

Рецензенты: Кафедра математики УГАТУ;
д. ф.-м. н., проф. Соколов В. В.
(Институт математики УрО РАН).

Контактная информация для связи с автором.

Место работы: Математический факультет БашГУ.

Домашний адрес: ул. Рабочая 5, Уфа 450003, Россия.

Тел.: 7-(917)-75-55-786.

E-mail: R.Sharipov@ic.bashedu.ru,
r-sharipov@mail.ru,
ra_sharipov@lycos.com.

URL: <http://www.geocities.com/r-sharipov>.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

ОГЛАВЛЕНИЕ.	3.
ПРЕДИСЛОВИЕ.	5.
ГЛАВА I. КРИВЫЕ В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ТОЧЕЧНОМ ПРОСТРАНСТВЕ.	7.
§ 1. Кривые. Способы задания кривых. Регулярные и особые точки кривой.	7.
§ 2. Интеграл длины и выбор натурального параметра на кривой.	14.
§ 3. Репер Френе. Динамика репера Френе. Кривизна и кручение пространственной кривой.	17.
§ 4. Центр кривизны и радиус кривизны. Эволюта и эвольвента кривой.	20.
§ 5. Кривые как траектории материальных точек в механике.	23.
ГЛАВА II. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО И ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА.	26.
§ 1. Векторные и тензорные поля в пространстве.	26.
§ 2. Тензорное произведение и свертка.	30.
§ 3. Алгебра тензорных полей.	36.
§ 4. Симметрирование и альтернирование.	40.
§ 5. Дифференцирование тензорных полей.	44.

§ 6. Метрический тензор и псевдотензор объема.	49.
§ 7. Свойства псевдотензоров.	54.
§ 8. Замечание об ориентации.	55.
§ 9. Поднятие и опускание индексов.	58.
§ 10. Градиент, дивергенция и ротор. Некоторые тождества векторного анализа.	60.
§ 11. Потенциальные и вихревые векторные поля.	66.
ГЛАВА III. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ.	71.
§ 1. Некоторые примеры криволинейных систем координат.	71.
§ 2. Подвижный репер криволинейной системы координат.	76.
§ 3. Замена криволинейных координат.	82.
§ 4. Векторные и тензорные поля в криволинейных координатах.	87.
§ 5. Дифференцирование тензорных полей в криво- линейных координатах.	90.
§ 6. Преобразование компонент связности при замене системы координат.	98.
§ 7. Согласованность метрики и связности. Еще одна формула для символов Кристоффеля.	100.
§ 8. Параллельный перенос. Уравнение прямой в криволинейных координатах.	103.
§ 9. Некоторые вычисления в полярных, цилиндри- ческих и сферических координатах.	111.
ГЛАВА IV. ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ.	118.
§ 1. Параметрическое задание поверхностей. Криво- линейные координаты на поверхности.	118.
§ 2. Замена криволинейных координат на поверх- ности.	124.
§ 3. Метрический тензор и тензор площади.	128.

§ 4. Подвижный репер поверхности. Деривационные формулы Вайнгартена.	131.
§ 5. Символы Кристоффеля и вторая квадратичная форма.	135.
§ 6. Ковариантное дифференцирование внутренних тензорных полей на поверхности.	140.
§ 7. Согласованность метрики и связности на поверхностях.	150.
§ 8. Тензор кривизны.	155.
§ 9. Уравнения Гаусса и Петерсона-Кодацци.	164.
 ГЛАВА V. КРИВЫЕ НА ПОВЕРХНОСТЯХ.	 169.
§ 1. Параметрическое уравнение кривой на поверхности.	169.
§ 2. Геодезическая и нормальная кривизна кривой.	171.
§ 3. Экстремальное свойство геодезических линий.	176.
§ 4. Внутренний параллельный перенос на поверхностях.	182.
§ 5. Интегрирование на поверхностях. Формула Грина.	191.
§ 6. Теорема Гаусса-Бонне.	198.
 СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.	 210.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга была задумана как третья книга в серии учебных пособий, призванных охватить три основные геометрические дисциплины базового университетского курса. Это

- «Курс аналитической геометрии»;
- «Курс линейной алгебры и многомерной геометрии»;
- «Курс дифференциальной геометрии».

Книга предназначена для первоначального изучения дифференциальной геометрии. Поэтому изложение начинается с теории кривых в трехмерном евклидовом пространстве \mathbb{E} . Затем излагается векторный анализ в \mathbb{E} в декартовых и в криволинейных координатах, после чего рассматривается теория поверхностей в пространстве \mathbb{E} .

Новомодный подход, стартующий с понятия дифференцируемого многообразия, на наш взгляд, непригоден для первоначального знакомства с предметом. Слишком много усилий затрачивается на освоение этого понятия, а содержательная часть отодвигается на более поздний срок. Гораздо важнее быстрее познакомить читателя с другими элементами современной геометрии: векторным и тензорным анализом, с ковариантным дифференцированием и теорией римановой кривизны. Ограничение размерности $n = 2$ и $n = 3$ не является значительным препятствием на этом пути, а последующий переход от поверхностей к многообразиям большей размерности становится более естественным и простым.

Автор благодарен Карбушеву Д. Н., Бахитову Р. Р., Убийко С. Ю., Борисову Д. И. (<http://borisovdi.narod.ru>) и Полякову Ю. Н. за прочтение и редактирование рукописи книги.

Ноябрь, 1996 г.

Р. А. Шарипов.

ГЛАВА I

КРИВЫЕ В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ТОЧЕЧНОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

§ 1. Кривые. Способы задания кривой. Регулярные и особые точки.

Пусть \mathbb{E} — трехмерное евклидово точечное пространство. Точное математическое определение этого понятия можно найти в [1]. Однако, знание этого точного определения не является настоятельно необходимым. Дело в том, что \mathbb{E} — это обычное трехмерное пространство (то, в котором мы живем). Свойства \mathbb{E} подробно изучаются в элементарной геометрии и в аналитической геометрии на базе наглядных интуитивно понятных геометрических образов. Понятие *кривой* или понятие *линии* также связано с наглядным геометрическим образом. Кривая в пространстве \mathbb{E} — это одномерно протяженный геометрический объект, составленный из точек пространства \mathbb{E} . Факт одномерности кривых наиболее отчетливо проявляется при *векторно-параметрическом* способе задания кривой:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \left\| \begin{array}{c} x^1(t) \\ x^2(t) \\ x^3(t) \end{array} \right\|. \quad (1.1)$$

Выбор точки на кривой содержит одну степень свободы — он определяется выбором значения одного параметра t , который

пробегают некоторый интервал, например, единичный интервал $[0, 1]$ на вещественной числовой оси. Точки кривой задаются их радиус-векторами $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, компоненты которых $x^1(t)$, $x^2(t)$ и $x^3(t)$ являются функциями параметра t .

Условие неразрывности кривой (1.1) накладывает условие непрерывности на функции $x^1(t)$, $x^2(t)$ и $x^3(t)$. Однако, ограничившись только условием непрерывности мы можем, оказывается, получать в качестве кривых множества точек, совсем не согласующиеся с нашими интуитивными представлениями о кривой. В курсе математического анализа (см. [2]) часто приводится пример кривой Пеано: это непрерывная параметрическая кривая, которая проходит через каждую точку единичного квадрата. Чтобы избежать подобных казусов, функции $x^i(t)$ принято считать непрерывно дифференцируемыми (класса C^1) или, по крайней мере, кусочно непрерывно дифференцируемыми.

Рассмотрим другой способ задания кривых. Любая точка пространства \mathbb{E} задается выбором трех параметров — трех координат x^1 , x^2 и x^3 . Ограничим степень произвола, рассмотрим множество точек, координаты которых удовлетворяют функциональному уравнению

$$F(x^1, x^2, x^3) = 0, \quad (1.2)$$

где F — некоторая непрерывно дифференцируемая функция трех переменных. В типичной ситуации выбор точек такого множества содержит двухпараметрический произвол: выбрав произвольно две из трех координат точки, мы определяем третью координату из уравнения (1.2). Поэтому (1.2) — это уравнение поверхности. В пересечении двух поверхностей получается кривая. Это значит, что система двух уравнений

$$\begin{cases} F(x^1, x^2, x^3) = 0, \\ G(x^1, x^2, x^3) = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

в типичной ситуации задает кривую в \mathbb{E} . Если кривая целиком лежит в некоторой плоскости, то говорят что это *плоская кривая*. Для плоской кривой одно из уравнений в (1.3) можно заменить уравнением плоскости $Ax^1 + Bx^2 + Cx^3 + D = 0$.

Пусть кривая задана уравнением (1.3). Выберем одну из переменных x^1 , x^2 или x^3 в качестве параметра. Пусть для определенности $x^1 = t$. Тогда, записав уравнения (1.3) в виде

$$\begin{cases} F(t, x^2, x^3) = 0, \\ G(t, x^2, x^3) = 0 \end{cases}$$

и разрешив их относительно x^2 и x^3 , получим две функции $x^2(t)$ и $x^3(t)$. Значит, та же самая кривая, что задается системой уравнений (1.3), может быть задана и в векторно-параметрическом виде:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \left\| \begin{array}{c} t \\ x^2(t) \\ x^3(t) \end{array} \right\|.$$

Пусть, наоборот, кривая первоначально задана в векторно-параметрическом виде (1.1). Используя три функции $x^1(t)$, $x^2(t)$ и $x^3(t)$ из формулы (1.1), построим следующие две системы уравнений:

$$\begin{cases} x^1 - x^1(t) = 0, \\ x^2 - x^2(t) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^1 - x^1(t) = 0, \\ x^3 - x^3(t) = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Исключив параметр t из первой и из второй систем (1.4) мы получим два уравнения: первое уравнение связывает x^1 с x^2 , а второе — x^1 с x^3 :

$$\begin{cases} F(x^1, x^2) = 0, \\ G(x^1, x^3) = 0. \end{cases}$$

Это частный случай системы уравнений (1.3). Значит, векторно-параметрическое представление кривой может быть преобразовано к виду системы уравнений (1.3).

Ни один из рассмотренных способов задания кривой не является абсолютно предпочтительным перед другим. В зависимости от ситуации используется как тот, так и другой. Оба имеют свои преимущества и свои недостатки. Однако, для первоначального изучения теории кривых мы выберем

векторно-параметрический способ.

Пусть дана параметрическая кривая γ класса C^1 . Это кривая, координатные функции $x^1(t)$, $x^2(t)$ и $x^3(t)$ которой непрерывно дифференцируемы. Выберем два различных значения параметра: t и $\tilde{t} = t + \Delta t$, где Δt — приращение параметра. Пусть A и B — соответствующие этим значениям параметра точки на кривой. Проведем через них прямую — это будет

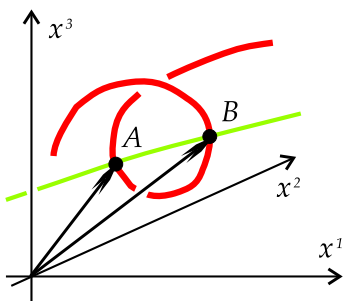


Рис. 1.1

секущая для кривой γ . Направляющий вектор \mathbf{a} этой прямой коллинеарен вектору \overrightarrow{AB} . Выберем его так:

$$\mathbf{a} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}. \quad (1.5)$$

Устремим Δt к нулю. При этом точка B устремится к точке A , а прямая AB займет свое предельное положение и станет касательной к кривой в точке A . Поэтому предельное значение вектора (1.5) — это касательный вектор к кривой γ в точке A :

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{r}}(t). \quad (1.6)$$

Компоненты касательного вектора (1.6) получаются дифференцированием компонент радиус-вектора $\mathbf{r}(t)$ по t .

Касательный вектор $\dot{\mathbf{r}}(t)$ определяет направление перемещения точки вдоль кривой для данного значения параметра t . Точки, в которых вектор $\dot{\mathbf{r}}(t)$ зануляется, оказываются выделенными. Это «точки остановки», после остановки точка может начать движение совсем в другом направлении. Для примера рассмотрим две плоские кривые:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} t^4 \\ t^3 \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

При $t = 0$ обе кривые (1.7) проходят через начало координат и касательные векторы обоих кривых в этой точке равны нулю. Однако, поведение этих кривых при прохождении через начало координат существенно различается. Первая кривая

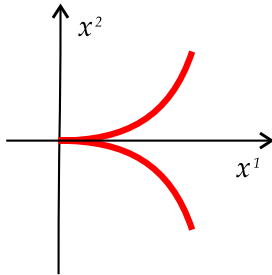


Fig. 1.2

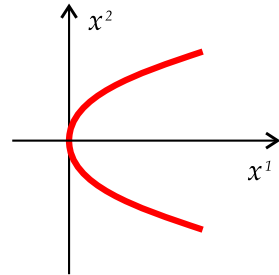


Fig. 1.3

имеет излом типа острия, а вторая никакой особенности в этой точке не имеет. Поэтому условие

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = 0 \quad (1.8)$$

является лишь необходимым, но не достаточным условием существования особенности в точке $\mathbf{r}(t)$ на параметрической

кривой. Противоположное условие

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) \neq 0 \quad (1.9)$$

гарантирует отсутствие особенности в точке $\mathbf{r}(t)$. Поэтому точки параметрической кривой, где выполнено условие (1.9), всегда оказываются *регулярными* (неособыми).

Рассмотрим вопрос о разделении регулярных и особых точек на кривых, заданных системой уравнений (1.3). Пусть координаты точки $A = (a^1, a^2, a^3)$ удовлетворяют системе уравнений (1.3). Функции $F(x^1, x^2, x^3)$ и $G(x^1, x^2, x^3)$ будем считать непрерывно дифференцируемыми. Следующая матрица, составленная из частных производных F и G в точке A :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x^1} & \frac{\partial F}{\partial x^2} & \frac{\partial F}{\partial x^3} \\ \frac{\partial G}{\partial x^1} & \frac{\partial G}{\partial x^2} & \frac{\partial G}{\partial x^3} \end{vmatrix}, \quad (1.10)$$

называется *матрицей Якоби* или *якобианом* системы уравнений (1.3). Если следующий минор в матрице Якоби

$$M_1 = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x^2} & \frac{\partial F}{\partial x^3} \\ \frac{\partial G}{\partial x^2} & \frac{\partial G}{\partial x^3} \end{vmatrix} \neq 0$$

отличен от нуля, то уравнения (1.3) разрешимы относительно переменных x^2 и x^3 в окрестности точки A . Они определяют три функции $x^1 = t$, $x^2 = x^2(t)$ и $x^3 = x^3(t)$, которые задают непрерывно дифференцируемую параметрическую кривую, проходящую через точку A . Этот факт вытекает из *теоремы о неявной функции* (см. [2]). Заметим, что касатель-

ный вектор к такой кривой

$$\tau = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ \dot{x}^2 \\ \dot{x}^3 \end{array} \right\| \neq 0$$

отличен от нуля, его первая компонента равна единице. Поэтому условие $M_1 \neq 0$ гарантирует регулярность кривой (1.3) в точке A . Но матрица Якоби (1.10) имеет еще два минора:

$$M_2 = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x^3} & \frac{\partial F}{\partial x^1} \\ \frac{\partial G}{\partial x^3} & \frac{\partial G}{\partial x^1} \end{vmatrix}, \quad M_3 = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x^1} & \frac{\partial F}{\partial x^2} \\ \frac{\partial G}{\partial x^1} & \frac{\partial G}{\partial x^2} \end{vmatrix},$$

для которых имеют место аналогичные утверждения. Поэтому мы имеем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1.1. *Кривая, заданная уравнениями (1.3), регулярна во всех точках, где ранг матрицы (1.10) равен 2.*

Плоская кривая, лежащая в плоскости $x^3 = 0$, может быть задана одним уравнением $F(x^1, x^2) = 0$. Второе уравнение заменяется здесь условием $x^3 = 0$. Поэтому $G(x^1, x^2, x^3) = x^3$. Матрица Якоби системы уравнений (1.3) имеет вид:

$$J = \left\| \begin{array}{cc|c} \frac{\partial F}{\partial x^1} & \frac{\partial F}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|. \quad (1.11)$$

Условие $\text{rang } J = 2$ эквивалентно тому, что, по меньшей мере, одна из двух частных производных в матрице (1.11) отлична от нуля. Эти производные составляют *градиент* функции F :

$$\text{grad } F = \left(\frac{\partial F}{\partial x^1}, \frac{\partial F}{\partial x^2} \right).$$

ТЕОРЕМА 1.2. *Плоская кривая, которая задана уравнением $F(x^1, x^2) = 0$, регулярна во всех точках, в которых $\text{grad } F \neq 0$.*

Теорема 1.2 является простым следствием теоремы 1.1 и соотношения (1.11). Отметим, что теоремы 1.1 и 1.2 дают лишь достаточные условия регулярности точек. Поэтому регулярными могут оказаться и точки, где эти условия не выполнены.

§ 2. Интеграл длины и выбор натурального параметра на кривой.

Рассмотрим параметрическую кривую $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ класса C^1 , где параметр t пробегает отрезок $[a, b]$. Рассмотрим монотонно возрастающую непрерывно дифференцируемую функцию $\varphi(\tilde{t})$ на отрезке $[\tilde{a}, \tilde{b}]$, для которой $\varphi(\tilde{a}) = a$ и $\varphi(\tilde{b}) = b$. Функция $\varphi(\tilde{t})$ принимает все значения из отрезка $[a, b]$ ровно по одному разу. Поэтому подстановка $t = \varphi(\tilde{t})$ в $\mathbf{r}(t)$ определяет новую вектор-функцию $\tilde{\mathbf{r}}(\tilde{t}) = \mathbf{r}(\varphi(\tilde{t}))$, которая определяет ту же кривую, что и исходная вектор-функция $\mathbf{r}(t)$. Эта процедура замены $\mathbf{r}(t)$ на $\tilde{\mathbf{r}}(\tilde{t})$ называется *репараметризацией* кривой. Вычислив касательный вектор в новой параметризации как производную сложной функции, находим:

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\tilde{t}) = \varphi'(\tilde{t}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\varphi(\tilde{t})). \quad (2.1)$$

Здесь $\varphi'(\tilde{t})$ — производная функции $\varphi(\tilde{t})$ по \tilde{t} . Формула (2.1) известна как *правило преобразования касательного вектора кривой* при замене параметризации.

Для репараметризации кривой можно использовать и монотонно убывающую непрерывно дифференцируемую функцию $\varphi(\tilde{t})$. Но при этом $\varphi(\tilde{a}) = b$ и $\varphi(\tilde{b}) = a$, то есть конечная и начальная точка кривой меняются ролями. Такие репараметризации называются *изменяющими ориентацию кривой*.

Из формулы (2.1) видим, что касательный вектор $\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\tilde{t})$ может зануляться в некоторых точках даже при ненулевом век-

торе $\tau(\varphi(\tilde{t}))$ за счет зануления производной $\varphi'(\tilde{t})$. Такие точки, разумеется, не являются особыми. Для того, чтобы исключить возникновение таких устранимых особенностей при репараметризации, допустимыми заменами параметра принято считать лишь те, для которых функция $\varphi(\tilde{t})$ строго монотонна, то есть $\varphi'(\tilde{t}) > 0$ либо $\varphi'(\tilde{t}) < 0$.

Формула (2.1) показывает, что касательный вектор кривой в регулярных точках зависит не только от геометрии кривой, но и от способа параметризации. Однако, влияние параметризации невелико, она может добавить лишь числовой множитель к вектору τ . Возникает вопрос: не существует ли какого то выделенного способа параметризации кривой? Ответ на этот вопрос связан с интегралом длины.

Рассмотрим сегмент параметрической кривой класса C^1 с параметром t , пробегающим отрезок числовой оси $[a, b]$. Пусть

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b. \quad (2.2)$$

разбиение этого отрезка на n частей. Точки $\mathbf{r}(t_0), \dots, \mathbf{r}(t_n)$ на кривой определяют некоторую n -звенную ломаную. Обозначим $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ и положим:

$$\varepsilon = \max_{k=1, \dots, n} \Delta t_k.$$

Величина ε — это мелкость разбиения (2.2). Длина k -го звена ломаной AB вычисляется по формуле $L_k = |\mathbf{r}(t_k) - \mathbf{r}(t_{k-1})|$. Пользуясь непрерывной дифференцируемостью вектор-функции $\mathbf{r}(t)$, для нее из тейлоровского разложения $\mathbf{r}(t)$ в точке t_{k-1} получаем $L_k =$

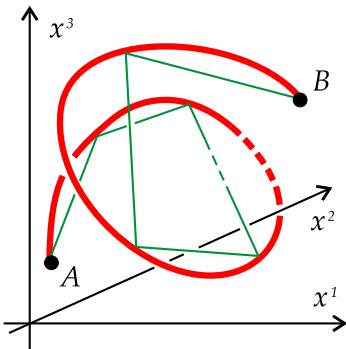


Fig. 2.1

$|\boldsymbol{\tau}(t_{k-1})| \cdot \Delta t_k + o(\varepsilon)$. Поэтому при стремлении мелкости разбиения (2.2) к нулю длина ломаной имеет предел, равный интегралу от модуля касательного вектора $\boldsymbol{\tau}(t)$ вдоль кривой:

$$L = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n L_k = \int_a^b |\boldsymbol{\tau}(t)| dt. \quad (2.3)$$

Величину L в (2.3) естественно считать длиной кривой AB . Заметим, что при репараметризации кривой в силу формулы (2.1) происходит лишь замена переменной в интеграле. Сама же величина интеграла L при этом остается неизменной. Значит, длина есть геометрический инвариант кривой, не зависящий от способа ее параметризации.

Интеграл длины (2.3) определяет выделенный способ параметризации кривой в евклидовом пространстве. Обозначим через $s(t)$ первообразную функции $\psi(t) = |\boldsymbol{\tau}(t)|$:

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\boldsymbol{\tau}(t)| dt. \quad (2.4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Величина s , определяемая интегралом (2.4), называется натуральным параметром кривой в евклидовом пространстве.

Отметим, что после выбора точки отсчета $\mathbf{r}(t_0)$ и выделенного направления (ориентации) на кривой значение натурального параметра s зависит только от точки кривой. Замена s на $-s$ соответствует смене ориентации на противоположную.

Продифференцируем интеграл (2.4) по переменному верхнему пределу t . Это приводит к соотношению:

$$\frac{ds}{dt} = |\boldsymbol{\tau}(t)|. \quad (2.5)$$

Пересчитаем касательный вектор в натуральной параметриза-

ции, используя формулу (2.5):

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\boldsymbol{\tau}}{|\boldsymbol{\tau}|}. \quad (2.6)$$

Из (2.6) видим, что в натуральной параметризации касательный вектор имеет единичную длину во всех регулярных точках. В особых такой вектор просто не определен.

§ 3. Репер Френе. Динамика репера Френе. Кривизна и кручение пространственной кривой.

Рассмотрим гладкую параметрическую кривую $\mathbf{r}(s)$ в натуральном параметре. Компоненты радиус-вектора $\mathbf{r}(s)$ для такой кривой являются функциями класса C^∞ . Они неограниченное число раз дифференцируемы по s . Единичный вектор $\boldsymbol{\tau}(s)$ получается дифференцированием $\mathbf{r}(s)$:

$$\boldsymbol{\tau}(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds}. \quad (3.1)$$

Продифференцируем вектор $\boldsymbol{\tau}(s)$ по натуральному параметру s и воспользуемся следующей леммой.

ЛЕММА 3.1. *Производная вектора постоянной длины есть вектор, перпендикулярный исходному вектору.*

ДОК-ВО. Для доказательства леммы воспользуемся декартовой прямоугольной системой координат:

$$|\boldsymbol{\tau}(s)|^2 = (\boldsymbol{\tau}(s) | \boldsymbol{\tau}(s)) = (\tau^1)^2 + (\tau^2)^2 + (\tau^3)^2 = \text{const}.$$

Продифференцируем это выражение по s , в результате чего получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (|\boldsymbol{\tau}(s)|^2) &= \frac{d}{ds} ((\tau^1)^2 + (\tau^2)^2 + (\tau^3)^2) = \\ &= 2\tau^1 (\tau^1)' + 2\tau^2 (\tau^2)' + 2\tau^3 (\tau^3)' = 0. \end{aligned}$$

Но это соотношение в точности эквивалентно $(\boldsymbol{\tau}(s) | \boldsymbol{\tau}'(s)) = 0$. Лемма доказана. \square

В силу доказанной леммы вектор $\boldsymbol{\tau}'(s)$ ортогонален единичному касательному вектору $\boldsymbol{\tau}(s)$. Если вектор $\boldsymbol{\tau}'(s)$ отличен от нуля, то его можно представить в виде

$$\boldsymbol{\tau}'(s) = k(s) \cdot \mathbf{n}(s). \quad (3.2)$$

Скаляр $k(s) = |\boldsymbol{\tau}'(s)|$ в формуле (3.2) называется *кривизной*, а единичный вектор $\mathbf{n}(s)$ называется *вектором главной нормали* или просто *вектором нормали* кривой в точке $\mathbf{r}(s)$. Единичные вектора $\boldsymbol{\tau}(s)$ и $\mathbf{n}(s)$ ортогональны друг другу. Дополним эти вектора еще одним вектором $\mathbf{b}(s)$, так, чтобы вектора $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{n} и \mathbf{b} образовывали правую тройку:

$$\mathbf{b}(s) = [\boldsymbol{\tau}(s), \mathbf{n}(s)]. \quad (3.3)$$

Вектор $\mathbf{b}(s)$ в (3.3) называется вектором *бинормали*. Вектора $\boldsymbol{\tau}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ и $\mathbf{b}(s)$ составляют ортонормированный базис, прикрепленный к точке $\mathbf{r}(s)$.

Базисы, прикрепленные к точкам, принято называть *реперами*. Реперы следует отличать от систем координат. Декартовы системы координат также определяются заданием точки (начала отсчета) и базиса. Однако, системы координат предназначены для фиксации координат точек. Реперы имеют другое назначение. Они обычно используются для разложения векторов, которые по своему происхождению, прикреплены к тем же точкам, что и вектора репера.

Реперы редко бывают одиночными, обычно возникают семейства реперов: к каждой точке некоторого множества (кривой, поверхности или даже всего пространства) бывает прикреплена своя тройка векторов. Именно таким является репер $\boldsymbol{\tau}(s)$, $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}(s)$. Он называется *репером Френе*. Это подвиж-

ный репер, в типичной ситуации его вектора изменяются при перемещении от точки к точке по кривой.

Рассмотрим производную $\mathbf{n}'(s)$. Этот вектор, прикрепленный к точке $\mathbf{r}(s)$, может быть разложен по векторам репера Френе в этой же точке. В силу леммы 3.1 вектор $\mathbf{n}'(s)$ ортогонален вектору $\mathbf{n}(s)$. Поэтому его разложение имеет вид

$$\mathbf{n}'(s) = \alpha \cdot \boldsymbol{\tau}(s) + \varkappa \cdot \mathbf{b}(s). \quad (3.4)$$

Величина α в (3.4) может быть выражена через кривизну. Действительно, из следующих вычислений находим:

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= (\boldsymbol{\tau}(s) | \mathbf{n}'(s)) = (\boldsymbol{\tau}(s) | \mathbf{n}(s))' - \\ &- (\boldsymbol{\tau}'(s) | \mathbf{n}(s)) = -(k(s) \cdot \mathbf{n}(s) | \mathbf{n}(s)) = -k(s). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Величина $\varkappa = \varkappa(s)$ не может быть вычислена через кривизну. Это еще одна характеристика кривой, называемая ее *кручением* в точке $\mathbf{r}(s)$. Разложение вектора $\mathbf{n}'(s)$ теперь имеет вид

$$\mathbf{n}'(s) = -k(s) \cdot \boldsymbol{\tau}(s) + \varkappa(s) \cdot \mathbf{b}(s). \quad (3.6)$$

Теперь рассмотрим производную вектора бинормали $\mathbf{b}'(s)$, которая перпендикулярна $\mathbf{b}(s)$. Она тоже раскладывается по векторам репера Френе: $\mathbf{b}'(s) = \beta \cdot \mathbf{n}(s) + \gamma \cdot \boldsymbol{\tau}(s)$. Коэффициенты β и γ в таком разложении могут быть найдены из вычислений, подобных вычислениям (3.5):

$$\begin{aligned} \beta(s) &= (\mathbf{n}(s) | \mathbf{b}'(s)) = (\mathbf{n}(s) | \mathbf{b}(s))' - (\mathbf{n}'(s) | \mathbf{b}(s)) = \\ &= -(-k(s) \cdot \boldsymbol{\tau}(s) + \varkappa(s) \cdot \mathbf{b}(s) | \mathbf{b}(s)) = -\varkappa(s). \\ \gamma(s) &= (\boldsymbol{\tau}(s) | \mathbf{b}'(s)) = (\boldsymbol{\tau}(s) | \mathbf{b}(s))' - (\boldsymbol{\tau}'(s) | \mathbf{b}(s)) = \\ &= -(k(s) \cdot \mathbf{n}(s) | \mathbf{b}(s)) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда для разложения вектора $\mathbf{b}'(s)$ по векторам репера

Френе получаем следующее выражение:

$$\mathbf{b}'(s) = -\kappa(s) \cdot \mathbf{n}(s). \quad (3.7)$$

Соединим уравнения (3.2), (3.6) и (3.7) в одну систему:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau}'(s) = k(s) \cdot \mathbf{n}(s), \\ \mathbf{n}'(s) = -k(s) \cdot \boldsymbol{\tau}(s) + \kappa(s) \cdot \mathbf{b}(s), \\ \mathbf{b}'(s) = -\kappa(s) \cdot \mathbf{n}(s). \end{cases} \quad (3.8)$$

Уравнения (3.8) связывают вектора $\boldsymbol{\tau}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ и $\mathbf{b}(s)$ с их производными по s . Эти дифференциальные уравнения, описывающие динамику репера Френе, известны как *уравнения Френе*. Уравнения (3.8) следует дополнить уравнением (3.1), которое определяет динамику точки $\mathbf{r}(s)$ (точки прикрепления векторов репера Френе).

§ 4. Центр кривизны и радиус кривизны. Эволюта и эвольвента кривой.

В случае плоской кривой вектора $\boldsymbol{\tau}(s)$ и $\mathbf{n}(s)$ лежат в той же плоскости, что и вся кривая. Поэтому вектор бинормали (3.3) в этом случае совпадает с вектором единичной нормали к плоскости. Его производная $\mathbf{b}'(s)$ равна нулю. Отсюда в силу третьего уравнения Френе (3.7) для плоской кривой получаем $\kappa(s) \equiv 0$. Уравнения Френе (3.8) в случае плоской кривой редуцируются к виду

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau}'(s) = k(s) \cdot \mathbf{n}(s), \\ \mathbf{n}'(s) = -k(s) \cdot \boldsymbol{\tau}(s). \end{cases} \quad (4.1)$$

Рассмотрим окружность радиуса R с центром в начале координат, лежащую в координатной плоскости $x^3 = 0$. Ее удобно

задавать следующими уравнениями

$$\mathbf{r}(s) = \left\| \begin{array}{l} R \cos(s/R) \\ R \sin(s/R) \end{array} \right\|, \quad (4.2)$$

где s — натуральный параметр. Подставив (4.2) в (3.1) и далее в (3.2), находим единичный касательный вектор окружности $\boldsymbol{\tau}(s)$ и единичный вектор главной нормали $\mathbf{n}(s)$:

$$\boldsymbol{\tau}(s) = \left\| \begin{array}{l} -\sin(s/R) \\ \cos(s/R) \end{array} \right\|, \quad \mathbf{n}(s) = \left\| \begin{array}{l} -\cos(s/R) \\ -\sin(s/R) \end{array} \right\|. \quad (4.3)$$

Теперь, подставив (4.3) в (4.1), вычисляем кривизну окружности $k(s) = 1/R = \text{const}$. Кривизна k окружности постоянна, а обратная кривизна $1/k$ совпадает с ее радиусом.

Отступим от точки $\mathbf{r}(s)$ на окружности на величину $1/k$ в направлении вектора нормали $\mathbf{n}(s)$. Легко видеть, что при этом мы попадаем в центр окружности. Проведем аналогичную процедуру с произвольной пространственной кривой. В результате этого действия из точки $\mathbf{r}(s)$ на кривой мы переместимся в точку с радиус-вектором

$$\boldsymbol{\rho}(s) = \mathbf{r}(s) + \frac{\mathbf{n}(s)}{k(s)}. \quad (4.4)$$

Разумеется, это можно сделать лишь в точках, где $k(s) \neq 0$. Аналогия с окружностью определяет следующую терминологию: величина $R(s) = 1/k(s)$ называется *радиусом кривизны*, а точка с радиус-вектором (4.4) называется *центром кривизны* кривой в точке $\mathbf{r}(s)$.

В случае произвольной кривой ее центр кривизны не является фиксированной точкой. При изменении s центр кривизны перемещается, заметая некоторую кривую, которая называется *эволютой* для исходной кривой. Формула (4.4) служит

векторно-параметрическим уравнением эволюты. Отметим, что натуральный параметр s исходной кривой не является натуральным параметром на эволюте.

Пусть дана некоторая пространственная кривая $\mathbf{r}(t)$. Кривая $\tilde{\mathbf{r}}(\tilde{s})$, эволюта которой $\tilde{\rho}(\tilde{s})$ совпадает с кривой $\mathbf{r}(t)$, называется *эвольвентой* кривой $\mathbf{r}(t)$. Задача построения эволюты по заданной кривой решается формулой (4.4). Обратная задача построения *эвольвенты* по заданной кривой оказывается более сложной. Эффективно в явной форме она решается в случае плоской кривой.

Пусть вектор-функция $\mathbf{r}(s)$ определяет некоторую плоскую кривую в натуральной параметризации и пусть $\tilde{\mathbf{r}}(\tilde{s})$ — эвольвента этой кривой в своей собственной натуральной параметризации. Связь между s и \tilde{s} осуществляется некоторой функцией φ в форме $\tilde{s} = \varphi(s)$. Пусть $\psi = \varphi^{-1}$ — обратная функция для φ и $s = \psi(\tilde{s})$. Применение формулы (4.4) дает

$$\mathbf{r}(\psi(\tilde{s})) = \tilde{\mathbf{r}}(\tilde{s}) + \frac{\tilde{\mathbf{n}}(\tilde{s})}{\tilde{k}(\tilde{s})}. \quad (4.5)$$

Продифференцируем соотношение (4.5) по \tilde{s} и воспользуемся формулой (3.1) и уравнениями Френе в форме (4.1):

$$\psi'(\tilde{s}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\psi(\tilde{s})) = \frac{d}{d\tilde{s}} \left(\frac{1}{\tilde{k}(\tilde{s})} \right) \cdot \tilde{\mathbf{n}}(\tilde{s}).$$

Здесь $\boldsymbol{\tau}(\psi(\tilde{s}))$ и $\tilde{\mathbf{n}}(\tilde{s})$ — это вектора единичной длины, которые коллинеарны в силу полученного соотношения. Значит:

$$\tilde{\mathbf{n}}(\tilde{s}) = \pm \boldsymbol{\tau}(\psi(\tilde{s})), \quad \psi'(\tilde{s}) = \pm \frac{d}{d\tilde{s}} \left(\frac{1}{\tilde{k}(\tilde{s})} \right). \quad (4.6)$$

Второе из соотношений (4.6) может быть проинтегрировано:

$$\frac{1}{\tilde{k}(\tilde{s})} = \pm(\psi(\tilde{s}) - C). \quad (4.7)$$

Здесь C — константа интегрирования. Соединим (4.7) с первым соотношением (4.6) и подставим это в формулу (4.5):

$$\tilde{\mathbf{r}}(\tilde{s}) = \mathbf{r}(\psi(\tilde{s})) + (C - \psi(\tilde{s})) \cdot \boldsymbol{\tau}(\psi(\tilde{s})).$$

Сделаем подстановку $\tilde{s} = \varphi(s)$ в полученную формулу и обозначим $\boldsymbol{\rho}(s) = \tilde{\mathbf{r}}(\varphi(s))$, что дает

$$\boldsymbol{\rho}(s) = \mathbf{r}(s) + (C - s) \cdot \boldsymbol{\tau}(s). \quad (4.8)$$

Формула (4.8) — это параметрическое уравнение эвольвенты для плоской кривой $\mathbf{r}(s)$. Наличие произвольной константы в уравнении (4.8) показывает, что эвольвента не единственна. Каждая кривая обладает целым семейством эвольвент. Аналогичное обстоятельство имеет место и в пространственном случае, однако, еще раз подчеркнем, что формула (4.8) для пространственных кривых неприменима.

§ 5. Кривые как траектории материальных точек в механике.

Изложение классической механики традиционно начинается с рассмотрения движения материальных точек. *Материальной точкой* принято называть всякий материальный объект, собственные размеры которого пренебрежимо малы по сравнению с масштабами его перемещения в пространстве. Положение такого объекта можно характеризовать его радиус-вектором \mathbf{r} в некоторой декартовой системе отсчета, а перемещение можно изображать функцией $\mathbf{r}(t)$. Кривая $\mathbf{r}(t)$ называется *траекторией* материальной точки. В отличие от чисто геометрических линий, траектории материальных точек обладают выделенным параметром t , отличным от натурального параметра s . Этот параметр — время.

Касательный вектор к траектории, вычисленный в параметре t , называется *скоростью* материальной точки:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}(t) = \left\| \begin{array}{c} v^1(t) \\ v^2(t) \\ v^3(t) \end{array} \right\|. \quad (5.1)$$

Производная вектора скорости по времени называется *ускорением* материальной точки:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}}(t) = \left\| \begin{array}{c} a^1(t) \\ a^2(t) \\ a^3(t) \end{array} \right\|. \quad (5.2)$$

Движение материальной точки в классической механике определяется вторым законом Ньютона:

$$m \mathbf{a} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}). \quad (5.3)$$

Здесь m — масса материальной точки. Это константа, характеризующая количество материи, сосредоточенное в этой материальной точке. Вектор \mathbf{F} — это вектор силы. Посредством вектора силы в механике обозначается воздействие окружающих тел (иногда очень удаленных) на данную материальную точку. Величина такого воздействия зависит от расположения точки по отношению к окружающим телам, но иногда она может зависеть и от скорости самой точки. Закон Ньютона в форме (5.3) показывает, что внешнее воздействие непосредственно влияет лишь на ускорение материальной точки, а не на скорость и не на координаты точки.

Пусть $s = s(t)$ — натуральный параметр траектории, выраженный через время. Формула (2.5) дает:

$$\dot{s}(t) = |\mathbf{v}(t)| = v(t). \quad (5.4)$$

Через $v(t)$ в формуле (5.4) мы просто обозначили модуль вектора скорости.

Рассмотрим траекторию материальной точки в натуральном параметре $\mathbf{r}(s)$. Тогда для скорости (5.1) и для ускорения (5.2) получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= \dot{s}(t) \cdot \boldsymbol{\tau}(s(t)), \\ \mathbf{a}(t) &= \ddot{s}(t) \cdot \boldsymbol{\tau}(s(t)) + (\dot{s}(t))^2 \cdot \boldsymbol{\tau}'(s(t)).\end{aligned}$$

Учитывая формулу (5.4) и первое из уравнений Френе, полученные выражения можно переписать так:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= v(t) \cdot \boldsymbol{\tau}(s(t)), \\ \mathbf{a}(t) &= \dot{v}(t) \cdot \boldsymbol{\tau}(s(t)) + (k(s(t)) v(t)^2) \cdot \mathbf{n}(s(t)).\end{aligned}\tag{5.5}$$

Вторая из формул (5.5) определяет разложение вектора ускорения на две компоненты. Первая из них направлена по касательной к траектории, она называется *касательным* или *тангенциальным* ускорением. Вторая компонента направлена по нормали к траектории в сторону центра кривизны. Она называется *центростремительным* ускорением. Важно отметить, что центростремительное ускорение определяется лишь модулем скорости и геометрией траектории (ее кривизной).

ГЛАВА II

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО И ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА.

§ 1. Векторные и тензорные поля в пространстве.

Пусть вновь \mathbb{E} — трехмерное евклидово точечное пространство. Скажем, что в \mathbb{E} задано *векторное поле*, если в каждой точке пространства \mathbb{E} задан некоторый вектор, прикрепленный к этой точке. Выберем некоторую декартову (косоугольную) систему отсчета в пространстве \mathbb{E} . Это позволяет задавать точки пространства их координатами x^1 , x^2 и x^3 , и одновременно это дает базис \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 и \mathbf{e}_3 для разложения векторов, прикрепленных к точкам. Тогда векторное поле \mathbf{F} можно изобразить тремя числовыми функциями

$$\mathbf{F} = \left\| \begin{array}{c} F^1(\mathbf{x}) \\ F^2(\mathbf{x}) \\ F^3(\mathbf{x}) \end{array} \right\|, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ — компоненты радиус-вектора некоторой произвольной точки из \mathbb{E} . Запись $f(\mathbf{x})$ для обозначения функции $f(x^1, x^2, x^3)$ значительно сокращает все формулы.

Векторный характер поля \mathbf{F} проявляется при замене одной системы координат на другую. Пусть формула (1.1) определяет компоненты векторного поля в системе координат O , \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 и пусть O' , $\tilde{\mathbf{e}}_1$, $\tilde{\mathbf{e}}_2$, $\tilde{\mathbf{e}}_3$ — некоторая другая система координат. Правило преобразования компонент векторного

поля \mathbf{F} при переходе из одной декартовой системы координат в другую можно выразить следующими двумя соотношениями:

$$\begin{aligned} F^i(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^3 S_j^i \tilde{F}^j(\tilde{\mathbf{x}}), \\ x^i &= \sum_{j=1}^3 S_j^i \tilde{x}^j + a^i. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь S_j^i — компоненты матрицы перехода из базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ в базис $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$, а числа a^1, a^2, a^3 — это компоненты вектора $\overrightarrow{OO'}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

Формула (1.2) соединяет в себе правило преобразования компонент вектора при замене базиса с правилом преобразования координат точки при замене декартовой системы координат (см. [1]). Важным нововведением по сравнению с книгой [1] является появление аргументов у F^i и \tilde{F}^i . Это, конечно же, связано с переходом от одиночных векторов к векторным полям.

Но с точками пространства \mathbb{E} можно связывать не только векторы. В линейной алгебре изучаются также ковекторы, линейные операторы, а также билинейные и квадратичные формы. Задав в каждой точке пространства \mathbb{E} некоторый ковектор, мы получаем *ковекторное поле*. Задав в каждой точке линейный оператор, получаем *операторное поле*. И, наконец, задав в каждой точке билинейную (или квадратичную) форму, получаем поле билинейных (или квадратичных) форм. Выбор декартовой системы координат $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ определяет выбор базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, с которым связано числовое представление всех перечисленных объектов: для ковекторов — это набор их компонент, для линейных операторов, билинейных и квадратичных форм — это их матрицы. Поэтому задание ковекторного поля \mathbf{F} эквивалентно заданию трех функций

$F_1(\mathbf{x})$, $F_2(\mathbf{x})$, $F_3(\mathbf{x})$, которые при замене декартовой системы координат преобразуются по следующему правилу:

$$\begin{aligned} F_i(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^3 T_i^j \tilde{F}_j(\tilde{\mathbf{x}}), \\ x^i &= \sum_{j=1}^3 S_j^i \tilde{x}^j + a^i. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В случае операторного поля \mathbf{F} формула преобразования компонент его матрицы при замене системы координат имеет вид:

$$\begin{aligned} F_j^i(\mathbf{x}) &= \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 S_p^i T_j^q \tilde{F}_q^p(\tilde{\mathbf{x}}), \\ x^i &= \sum_{p=1}^3 S_p^i \tilde{x}^p + a^i. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Для поля билинейных (или квадратичных) форм \mathbf{F} правило преобразования компонент при замене декартовой системы координат выглядит так:

$$\begin{aligned} F_{ij}(\mathbf{x}) &= \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 T_i^p T_j^q \tilde{F}_{pq}(\tilde{\mathbf{x}}), \\ x^i &= \sum_{p=1}^3 S_p^i \tilde{x}^p + a^i. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Каждое из соотношений (1.2), (1.3), (1.4) и (1.5) состоит из двух формул. Первая формула задает связь между компонентами поля, которые являются функциями двух различных наборов аргументов $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ и $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)$. Вторая

формула устанавливает функциональную связь между этими двумя наборами аргументов. Она одинакова во всех случаях.

Первые формулы в соотношениях (1.2), (1.3), (1.4) и (1.5) различны. Однако в их записи прослеживается определенная закономерность. Число знаков суммы и число индексов суммирования в правой части этих формул определяется числом индексов в компонентах поля \mathbf{F} . Общее число матриц перехода в правой части формулы также определяется числом индексов в компонентах поля \mathbf{F} , при этом каждый верхний индекс предполагает использование матрицы перехода S , а каждый нижний индекс — матрицы T .

Число индексов поля \mathbf{F} в рассмотренных выше примерах не превосходит двух. Однако, подмеченная закономерность в правиле преобразования компонент может быть обобщена на случай произвольного числа индексов:

$$F_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \sum_{\substack{p_1 \dots p_r \\ q_1 \dots q_s}} S_{p_1}^{i_1} \dots S_{p_r}^{i_r} T_{j_1}^{q_1} \dots T_{j_s}^{q_s} \tilde{F}_{q_1 \dots q_s}^{p_1 \dots p_r} \quad (1.6)$$

Формула (1.6) содержит $(r + s)$ -кратное суммирование, при котором каждый из индексов p_1, \dots, p_r и q_1, \dots, q_s пробегает значения от 1 до 3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Тензором типа (r, s) называется геометрический объект \mathbf{F} , компоненты которого в произвольном базисе нумеруются $(r + s)$ индексами и при замене базиса преобразуются по правилу (1.6).

Нижние индексы в записи компонент тензора иногда называют *ковариантными* индексами, а верхние — *контравариантными* индексами. Обобщая понятие векторного поля, мы можем прикрепить к каждой точке некоторый тензор типа (r, s) . В результате этого получится понятие тензорного поля типа (r, s) . Концепция тензорного поля удобна тем, что она

позволяет в едином ключе описывать векторные, ковекторные и операторные поля, а также поля билинейных и квадратичных форм. Векторное поле имеет тип $(1, 0)$, ковекторное поле имеет тип $(0, 1)$, операторное — $(1, 1)$ и, наконец, поле билинейных (или квадратичных) форм имеет тип $(0, 2)$. Тензорные поля некоторых других типов также, оказывается, имеют содержательный смысл. Так, например, в следующей главе мы рассмотрим поле кривизны с четырьмя индексами.

Переход от одиночных тензоров к тензорным полям добавляет аргументы в формуле (1.6). Теперь ее следует записывать подобно (1.2), (1.3), (1.4) и (1.5) в виде двух соотношений:

$$F_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{p_1 \dots p_r \\ q_1 \dots q_s}} S_{p_1}^{i_1} \dots S_{p_r}^{i_r} T_{j_1}^{q_1} \dots T_{j_s}^{q_s} \tilde{F}_{q_1 \dots q_s}^{p_1 \dots p_r}(\tilde{\mathbf{x}}),$$

$$x^i = \sum_{j=1}^3 S_j^i \tilde{x}^j + a^i. \quad (1.7)$$

Формула (1.7) выражает правило преобразования компонент тензорного поля типа (r, s) при замене одной декартовой системы координат на другую.

Наиболее простой тип тензорных полей — это поля типа $(0, 0)$, которые называются *скалярными полями*. Их компоненты не имеют индексов, поэтому скалярные поля — это просто числовые функции на пространстве \mathbb{E} .

§ 2. Тензорное произведение и свертка.

Рассмотрим два ковекторных поля \mathbf{a} и \mathbf{b} . В некоторой декартовой системе координат они задаются своими компонентами $a_i(\mathbf{x})$ и $b_j(\mathbf{x})$. Это два набора функций, по три функции в каждом наборе. Образует из них новый набор из девяти функций простым перемножением:

$$c_{ij}(\mathbf{x}) = a_i(\mathbf{x}) b_j(\mathbf{x}). \quad (2.1)$$

Пользуясь формулой (1.3), выразим правую часть (2.1) через компоненты полей \mathbf{a} и \mathbf{b} в другой системе координат:

$$c_{ij}(\mathbf{x}) = \left(\sum_{p=1}^3 T_i^p \tilde{a}_p \right) \left(\sum_{q=1}^3 T_j^q \tilde{b}_q \right) = \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 T_i^p T_j^q (\tilde{a}_p \tilde{b}_q).$$

Если мы обозначим через $\tilde{c}_{pq}(\tilde{\mathbf{x}})$ произведение компонент полей $\tilde{a}_i(\tilde{\mathbf{x}})$ и $\tilde{b}_j(\tilde{\mathbf{x}})$ в другой системе координат, то величины $c_{ij}(\mathbf{x})$ и $\tilde{c}_{pq}(\tilde{\mathbf{x}})$ связаны соотношением (1.5). Значит, из двух ковекторных полей можно организовать поле квадратичных форм путем перемножения их компонент в произвольной декартовой системе отсчета. Этот прием называется *тензорным умножением* полей \mathbf{a} и \mathbf{b} . Для полученного поля \mathbf{c} используется обозначение $\mathbf{c} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$.

Описанный прием перемножения компонент может быть применен к произвольным тензорным полям. Пусть \mathbf{A} — тензорное поле типа (r, s) , а \mathbf{B} — поле типа (m, n) . Положим

$$C_{j_1 \dots j_s j_{s+1} \dots j_{s+n}}^{i_1 \dots i_r i_{r+1} \dots i_{r+m}}(\mathbf{x}) = A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(\mathbf{x}) B_{j_{s+1} \dots j_{s+n}}^{i_{r+1} \dots i_{r+m}}(\mathbf{x}). \quad (2.2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Тензорное поле \mathbf{C} типа $(r + m, s + n)$, компоненты которого вычисляются по формуле (2.2), называется тензорным произведением $\mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ полей \mathbf{A} и \mathbf{B} .

Данное определение требует проверки на предмет корректности. Мы должны убедиться в том, что при переходе из одной декартовой системы координат в другую компоненты поля \mathbf{C} преобразуются по правилу (1.7). Запишем правило (1.7) применительно к тензорным полям \mathbf{A} и \mathbf{B} :

$$A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \sum_{p \dots q} S_{p_1}^{i_1} \dots S_{p_r}^{i_r} T_{j_1}^{q_1} \dots T_{j_s}^{q_s} \tilde{A}_{q_1 \dots q_s}^{p_1 \dots p_r},$$

$$B_{j_{s+1} \dots j_{s+n}}^{i_{r+1} \dots i_{r+m}} = \sum_{p \dots q} S_{p_{r+1}}^{i_{r+1}} \dots S_{p_{r+m}}^{i_{r+m}} T_{j_{s+1}}^{q_{s+1}} \dots T_{j_{s+n}}^{q_{s+n}} \tilde{B}_{q_{s+1} \dots q_{s+n}}^{p_{r+1} \dots p_{r+m}}.$$

Суммирование в правой части этих формул производится по всем повторяющимся индексам, которые входят в формулу два раза — один раз как верхний индекс и один раз как нижний индекс. Перемножение этих двух формул приводит в точности к соотношению (1.7) для компонент поля \mathbf{C} .

ТЕОРЕМА 2.1. *Тензорное умножение ассоциативно, то есть $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C})$.*

ДОК-ВО. Пусть \mathbf{A} — тензор типа (r, s) , \mathbf{B} — тензор типа (m, n) и \mathbf{C} — тензор типа (p, q) . Имеет место следующее очевидное числовое равенство:

$$\begin{aligned} & \left(A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} B_{j_{s+1} \dots j_{s+n}}^{i_{r+1} \dots i_{r+m}} \right) C_{j_{s+n+1} \dots j_{s+n+q}}^{i_{r+m+1} \dots i_{r+m+p}} = \\ & = A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \left(B_{j_{s+1} \dots j_{s+n}}^{i_{r+1} \dots i_{r+m}} C_{j_{s+n+1} \dots j_{s+n+q}}^{i_{r+m+1} \dots i_{r+m+p}} \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Как видим из (2.3), ассоциативность тензорного произведения вытекает из ассоциативности умножения чисел. \square

Тензорное произведение не является коммутативным. Построим пример, подтверждающий это. Пусть в некоторой системе координат ковекторные поля \mathbf{a} и \mathbf{b} имеют компоненты $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$ и $\mathbf{b} = (0, 1, 0)$. Положим $\mathbf{c} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ и $\mathbf{d} = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$. Тогда для компонент c_{12} и d_{12} из (2.2) имеем: $c_{12} = 1$ и $d_{12} = 0$. Значит, $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \neq \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$.

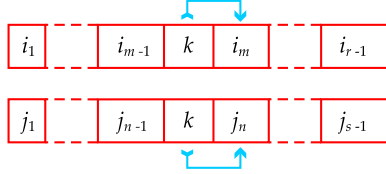
Рассмотрим операторное поле \mathbf{F} . Его компоненты $F_j^i(\mathbf{x})$ являются компонентами оператора $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Известно, что след матрицы $F_j^i(\mathbf{x})$ является скалярным инвариантом оператора $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ (см. [1]). Поэтому формула

$$f(\mathbf{x}) = \text{tr } \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 F_i^i(\mathbf{x}) \quad (2.4)$$

определяет скалярное поле $f(\mathbf{x})$ в пространстве \mathbb{E} . Сумма, подобная (2.4), может быть записана для любого тензорного поля \mathbf{F} , компоненты которого имеют, по крайней мере, один верхний и один нижний индекс:

$$H_{j_1 \dots j_{s-1}}^{i_1 \dots i_{r-1}}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^3 F_{j_1 \dots j_{n-1} k j_n \dots j_{s-1}}^{i_1 \dots i_{m-1} k i_m \dots i_{r-1}}(\mathbf{x}). \quad (2.5)$$

В формуле (2.5) индекс суммирования k помещен в m -ую позицию сверху и в n -ую позицию снизу. Последующие индексы в записи компонент поля \mathbf{F} смещены на одну позицию вправо:



ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Тензорное поле \mathbf{H} , компоненты которого вычисляются по формуле (2.5) из компонент поля \mathbf{F} , называется *сверткой* поля \mathbf{F} по m -ой и n -ой компонентам.

Подобно определению 2.1 это определение требует проверки его корректности. Проверим, что при замене системы координат компоненты поля \mathbf{H} преобразуются по правилу (1.7). Для этого запишем правило (1.7) для компонент поля \mathbf{F} в правой части формулы (2.5):

$$\begin{aligned} F_{j_1 \dots j_{n-1} k j_n \dots j_{s-1}}^{i_1 \dots i_{m-1} k i_m \dots i_{r-1}} &= \sum_{\substack{\alpha p_1 \dots p_{r-1} \\ \beta q_1 \dots q_{s-1}}} S_{p_1}^{i_1} \dots S_{p_{m-1}}^{i_{m-1}} S_{\alpha}^k S_{p_m}^{i_m} \dots S_{p_{r-1}}^{i_{r-1}} \times \\ &\times T_{j_1}^{q_1} \dots T_{j_{n-1}}^{q_{n-1}} T_k^{\beta} T_{j_n}^{q_n} \dots T_{j_{s-1}}^{q_{s-1}} \tilde{F}_{q_1 \dots q_{n-1} \beta q_n \dots q_{s-1}}^{p_1 \dots p_{m-1} \alpha p_m \dots p_{r-1}}. \end{aligned}$$

Для получения этой формулы из (1.7) мы подставили индекс k в m -ую и n -ую позиции, после чего сдвинули последующие

индексы на одну позицию вправо. Для достижения большей симметричности между левой и правой частями формулы аналогичная подвижка сделана и в индексах суммирования. Ясно, что такое переобозначение индексов суммирования не меняет значения суммы.

Теперь для выполнения свертки добавим суммирование по k . В правой части формулы это суммирование можно выполнить явно, что вытекает из следующей формулы ($T = S^{-1}$):

$$\sum_{k=1}^3 S_{\alpha}^k T_k^{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}. \quad (2.6)$$

В силу (2.6), после выполнения суммирования по k , можно выполнить и суммирование по β и по α . При этом учтем, что

$$\sum_{\alpha=1}^3 \tilde{F}_{q_1 \dots q_{n-1} \alpha q_n \dots q_{s-1}}^{p_1 \dots p_{m-1} \alpha p_m \dots p_{r-1}} = \tilde{H}_{q_1 \dots q_{s-1}}^{p_1 \dots p_{r-1}}.$$

Это приводит к следующему соотношению

$$H_{j_1 \dots j_{s-1}}^{i_1 \dots i_{r-1}} = \sum_{\substack{p_1 \dots p_{r-1} \\ q_1 \dots q_{s-1}}} S_{p_1}^{i_1} \dots S_{p_{r-1}}^{i_{r-1}} T_{j_1}^{q_1} \dots T_{j_{s-1}}^{q_{s-1}} \tilde{H}_{q_1 \dots q_{s-1}}^{p_1 \dots p_{r-1}},$$

которое в точности совпадает с правилом преобразования компонент тензорного поля (1.7), записанным применительно к полю \mathbf{H} . Корректность определения 2.2 доказана.

Операция свертывания, введенная в определении 2.2, всегда требует указания позиций двух индексов, по которым производится свертывание. Один из индексов должен быть верхним, а второй — нижним. Для обозначения свертки используется значок C , формулу (2.5) сокращенно записывают так:

$$\mathbf{H} = C_{m,n}(\mathbf{F}) = C(\mathbf{F}).$$

Указание на m и n часто опускают, ибо это бывает ясно из контекста.

Тензорное поле типа $(1, 1)$ можно свернуть единственным способом. Для тензорного поля \mathbf{F} типа $(2, 2)$ уже имеется два способа свертывания. В результате таких свертываний, вообще говоря, получаются разные тензорные поля типа $(1, 1)$. Полученные тензорные поля типа $(1, 1)$ можно подвергнуть еще одной свертке. При этом получится *полная свертка* поля \mathbf{F} , которая будет скалярным полем. Поле типа $(2, 2)$ может иметь две различные полные свертки. В общем случае поля \mathbf{F} типа (n, n) число полных свертков равно $n!$, разумеется, если среди них нет совпадающих.

Операции тензорного произведения и свертки часто возникают естественным образом. Например, пусть в пространстве \mathbb{E} задано векторное поле \mathbf{v} и ковекторное поле \mathbf{w} . Это значит, что к каждой точке прикреплен один вектор и один ковектор. Вычислив поточечно скалярные произведения таких векторов и ковекторов, мы получим скалярное поле $f = \langle \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle$. В координатах такое скалярное поле вычисляется по формуле:

$$f = \sum_{k=1}^3 w_k v^k. \quad (2.7)$$

Из формулы (2.7) ясно, что $f = C(\mathbf{w} \otimes \mathbf{v})$. Скалярное произведение $f = \langle \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle$ — это свертка тензорного произведения полей \mathbf{w} и \mathbf{v} . Аналогичным образом, если задано операторное поле \mathbf{F} и векторное поле \mathbf{v} , то действие \mathbf{F} на \mathbf{v} определяет новое векторное поле $\mathbf{u} = \mathbf{F} \mathbf{v}$, где

$$u^i = \sum_{j=1}^3 F_j^i v^j.$$

При этом можно записать: $\mathbf{u} = C(\mathbf{F} \otimes \mathbf{v})$; хотя, эта запись неоднозначна. Она может означать также умножение поля \mathbf{v} на след операторного поля \mathbf{F} .

§ 3. Алгебра тензорных полей.

Пусть \mathbf{v} и \mathbf{w} — два векторных поля. Тогда в каждой точке пространства \mathbb{E} определены два вектора $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{w}(\mathbf{x})$, которые можно сложить. В результате этого получится новое векторное поле $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$. Аналогичным образом можно определить и сложение тензорных полей. Пусть \mathbf{A} и \mathbf{B} — два тензорных поля типа (r, s) . Рассмотрим сумму их компонент в некоторой декартовой системе координат:

$$C_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} + B_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}. \quad (3.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Тензорное поле \mathbf{C} типа (r, s) , компоненты которого вычисляются по формуле (3.1), называется суммой полей \mathbf{A} и \mathbf{B} типа (r, s) .

Проверка правила (1.7) для компонент поля \mathbf{C} не составляет труда. Достаточно записать правило (1.7) для компонент полей \mathbf{A} и \mathbf{B} и сложить полученные формулы. Поэтому определение 3.1 корректно.

Сумма тензорных полей коммутативна и ассоциативна. Это вытекает из коммутативности и ассоциативности сложения чисел в силу следующих очевидных соотношений:

$$\begin{aligned} A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} + B_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} &= B_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} + A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}, \\ (A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} + B_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}) + C_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} &= A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} + (B_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} + C_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}). \end{aligned}$$

Обозначим через $T_{(r,s)}$ множество тензорных полей типа (r, s) . Тензорное умножение, введенное в определении 2.1, представляет собой следующую бинарную операцию:

$$T_{(r,s)} \times T_{(m,n)} \rightarrow T_{(r+m,s+n)}. \quad (3.2)$$

Операция сложения тензоров и операция тензорного умноже-

ния (3.2) связаны дистрибутивными законами:

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} &= \mathbf{A} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{C}, \\ \mathbf{C} \otimes (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \mathbf{C} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{C} \otimes \mathbf{B}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Дистрибутивные законы (3.3) вытекают из дистрибутивности умножения чисел. Их доказательство сводится к следующим очевидным формулам в компонентах тензорных полей:

$$\begin{aligned}(A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} + B_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}) C_{j_{s+1} \dots j_{s+n}}^{i_{r+1} \dots i_{r+m}} &= \\ &= A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} C_{j_{s+1} \dots j_{s+n}}^{i_{r+1} \dots i_{r+m}} + B_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} C_{j_{s+1} \dots j_{s+n}}^{i_{r+1} \dots i_{r+m}}, \\ C_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} (A_{j_{s+1} \dots j_{s+n}}^{i_{r+1} \dots i_{r+m}} + B_{j_{s+1} \dots j_{s+n}}^{i_{r+1} \dots i_{r+m}}) &= \\ &= C_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} A_{j_{s+1} \dots j_{s+n}}^{i_{r+1} \dots i_{r+m}} + C_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} B_{j_{s+1} \dots j_{s+n}}^{i_{r+1} \dots i_{r+m}}.\end{aligned}$$

В силу (3.2) множество скалярных полей $K = T_{(0,0)}$ (или просто множество числовых функций) замкнуто относительно тензорного умножения \otimes , которое здесь совпадает с обычным умножением функций. Множество K является коммутативным кольцом (см. [3]) с единицей, роль единичного элемента 1 играет константная функция, равная единице во всех точках пространства \mathbb{E} .

Положим $m = n = 0$ в формуле (3.2). В этом случае она описывает умножение тензорных полей из $T_{(r,s)}$ на числовые функции из кольца K . Тензорное произведение поля \mathbf{A} и скалярного поля $\xi \in K$ коммутативно: $\mathbf{A} \otimes \xi = \xi \otimes \mathbf{A}$. Поэтому для умножения тензорных полей на числовые функции используется значок обычного умножения: $\xi \otimes \mathbf{A} = \xi \cdot \mathbf{A}$. Операции сложения и умножения на скалярные поля в множестве

$T_{(r,s)}$ обладают следующими свойствами:

- (1) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$;
- (2) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$;
- (3) существует поле $\mathbf{0} \in T_{(r,s)}$, такое, что $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$ для любого тензорного поля $\mathbf{A} \in T_{(r,s)}$;
- (4) для всякого тензорного поля $\mathbf{A} \in T_{(r,s)}$ существует противоположное поле \mathbf{A}' , такое, что $\mathbf{A} + \mathbf{A}' = \mathbf{0}$;
- (5) $\xi \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \xi \cdot \mathbf{A} + \xi \cdot \mathbf{B}$ для всякой функции из кольца K и всяких двух полей $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in T_{(r,s)}$;
- (6) $(\xi + \zeta) \cdot \mathbf{A} = \xi \cdot \mathbf{A} + \zeta \cdot \mathbf{A}$ для всякого тензорного поля $\mathbf{A} \in T_{(r,s)}$ и любых двух функций $\xi, \zeta \in K$;
- (7) $(\xi \zeta) \cdot \mathbf{A} = \xi \cdot (\zeta \cdot \mathbf{A})$ для всякого поля $\mathbf{A} \in T_{(r,s)}$ и любых двух функций $\xi, \zeta \in K$;
- (8) $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$ для всякого поля $\mathbf{A} \in T_{(r,s)}$.

Роль нуля в свойстве (3) играет тензорное поле, все компоненты которого равны нулю тождественно. Поле \mathbf{A}' в свойстве (4) можно определить как поле, все компоненты которого отличаются от компонент поля \mathbf{A} сменой знака на противоположный.

Перечисленные свойства (1)-(8) совпадают с аксиомами линейного векторного пространства (см. [1]). Единственное отличие состоит в том, что множество функций K является кольцом, а не полем. Множества, удовлетворяющие аксиомам (1)-(8) для некоторого кольца K , принято называть *модулями над кольцом K* или *K -модулями*. Таким образом, каждое из множеств $T_{(r,s)}$ является модулем над кольцом скалярных функций $K = T_{(0,0)}$.

Кольцо $K = T_{(0,0)}$ содержит в себе подмножество константных функций, которое естественным образом отождествляется с множеством чисел \mathbb{R} . Поэтому множество тензорных полей $T_{(r,s)}$ в пространстве \mathbb{E} является линейным векторным пространством над полем \mathbb{R} .

Если $r \geq 1$ и $s \geq 1$, то на множестве $T_{(r,s)}$ определены операции свертки по различным парам индексов. Эти операции

линейны, то есть выполнены соотношения:

$$\begin{aligned} C(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= C(\mathbf{A}) + C(\mathbf{B}), \\ C(\xi \cdot \mathbf{A}) &= \xi \cdot C(\mathbf{A}). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Соотношения (3.4) доказываются непосредственным вычислением в компонентах. Для поля $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ из (2.5) имеем:

$$\begin{aligned} H_{j_1 \dots j_{s-1}}^{i_1 \dots i_{r-1}} &= \sum_{k=1}^3 C_{j_1 \dots j_{n-1} k j_n \dots j_{s-1}}^{i_1 \dots i_{m-1} k i_m \dots i_{r-1}} = \\ &= \sum_{k=1}^3 A_{j_1 \dots j_{n-1} k j_n \dots j_{s-1}}^{i_1 \dots i_{m-1} k i_m \dots i_{r-1}} + \sum_{k=1}^3 B_{j_1 \dots j_{n-1} k j_n \dots j_{s-1}}^{i_1 \dots i_{m-1} k i_m \dots i_{r-1}}, \end{aligned}$$

что доказывает первое соотношение (3.4). Для доказательства второго положим $\mathbf{C} = \xi \cdot \mathbf{A}$. Тогда второе соотношение (3.4) получается в результате следующих вычислений:

$$\begin{aligned} H_{j_1 \dots j_{s-1}}^{i_1 \dots i_{r-1}} &= \sum_{k=1}^3 C_{j_1 \dots j_{n-1} k j_n \dots j_{s-1}}^{i_1 \dots i_{m-1} k i_m \dots i_{r-1}} = \\ &= \sum_{k=1}^3 \xi A_{j_1 \dots j_{n-1} k j_n \dots j_{s-1}}^{i_1 \dots i_{m-1} k i_m \dots i_{r-1}} = \xi \sum_{k=1}^3 A_{j_1 \dots j_{n-1} k j_n \dots j_{s-1}}^{i_1 \dots i_{m-1} k i_m \dots i_{r-1}}. \end{aligned}$$

Результат тензорного умножения двух тензоров из $T_{(r,s)}$ принадлежит $T_{(r,s)}$ лишь в случае $r = s = 0$ (см. формулу (3.2)). Во всех остальных случаях тензоры нельзя перемножать оставаясь в пределах одного K -модуля $T_{(r,s)}$. Для того, чтобы снять такое ограничение рассматривают прямую сумму:

$$T = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \bigoplus_{s=0}^{\infty} T_{(r,s)}. \quad (3.5)$$

Множество (3.5) состоит из формальных конечных сумм вида

$\mathbf{A}^{(1)} + \dots + \mathbf{A}^{(k)}$, где каждое слагаемое принадлежит какому-то из K -модулей $T_{(r,s)}$. Тензорное произведение распространяется на множество K -модуль T по формуле:

$$(\mathbf{A}^{(1)} + \dots + \mathbf{A}^{(k)}) \otimes (\mathbf{A}^{(1)} + \dots + \mathbf{A}^{(q)}) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^q \mathbf{A}^{(i)} \otimes \mathbf{A}^{(j)}.$$

Такое расширение операции тензорного умножения является билинейной бинарной операцией на множестве T :

- (9) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{C}$;
- (10) $(\xi \cdot \mathbf{A}) \otimes \mathbf{C} = \xi \cdot (\mathbf{A} \otimes \mathbf{C})$;
- (11) $\mathbf{C} \otimes (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{C} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{C} \otimes \mathbf{B}$;
- (12) $\mathbf{C} \otimes (\xi \cdot \mathbf{B}) = \xi \cdot (\mathbf{C} \otimes \mathbf{B})$.

Эти свойства операции тензорного умножения на T легко выводятся из (3.3). Отметим, что K -модуль, оснащенный дополнительной билинейной бинарной операцией умножения принято называть *алгеброй над кольцом K* или просто *K -алгеброй*. Поэтому множество T называют *алгеброй тензорных полей*.

Алгебра T является прямой суммой отдельных K -модулей $T_{(r,s)}$ в форме (3.5). Операция умножения согласована с таким разложением в прямую сумму, что выражается соотношением (3.2). Подобные структуры в алгебрах называются *градуировками*, а сами такие алгебры называются *градуированными алгебрами*.

§ 4. Симметрирование и альтернирование.

Пусть \mathbf{A} — тензорное поле типа (r, s) и пусть $r \geq 2$. Число верхних индексов в компонентах поля \mathbf{A} больше двух. Поэтому мы можем организовать перестановку каких-либо двух из этих верхних индексов. Положим

$$B_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_m \dots i_n \dots i_r} = A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_n \dots i_m \dots i_r}. \quad (4.1)$$

Величины $B_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ в (4.1) получены из компонент тензорного поля \mathbf{A} перестановкой пары верхних индексов i_m и i_n .

ТЕОРЕМА 4.1. *Величины $B_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$, получающиеся из компонент тензорного поля \mathbf{A} перестановкой любой пары верхних индексов, определяют тензорное поле \mathbf{B} того же типа, что и исходное поле \mathbf{A} .*

ДОК-ВО. Для доказательства теоремы проверим выполнение правила преобразования компонент тензорного поля (1.7) при замене системы координат для величин (4.1):

$$B_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \sum_{\substack{p_1 \dots p_r \\ q_1 \dots q_s}} S_{p_1}^{i_1} \dots S_{p_m}^{i_m} \dots S_{p_n}^{i_n} \dots S_{p_r}^{i_r} T_{j_1}^{q_1} \dots T_{j_s}^{q_s} \tilde{A}_{q_1 \dots q_s}^{p_1 \dots p_r}.$$

Произведем переобозначение индексов суммирования p_m и p_n в этой формуле: заменим индекс p_m на p_n , а индекс p_n , наоборот, заменим на p_m . Это позволит расположить компоненты матриц S в порядке возрастания нумерации их верхних и нижних индексов, но приведет к перестановке индексов p_m и p_n в компонентах тензорного поля \mathbf{A} . Такая операция переобозначения индексов суммирования не меняет значения суммы:

$$B_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \sum_{\substack{p_1 \dots p_r \\ q_1 \dots q_s}} S_{p_1}^{i_1} \dots S_{p_r}^{i_r} T_{j_1}^{q_1} \dots T_{j_s}^{q_s} \tilde{A}_{q_1 \dots q_s}^{p_1 \dots p_n \dots p_m \dots p_r}.$$

В силу равенства $\tilde{B}_{q_1 \dots q_s}^{p_1 \dots p_r} = \tilde{A}_{q_1 \dots q_s}^{p_1 \dots p_n \dots p_m \dots p_r}$ полученная формула есть в точности правило преобразования (1.7) для компонент поля \mathbf{B} . Теорема доказана. \square

Аналогичная теорема имеет место для перестановок нижних индексов. Пусть вновь \mathbf{A} — тензорное поле типа (r, s) и пусть $s \geq 2$. Положим

$$B_{j_1 \dots j_m \dots j_n \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = A_{j_1 \dots j_n \dots j_m \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}. \quad (4.2)$$

ТЕОРЕМА 4.2. *Величины $B_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$, получающиеся из компонент тензорного поля \mathbf{A} перестановкой любой пары нижних индексов, определяют тензорное поле \mathbf{B} того же типа, что и исходное поле \mathbf{A} .*

Доказательство теоремы 4.2 полностью аналогично доказательству теоремы 4.1. Поэтому мы его не приводим. Отметим, что перестановка нижнего и верхнего индексов недопустима. Полученный при такой перестановке набор величин нарушает правило преобразования (1.7).

Комбинируя различные парные перестановки индексов (4.1) и (4.2) мы можем получить любую перестановку из симметрической группы \mathfrak{S}_r для верхних индексов и любую перестановку из группы \mathfrak{S}_s для нижних индексов. Это известный факт из алгебры (см. [3]). Таким образом, результат теорем 4.1 и 4.2 задает действие групп \mathfrak{S}_r и \mathfrak{S}_s на K -модуле $T_{(r,s)}$, состоящем из тензорных полей типа (r, s) . Это действие обладает свойством линейности, то есть

$$\begin{aligned} \sigma \circ \tau(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \sigma \circ \tau(\mathbf{A}) + \sigma \circ \tau(\mathbf{B}), \\ \sigma \circ \tau(\xi \cdot \mathbf{A}) &= \xi \cdot (\sigma \circ \tau(\mathbf{A})), \end{aligned} \quad (4.3)$$

для произвольных двух перестановок $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ и $\tau \in \mathfrak{S}_s$. При записи в компонентах соотношение $\mathbf{B} = \sigma \circ \tau(\mathbf{A})$ выглядит так:

$$B_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = A_{j_{\tau(1)} \dots j_{\tau(s)}}^{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(r)}}, \quad (4.4)$$

где числа $\sigma(1), \dots, \sigma(r)$ и $\tau(1), \dots, \tau(s)$ получаются при действии σ и τ на числа $1, \dots, r$ и $1, \dots, s$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Скажем, что тензорное поле \mathbf{A} типа (r, s) *симметрично* относительно перестановки m -го и n -го верхних (или нижних) индексов, если выполнено соотношение

$\sigma(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$, где σ — операция перестановки индексов, заданная формулой (4.1) или (4.2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Скажем, что тензорное поле \mathbf{A} типа (r, s) *кососимметрично* относительно перестановки m -го и n -го верхних (или нижних) индексов, если выполнено соотношение $\sigma(\mathbf{A}) = -\mathbf{A}$, где σ — операция перестановки индексов, заданная формулой (4.1) или (4.2).

Понятия симметричности и кососимметричности тензоров можно распространить на произвольные (не обязательно парные перестановки). Пусть $\varepsilon = \sigma \circ \tau$ — некоторая перестановка верхних и нижних индексов из (4.3). Ее естественно трактовать как элемент прямого произведения двух симметрических групп: $\varepsilon \in \mathfrak{S}_r \times \mathfrak{S}_s$ (см. [3]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Скажем, что тензорное поле \mathbf{A} типа (r, s) *симметрично* или *кососимметрично* относительно перестановки $\varepsilon \in \mathfrak{S}_r \times \mathfrak{S}_s$, если выполнено одно из соотношений: $\varepsilon(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$ или $\varepsilon(\mathbf{A}) = (-1)^\varepsilon \cdot \mathbf{A}$.

Если поле \mathbf{A} симметрично относительно перестановок ε_1 и ε_2 , то оно симметрично и относительно их композиции и относительно обратных перестановок ε_1^{-1} и ε_2^{-1} . Поэтому всегда симметричность имеет место относительно всех перестановок из некоторой подгруппы $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}_r \times \mathfrak{S}_s$. То же самое справедливо и для кососимметричности.

Пусть $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}_r \times \mathfrak{S}_s$ — некоторая подгруппа в прямом произведении симметрических групп и пусть \mathbf{A} — некоторое тензорное поле из $T_{(r,s)}$. Тогда переход от \mathbf{A} к полю \mathbf{B} по формуле

$$\mathbf{B} = \frac{1}{|\mathfrak{G}|} \sum_{\varepsilon \in \mathfrak{G}} \varepsilon(\mathbf{A}) \quad (4.5)$$

называется *симметрированием* тензорного поля \mathbf{A} по \mathfrak{G} . Ана-

логичным образом, переход от \mathbf{A} к \mathbf{B} по формуле

$$\mathbf{B} = \frac{1}{|\mathfrak{G}|} \sum_{\varepsilon \in \mathfrak{G}} (-1)^\varepsilon \cdot \varepsilon(\mathbf{A}) \quad (4.6)$$

называется *альтернированием* тензорного поля \mathbf{A} по подгруппе \mathfrak{G} . Операции симметрирования и альтернирования линейны, что вытекает из (4.3). В результате симметрирования получается поле \mathbf{B} , симметричное относительно \mathfrak{G} , а в результате альтернирования — кососимметричное относительно этой подгруппы. В случае $\mathfrak{G} = \mathfrak{S}_r \times \mathfrak{S}_s$ операция (4.5) называется *полным симметрированием*, а операция (4.6) — *полным альтернированием*.

§ 5. Дифференцирование тензорных полей.

Класс гладкости тензорного поля \mathbf{A} в пространстве \mathbb{E} определяется определяется классом гладкости его компонент.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Тензорное поле \mathbf{A} называется *m -кратно непрерывно дифференцируемым полем* или *полем класса C^m* , если все его компоненты в некоторой декартовой системе координат являются m -кратно непрерывно дифференцируемыми функциями.

Поля класса C^1 часто для краткости называют просто *дифференцируемыми тензорными полями*, а поля класса C^∞ называют *гладкими тензорными полями*. Отметим, что в силу формулы (1.7) выбор той или иной декартовой системы координат не влияет на класс гладкости поля \mathbf{A} в определении 5.1. Компоненты поля класса C^m являются функциями класса C^m в любой декартовой системе координат. Это доказывает корректность определения 5.1.

Рассмотрим дифференцируемое тензорное поле типа (r, s) и

образуем всевозможные производные из его компонент:

$$B_{j_1 \dots j_s j_{s+1}}^{i_1 \dots i_r} = \frac{\partial A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial x^{j_{s+1}}}. \quad (5.1)$$

Число таких производных (5.1) одинаково во всех декартовых системах координат. Оно совпадает с числом компонент в тензорах типа $(r, s + 1)$. Такое совпадение не случайно.

ТЕОРЕМА 5.1. *Производные компонент дифференцируемого тензорного поля \mathbf{A} типа (r, s) , вычисленные в произвольной декартовой системе координат по формуле (5.1), являются компонентами некоторого тензорного поля \mathbf{B} типа $(r, s + 1)$.*

ДОК-ВО. Доказательство теоремы состоит в проверке правила (1.7) для величин $B_{j_1 \dots j_s j_{s+1}}^{i_1 \dots i_r}$ в формуле (5.1). Пусть $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и $O', \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ — две декартовые системы координат. Пусть по традиции S и T — матрицы прямого и обратного перехода. Выпишем первое соотношение (1.7) для поля \mathbf{A} и продифференцируем обе части в нем по переменной $x^{j_{s+1}}$:

$$\frac{\partial A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(\mathbf{x})}{\partial x^{j_{s+1}}} = \sum_{\substack{p_1 \dots p_r \\ q_1 \dots q_s}} S_{p_1}^{i_1} \dots S_{p_r}^{i_r} T_{j_1}^{q_1} \dots T_{j_s}^{q_s} \frac{\partial \tilde{A}_{q_1 \dots q_s}^{p_1 \dots p_r}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x^{j_{s+1}}}$$

Для вычисления производной в правой части этой формулы используем правило дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial \tilde{A}_{q_1 \dots q_s}^{p_1 \dots p_r}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x^{j_{s+1}}} = \sum_{q_{s+1}=1}^3 \frac{\partial \tilde{x}^{q_{s+1}}}{\partial x^{j_{s+1}}} \frac{\partial \tilde{A}_{q_1 \dots q_s}^{p_1 \dots p_r}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial \tilde{x}^{q_{s+1}}}. \quad (5.2)$$

Связь между переменными $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ и $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)$ дается соотношениями:

$$x^i = \sum_{j=1}^3 S_j^i \tilde{x}^j + a^i, \quad \tilde{x}^i = \sum_{j=1}^3 T_j^i x^j + \tilde{a}^i,$$

одно из которых входит в состав формулы (1.7), а второе является обращением первого. Компоненты матриц S и T в этих формулах являются константами, поэтому

$$\frac{\partial \tilde{x}^{q_{s+1}}}{\partial x^{j_{s+1}}} = T_{j_{s+1}}^{q_{s+1}}. \quad (5.3)$$

Подставим (5.3) в (5.2), после чего подставим результат в полученное выше выражение для производных $\partial A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} / \partial x^{j_{s+1}}$. Это приводит к соотношению:

$$B_{j_1 \dots j_s j_{s+1}}^{i_1 \dots i_r} = \sum_{\substack{p_1 \dots p_r \\ q_1 \dots q_{s+1}}} S_{p_1}^{i_1} \dots S_{p_r}^{i_r} T_{j_1}^{q_1} \dots T_{j_{s+1}}^{q_{s+1}} \tilde{B}_{q_1 \dots j_{s+1}}^{p_1 \dots p_r},$$

которое в точности совпадает с правилом преобразования (1.7) для компонент поля \mathbf{B} из (5.1). Теорема доказана. \square

Переход от \mathbf{A} к \mathbf{B} в (5.1) добавляет один ковариантный индекс j_{s+1} . Видимо, поэтому тензорное поле \mathbf{B} называют *ковариантным дифференциалом* поля \mathbf{A} . Ковариантный дифференциал обозначают так: $\mathbf{B} = \nabla \mathbf{A}$. Перевернутый значок треугольника ∇ — это специальный символ, который называется *набла*. При записи компонент тензора \mathbf{B} дополнительный ковариантный индекс располагают рядом со значком ∇ :

$$B_{j_1 \dots j_s k}^{i_1 \dots i_r} = \nabla_k A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}. \quad (5.4)$$

В силу (5.1) значок ∇_k в формуле (5.4) заменяет оператор дифференцирования: $\nabla_k = \partial / \partial x^k$. Однако, для ∇_k зарезервировано специальное название, его называют оператором *ковариантного дифференцирования* или *ковариантной производной*. Несколько позже (в главе III) мы увидим, что понятие ковариантной производной может быть расширено так, что оно перестанет совпадать с обычной производной.

Пусть \mathbf{A} — некоторое дифференцируемое тензорное поле типа (r, s) и пусть \mathbf{X} — некоторое произвольное векторное поле. Рассмотрим тензорное произведение $\nabla \mathbf{A} \otimes \mathbf{X}$. Это тензорное поле типа $(r + 1, s + 1)$. Ковариантное дифференцирование добавляет один ковариантный индекс, а тензорное умножение на \mathbf{X} добавляет еще один контравариантный индекс. Обозначим через $\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{A} = C(\nabla \mathbf{A} \otimes \mathbf{X})$ свертку тензорного поля $\nabla \mathbf{A} \otimes \mathbf{X}$ по этой паре дополнительных индексов. Поле $\mathbf{B} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{A}$ имеет тот же тип (r, s) , что и исходное поле \mathbf{A} . Выбрав некоторую декартову систему координат мы можем записать соотношение $\mathbf{B} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{A}$ в компонентах:

$$B_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \sum_{q=1}^3 X^q \nabla_q A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}. \quad (5.5)$$

Тензорное поле $\mathbf{B} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{A}$ с компонентами (5.5) называется *ковариантной производной поля \mathbf{A} вдоль векторного поля \mathbf{X}* .

ТЕОРЕМА 5.2. *Операция ковариантного дифференцирования тензорных полей обладает следующими свойствами:*

- (1) $\nabla_{\mathbf{X}}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{A} + \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{B}$;
- (2) $\nabla_{\mathbf{X} + \mathbf{Y}} \mathbf{A} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{A} + \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{A}$;
- (3) $\nabla_{\xi \cdot \mathbf{X}} \mathbf{A} = \xi \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{A}$;
- (4) $\nabla_{\mathbf{X}}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{A} \otimes \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{B}$;
- (5) $\nabla_{\mathbf{X}} C(\mathbf{A}) = C(\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{A})$;

где \mathbf{A} и \mathbf{B} — произвольные дифференцируемые тензорные поля, \mathbf{X} и \mathbf{Y} — произвольные векторные поля и ξ — произвольное скалярное поле.

ДОК-ВО. Доказательство теоремы удобно проводить в координатах в некоторой декартовой системе координат. Пусть $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$. Свойство (1) вытекает из соотношения

$$\sum_{q=1}^3 X^q \frac{\partial C_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial x^q} = \sum_{q=1}^3 X^q \frac{\partial A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial x^q} + \sum_{q=1}^3 X^q \frac{\partial B_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial x^q}.$$

Положим $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + \mathbf{Y}$ и выведем свойство (2) из соотношения

$$\sum_{q=1}^3 Z^q \nabla_q A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \sum_{q=1}^3 X^q \nabla_q A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} + \sum_{q=1}^3 Y^q \nabla_q A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}.$$

Для доказательства свойства (3) положим $\mathbf{Z} = \xi \cdot \mathbf{X}$. Тогда

$$\sum_{q=1}^3 Z^q \nabla_q A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \xi \sum_{q=1}^3 X^q \nabla_q A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}.$$

Полученное соотношение в точности эквивалентно свойству (3) из условия теоремы.

Для доказательства четвертого свойства в условии теоремы проделаем следующие вычисления:

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^3 X^q \partial / \partial x^q \left(A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} B_{j_{s+1} \dots j_{s+n}}^{i_{r+1} \dots i_{r+m}} \right) &= \left(\sum_{q=1}^3 X^q \frac{\partial A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial x^q} \right) \times \\ &\times B_{j_{s+1} \dots j_{s+n}}^{i_{r+1} \dots i_{r+m}} + A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \left(\sum_{q=1}^3 X^q \frac{\partial B_{j_{s+1} \dots j_{s+n}}^{i_{r+1} \dots i_{r+m}}}{\partial x^q} \right). \end{aligned}$$

И, наконец, следующая серия вычислений

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^3 X^q \frac{\partial}{\partial x^q} \left(\sum_{k=1}^3 A_{j_1 \dots j_{n-1} k j_n \dots j_{s-1}}^{i_1 \dots i_{m-1} k i_m \dots i_{r-1}} \right) &= \\ &= \sum_{k=1}^3 \sum_{q=1}^3 X^q \frac{\partial A_{j_1 \dots j_{n-1} k j_n \dots j_{s-1}}^{i_1 \dots i_{m-1} k i_m \dots i_{r-1}}}{\partial x^q} \end{aligned}$$

доказывает последнее пятое свойство, что завершает доказательство всей теоремы в целом. \square

§ 6. Метрический тензор и псевдотензор объема.

Пусть $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — некоторая декартова система координат в пространстве \mathbb{E} . Пространство \mathbb{E} оснащено скалярным произведением. Поэтому с базисом $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ любой декартовой системы координат связывается матрица Грама:

$$g_{ij} = (\mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j). \quad (6.1)$$

Матрица Грама \mathbf{g} положительно определена и невырождена:

$$\det \mathbf{g} > 0. \quad (6.2)$$

Неравенство (6.2) вытекает из критерия Сильвестра для положительной определенности (см. [1]). При замене одной системы координат на другую величины (6.1) преобразуются как компоненты тензора типа $(0, 2)$. Это позволяет определить тензорное поле \mathbf{g} , компоненты которого в любой декартовой системе координат являются константными функциями, совпадающими с компонентами матрицы Грама:

$$g_{ij}(\mathbf{x}) = g_{ij} = \text{const}.$$

Тензорное поле \mathbf{g} с такими компонентами называется *метрическим тензором*. Метрический тензор является выделенным тензорным полем, его не надо специально задавать. Его существование вытекает из самой геометрии пространства \mathbb{E} .

Невырожденность матрицы Грама \mathbf{g} позволяет определить матрицу $\hat{\mathbf{g}} = \mathbf{g}^{-1}$. Компоненты такой матрицы обозначим g^{ij} , поместив индексы i и j наверху. Тогда

$$\sum_{j=1}^3 g^{ij} g_{jk} = \delta_j^i. \quad (6.3)$$

ТЕОРЕМА 6.1. *Компоненты обратной матрицы Грама $\hat{\mathbf{g}}$ при замене системы координат преобразуются как компоненты тензорного поля типа $(2, 0)$.*

Док-во. Запишем правило (1.7) преобразования компонент тензора применительно к метрическому тензору \mathbf{g} :

$$g_{ij} = \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 T_i^p T_j^q \tilde{g}_{pq}.$$

В матричной форме это же соотношение записывается так:

$$\mathbf{g} = T^{\text{tr}} \tilde{\mathbf{g}} T. \quad (6.4)$$

Используя невырожденность матриц \mathbf{g} , $\tilde{\mathbf{g}}$ и матрицы перехода T , перейдем к обратным матрицам:

$$\mathbf{g}^{-1} = (T^{\text{tr}} \tilde{\mathbf{g}} T)^{-1} = S \tilde{\mathbf{g}}^{-1} S^{\text{tr}}. \quad (6.5)$$

Теперь остается записать полученное соотношение обратно в компонентах, что дает

$$g^{ij} = \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 S_p^i S_q^j \tilde{g}^{pq}. \quad (6.6)$$

Соотношение (6.6) — это в точности правило преобразования компонент (1.7) для тензорного поля типа $(2, 0)$. Тем самым, теорема доказана. \square

Тензорное поле $\hat{\mathbf{g}} = \mathbf{g}^{-1}$ с компонентами g^{ij} называется *обратным метрическим тензором* или *дуальным метрическим тензором*. Существование обратного метрического тензора также вытекает из самой природы пространства \mathbf{E} , в котором имеется скалярное произведение.

Тензорные поля \mathbf{g} и $\hat{\mathbf{g}}$ симметричны. Симметричность g_{ij} по паре индексов i и j вытекает из (6.1) и свойств скалярного произведения. Но матрица, обратная симметричной, также симметрична, поэтому компоненты обратного метрического тензора g^{ij} симметричны по паре индексов i и j .

Компоненты тензоров \mathbf{g} и $\hat{\mathbf{g}}$ в любой декартовой системе координат являются константами. Поэтому

$$\nabla \mathbf{g} = 0, \quad \nabla \hat{\mathbf{g}} = 0, \quad (6.7)$$

что вытекает из общей формулы (5.1) для компонент ковариантного дифференциала в декартовой системе координат.

В курсе аналитической геометрии (см., например, [4]) рассматривается индексный объект ε_{ijk} , называемый символом Леви-Чивита. Его ненулевые компоненты определяются четностью перестановки индексов (ijk) :

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon^{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{при } i = j, i = k \text{ или } j = k, \\ 1 & \text{когда } \text{sign}(ijk) = 1, \\ -1 & \text{когда } \text{sign}(ijk) = -1. \end{cases} \quad (6.8)$$

Напомним, что символ Леви-Чивита (6.8) используется для вычисления векторного и смешанного произведения векторов по их координатам в декартовой прямоугольной системе координат с ортонормированным правым базисом $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:

$$\begin{aligned} [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \left(\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} X^j Y^k \right), \\ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} X^i Y^j Z^k. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Использование нижних или верхних индексов при записи компонент символа Леви-Чивита в (6.8) и (6.9) не имеет никакого значения, ибо они не задают никакого тензора. Однако,

с символом Леви-Чивита связан некоторый объект, имеющий тензорную природу. Для построения такого объекта вспомним одно соотношение, доказанное в аналитической геометрии:

$$\sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{pql} M_{ip} M_{jq} M_{kl} = \det \mathbf{M} \varepsilon_{ijk} \quad (6.10)$$

(доказательство см. в [4]). Здесь \mathbf{M} — некоторая квадратная матрица размера 3×3 . Матрица \mathbf{M} может совпадать с матрицей из компонент тензорного поля типа $(2, 0)$, $(1, 1)$ или $(0, 2)$, но может быть и просто матрицей. Соотношение (6.10) от этого обстоятельства не зависит.

Используя символ Леви-Чивита и матрицу метрического тензора \mathbf{g} в некоторой декартовой системе координат построим следующий набор величин:

$$\omega_{ijk} = \sqrt{\det \mathbf{g}} \varepsilon_{ijk}. \quad (6.11)$$

Выясним связь между величинами ω_{ijk} в различных декартовых системах координат $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и $O', \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$. Используя формулу (6.10), преобразуем следующую сумму:

$$\sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 \sum_{l=1}^3 T_i^p T_j^q T_k^l \tilde{\omega}_{pql} = \sqrt{\det \tilde{\mathbf{g}}} \det T \varepsilon_{ijk}. \quad (6.12)$$

Для дальнейшего преобразования суммы (6.12) используем соотношение (6.4), немедленным следствием которого является формула $\det \mathbf{g} = (\det T)^2 \det \tilde{\mathbf{g}}$. Ее использование дает:

$$\sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 \sum_{l=1}^3 T_i^p T_j^q T_k^l \tilde{\omega}_{pql} = \text{sign}(\det T) \sqrt{\det \mathbf{g}} \varepsilon_{ijk}. \quad (6.13)$$

Заметим, что правая часть соотношения (6.13) отличается от величин ω_{ijk} в (6.11) лишь знаком детерминанта матрицы перехода: $\text{sign}(\det T) = \text{sign}(\det S) = \pm 1$. Перепишем полученное соотношение (6.13) в виде:

$$\omega_{ijk} = \text{sign}(\det S) \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 \sum_{l=1}^3 T_i^p T_j^q T_k^l \tilde{\omega}_{pql}. \quad (6.14)$$

Соотношение (6.14) отличается от правила преобразования (1.6) для компонент тензора типа $(0, 3)$, хотя это отличие лишь в знаке $\text{sign}(\det S)$. Формула (6.14) дает основание для модификации правила (1.6):

$$F_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \sum_{\substack{p_1 \dots p_r \\ q_1 \dots q_s}} (-1)^S S_{p_1}^{i_1} \dots S_{p_r}^{i_r} T_{j_1}^{q_1} \dots T_{j_s}^{q_s} \tilde{F}_{q_1 \dots q_s}^{p_1 \dots p_r}, \quad (6.15)$$

где $(-1)^S = \text{sign}(\det S) = \pm 1$. Соответствующая модификация понятия тензора дается следующим определением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Псевдотензором типа (r, s) называется геометрический объект \mathbf{F} , компоненты которого в произвольном базисе нумеруются $(r + s)$ индексами и при замене базиса преобразуются по правилу (6.15).

Задав псевдотензор типа (r, s) в каждой точке пространства \mathbb{E} мы получим псевдотензорное поле типа (r, s) . В силу сформулированного определения 6.1 и формулы (6.14) величины ω_{ijk} из (6.11) задают псевдотензорное поле ω типа $(0, 3)$. Это поле называется *псевдотензором объема*. Подобно метрическим тензорам \mathbf{g} и $\hat{\mathbf{g}}$, псевдотензор объема является выделенным полем в пространстве \mathbb{E} , которое не нужно специально задавать. Его существование вытекает из наличия скалярного произведения в пространстве \mathbb{E} .

§ 7. Свойства псевдотензорных полей.

Псевдотензоры и псевдотензорные поля являются близко родственными объектами для тензоров и тензорных полей. В этом параграфе мы повторим большинство результатов предыдущих параграфов применительно к псевдотензорам. Доказательства этих результатов практически не отличаются от соответствующих доказательств в чисто тензорном случае. Поэтому их мы не приводим.

Пусть \mathbf{A} и \mathbf{B} — два псевдотензорных поля типа (r, s) . Тогда формула (3.1) определяет третье поле $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, которое также оказывается псевдотензорным полем типа (r, s) . Важно отметить, что покомпонентное сложение тензорного поля \mathbf{A} с псевдотензорным полем \mathbf{B} по формуле (3.1) не является корректной операцией. Сумму $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ таких полей можно понимать только как формальную сумму типа (3.5).

Формула (2.2) для тензорного умножения оказывается более универсальной. Она определяет произведение поля \mathbf{A} типа (r, s) с полем \mathbf{B} типа (m, n) . При этом каждое из полей может быть как тензорным, так и псевдотензорным полем. У тензорного умножения имеются следующие свойства:

- (1) тензорное произведение двух тензорных полей есть тензорное поле;
- (2) тензорное произведение двух псевдотензорных полей есть тензорное поле;
- (3) тензорное произведение тензорного и псевдотензорного полей есть псевдотензорное поле.

Обозначим через $P_{(r,s)}$ множество псевдотензорных полей типа (r, s) . В силу свойств (1)-(3) и соотношений дистрибутивности (3.3), которые остаются в силе и для псевдотензорных полей, множество $P_{(r,s)}$ является модулем над кольцом скалярных полей $K = T_{(0,0)}$. Сами же свойства (1)-(3) можно

изобразить в форме соотношений:

$$\begin{aligned}
 T_{(r,s)} \times T_{(m,n)} &\rightarrow T_{(r+m,s+n)}, \\
 P_{(r,s)} \times P_{(m,n)} &\rightarrow T_{(r+m,s+n)}, \\
 T_{(r,s)} \times P_{(m,n)} &\rightarrow P_{(r+m,s+n)}, \\
 P_{(r,s)} \times T_{(m,n)} &\rightarrow P_{(r+m,s+n)},
 \end{aligned}
 \tag{7.1}$$

которые обобщают соотношение (3.2) из параграфа § 3.

Формула (2.5) определяет свертку поля \mathbf{F} типа (r, s) , для которого $r \geq 1$ и $s \geq 1$. Операция свертки (2.5) применима как к тензорному, так и к псевдотензорному полю. При этом

- (1) свертка тензорного поля есть тензорное поле,
- (2) свертка псевдотензорного поля есть псевдотензорное поле.

Операция свертки в случае псевдотензорных полей сохраняет свойство линейности (3.4).

Ковариантное дифференцирование псевдотензорных полей в декартовой системе координат определяется формулой (5.1). Ковариантный дифференциал $\nabla \mathbf{A}$ тензорного поля \mathbf{A} есть тензорное поле, а ковариантный дифференциал псевдотензорного поля \mathbf{A} есть псевдотензорное поле. Свойства ковариантного дифференциала удобно выражать через свойства ковариантной производной $\nabla_{\mathbf{X}}$ в направлении поля \mathbf{X} , где \mathbf{X} теперь может быть как векторным, так и псевдовекторным полем. Все утверждения теоремы 5.2 для ковариантной производной $\nabla_{\mathbf{X}}$ остаются в силе.

§ 8. Замечание об ориентации.

Частным случаем псевдотензорных полей являются псевдоскалярные поля. Если скалярные поля — это просто функции от точек пространства \mathbb{E} , то псевдоскалярные поля сохраняют зависимость от выбора системы координат, хотя и достаточно

слабую. Пусть ξ — псевдоскалярное поле. При фиксированном выборе декартовой системы координат поле ξ изображается функцией $\xi(P)$, где $P \in E$. Значение такой функции ξ в точке P не меняется, если мы переходим в систему координат с той же ориентацией, что и исходная система координат, то есть если матрица перехода S имеет положительный детерминант. При переходе же в систему координат с противоположной ориентацией функция ξ меняется на противоположную: $\xi(P) \rightarrow -\xi(P)$. Рассмотрим ненулевое константное псевдотензорное поле ξ . В одних системах координат $\xi = c = \text{const}$, а в других — $\xi = -c = \text{const}$. Значение константы c без ограничения общности можно считать равным единице. Такое псевдоскалярное поле ξ позволяет отличать системы координат с одной ориентацией $\xi = 1$ от систем координат с противоположной ориентацией, где $\xi = -1$.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Задание единичного константного псевдоскалярного поля ξ эквивалентно заданию ориентации в пространстве \mathbb{E} .

С чисто математической точки зрения пространство \mathbb{E} , как трехмерное евклидово точечное пространство (см. определение в [1]) не имеет выделенной ориентации. Однако, реальное физическое пространство \mathbb{E} (в котором мы живем) такую выделенную ориентацию имеет. В нем мы можем отличать левую руку от правой. Это отличие не является чисто формальным: левое полушарие головного мозга несколько отличается от правого по своим функциям, в органических веществах природного происхождения наблюдается преобладание одних изомеров над другими, отличающимися лишь зеркальной симметрией. Число левшей и правшей также отличается от соотношения 50 на 50. Такая асимметрия между правым и левым имеется и в микромире, что находит свое отражение в современных теориях строения элементарных частиц. Таким

образом, мы можем считать пространство \mathbb{E} оснащенным некоторым псевдоскалярным полем ξ_E , значения которого можно находить по следующей формуле:

$$\xi_E = \begin{cases} 1 & \text{в правоориентированной системе координат,} \\ -1 & \text{в левоориентированной системе координат.} \end{cases}$$

Умножение на ξ_E переводит тензорное поле \mathbf{A} в псевдотензорное поле $\xi_E \otimes \mathbf{A} = \xi_E \cdot \mathbf{A}$. Еще одно умножение на ξ_E переводит $\xi_E \cdot \mathbf{A}$ обратно в поле \mathbf{A} . Поэтому в пространстве \mathbb{E} , оснащенном выделенной ориентацией в форме поля ξ_E можно вообще не рассматривать псевдотензоры, ограничившись лишь тензорами. Компоненты тензора объема ω в таком пространстве следует задавать формулой:

$$\omega_{ijk} = \xi_E \sqrt{\det \mathbf{g}} \varepsilon_{ijk}. \quad (8.1)$$

Пусть \mathbf{X} и \mathbf{Y} — два векторных поля. Определим векторное поле \mathbf{Z} со следующими компонентами:

$$Z^q = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 g^{ki} \omega_{ijk} X^j Y^k. \quad (8.2)$$

Из (8.2) нетрудно видеть, что \mathbf{Z} получается как свертка поля $\hat{\mathbf{g}} \otimes \omega \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$. В декартовой прямоугольной правоориентированной системе координат формула (8.2) переходит в известную формулу для компонент векторного произведения $\mathbf{Z} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ (см. [4] и формулу (6.9) выше). В пространстве без выделенной ориентации, где ω_{ijk} определяется формулой (6.11), векторное произведение двух векторов есть псевдовектор.

Теперь рассмотрим три векторных поля \mathbf{X} , \mathbf{Y} и \mathbf{Z} и построим скалярное поле u по формуле:

$$u = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \omega_{ijk} X^i Y^j Z^k. \quad (8.3)$$

Записав (8.3) в декартовой прямоугольной системе координат, Нетрудно увидеть, что поле (8.3) совпадает со смешанным произведением векторов $(\mathbf{X}, \mathbf{YZ})$ (см. [4] и формулу (6.9) выше). В пространстве без выделенной ориентации смешанное произведение трех векторных полей, определяемое по псевдотензору объема (6.11), оказывается лишь псевдоскалярным полем.

§ 9. Поднятие и опускание индексов.

Пусть \mathbf{A} — тензорное либо псевдотензорное поле типа (r, s) в пространстве \mathbb{E} и пусть $r \geq 1$. Образует тензорное произведение $\mathbf{A} \otimes \mathbf{g}$ поля A с метрическим тензором \mathbf{g} и определим поле \mathbf{B} типа $(r-1, s+1)$ как свертку $C(\mathbf{A} \otimes \mathbf{g})$:

$$B_{j_1 \dots j_{s+1}}^{i_1 \dots i_{r-1}} = \sum_{k=1}^3 A_{j_1 \dots j_{n-1} j_{n+1} \dots j_{s+1}}^{i_1 \dots i_{m-1} k i_m \dots i_{r-1}} g_{kj_n}. \quad (9.1)$$

Переход от поля \mathbf{A} к полю \mathbf{B} по формуле (9.1) называется *опусканием m -го верхнего индекса в n -ую нижнюю позицию*.

Использование обратного метрического тензора позволяет обратить операцию (9.1). Пусть \mathbf{B} — тензорное либо псевдотензорное поле типа (r, s) и пусть $s \geq 1$. Определим поле $\mathbf{A} = C(\mathbf{B} \otimes \hat{\mathbf{g}})$ типа $(r+1, s-1)$ по формуле:

$$A_{j_1 \dots j_{s-1}}^{i_1 \dots i_{r+1}} = \sum_{q=1}^3 B_{j_1 \dots j_{n-1} q j_n \dots j_{s-1}}^{i_1 \dots i_{m-1} i_m+1 \dots i_{r+1}} g^{qi_m}. \quad (9.2)$$

Переход от поля \mathbf{B} к полю \mathbf{A} по формуле (9.2) называется *поднятием n -го нижнего индекса в m -ую верхнюю позицию*.

Операции опускания и поднятия индексов являются обратными друг для друга. Действительно:

$$C_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \sum_{q=1}^3 \sum_{k=1}^3 A_{j_1 \dots j_{n-1} j_n \dots j_s}^{i_1 \dots i_{m-1} k i_m+1 \dots i_r} g_{kq} g^{qi_m} =$$

$$= \sum_{k=1}^3 A_{j_1 \dots j_{n-1} j_n \dots j_s}^{i_1 \dots i_{m-1} k i_{m+1} \dots i_r} \delta_k^{i_m} = A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}.$$

Проделанные вычисления показывают, что последовательное применение операций опускания индекса и поднятия индекса $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$ приводит к полю $\mathbf{C} = \mathbf{A}$. Выполнение этих операций в переставленном порядке приводит к такому же результату, что вытекает из следующих выкладок:

$$\begin{aligned} C_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} &= \sum_{k=1}^3 \sum_{q=1}^3 A_{j_1 \dots j_{n-1} q j_{n+1} \dots j_s}^{i_1 \dots i_{m-1} i_m \dots i_r} g^{qk} g_{kj_n} = \\ &= \sum_{q=1}^3 A_{j_1 \dots j_{n-1} q j_{n+1} \dots j_s}^{i_1 \dots i_{m-1} i_m \dots i_r} \delta_{i_n}^q = A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}. \end{aligned}$$

Существование операций поднятия и опускания индексов вытекает из самой природы пространства \mathbb{E} , которое оснащено скалярным произведением, а значит, и метрическими тензорами \mathbf{g} и $\hat{\mathbf{g}}$. Поэтому всякое тензорное (или псевдотензорное поле) типа (r, s) в таком пространстве можно считать произошедшим из некоторого чисто ковариантного поля типа $(0, r + s)$ в результате поднятия части индексов. При этом используется несколько иной способ расстановки индексов. В качестве примера рассмотрим поле \mathbf{A} типа $(0, 4)$. Его компоненты в некоторой декартовой системе координат обозначим $A_{i_1 i_2 i_3 i_4}$. В результате поднятия одного индекса из поля \mathbf{A} можно получить четыре поля типа $(1, 3)$. Их компоненты обозначим так:

$$A_{i_2 i_3 i_4}^{i_1}, \quad A_{i_1 i_3 i_4}^{i_2}, \quad A_{i_1 i_2 i_4}^{i_3}, \quad A_{i_1 i_2 i_3}^{i_4}. \quad (9.3)$$

Поднятие одного из индексов в (9.3) обозначается образованием пустого места на его месте в списке нижних индексов, а нумерация индексов верхних и нижних в целом является

сквозной. При таком способе записи у каждого индекса есть «свое место» внизу и наверху. Поэтому в следующей записи легко угадывается способ, при помощи которого получаются компоненты соответствующих тензоров:

$$A^i{}_{j k q}, A^{i j}{}_{k q}, A^i{}_{j^k}{}^q, A_i{}^{j k}{}^q. \quad (9.4)$$

Несмотря на некоторые преимущества формы записи (9.3) и (9.4), она не является общепринятой. Дело в том, что она обладает и рядом недостатков. Например, запись общих формул (1.6), (2.2), (2.5) и некоторых других становится очень громоздкой и неудобной для восприятия. В дальнейшем мы будем использовать прежний способ нумерации индексов, а при поднятии и опускании индексов будем специально оговаривать выбор поднимаемого или опускаемого индекса и место его размещения в записи компонент полученного поля.

§ 10. Градиент, дивергенция и ротор. Некоторые тождества векторного анализа.

Рассмотрим дифференцируемое скалярное поле f или, иными словами, просто функцию f . Применим операцию ковариантного дифференцирования ∇ , определенную в § 5, к полю f . Полученный ковариантный дифференциал ∇f — это ковекторное поле (поле типа $(0, 1)$). Применив операцию поднятия индекса (9.2) к ковекторному полю ∇f , мы получим векторное поле \mathbf{F} с компонентами

$$F^i = \sum_{k=1}^3 g^{ik} \frac{\partial f}{\partial x^k}. \quad (10.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.1. Векторное поле \mathbf{F} в пространстве \mathbb{E} , компоненты которого вычисляются по формуле (10.1), называется *градиентом* функции f . Оно обозначается $\mathbf{F} = \text{grad } f$.

Пусть \mathbf{X} — некоторое векторное поле в \mathbb{E} . Рассмотрим скалярное произведение векторных полей \mathbf{X} и $\text{grad } f$. В силу формулы (10.1) такое скалярное произведение двух векторов сводится к скалярному произведению вектора \mathbf{X} и ковектора ∇f :

$$(\mathbf{X} | \text{grad } f) = \sum_{k=1}^3 X^k \frac{\partial f}{\partial x^k} = \langle \nabla f | \mathbf{X} \rangle. \quad (10.2)$$

Величина (10.2) является скаляром. Она не зависит от выбора системы координат, в которой вычислены компоненты \mathbf{X} и ∇f . Еще одна форма записи для величины (10.2) связана с ковариантным дифференцированием вдоль векторного поля \mathbf{X} , которое было определено формулой (5.5):

$$(\mathbf{X} | \text{grad } f) = \nabla_{\mathbf{X}} f. \quad (10.3)$$

По аналогии с формулой (10.3), ковариантный дифференциал $\nabla \mathbf{F}$ произвольного тензорного поля иногда называют *ковариантным градиентом* поля \mathbf{F} .

Пусть \mathbf{F} — векторное поле. Тогда его ковариантный дифференциал $\nabla \mathbf{F}$ — это операторное поле (поле типа $(1, 1)$). Обозначим через φ свертку поля $\nabla \mathbf{F}$:

$$\varphi = C(\nabla \mathbf{F}) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial F^k}{\partial x^k}. \quad (10.4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.2. Скалярное поле φ в пространстве \mathbb{E} , определяемое формулой (10.4), называется *дивергенцией* векторного поля \mathbf{F} . Оно обозначается $\varphi = \text{div } \mathbf{F}$.

Помимо скалярного поля $\text{div } \mathbf{F}$, из поля $\nabla \mathbf{F}$ можно организовать еще и векторное поле. Рассмотрим величины

$$\rho^m = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{q=1}^3 g^{mi} \omega_{ijk} g^{jq} \nabla_q F^k, \quad (10.5)$$

где ω_{ijk} — компоненты тензора объема, которые определяются формулой (8.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.3. Векторное поле $\boldsymbol{\rho}$ в пространстве \mathbb{E} , определяемое формулой (10.5), называется *ротором* векторного поля \mathbf{F} . Оно обозначается $\boldsymbol{\rho} = \text{rot } \mathbf{F}$.

В силу формулы (10.5) ротор векторного поля \mathbf{F} есть свертка тензорного произведения $\hat{\mathbf{g}} \otimes \boldsymbol{\omega} \otimes \hat{\mathbf{g}} \otimes \nabla \mathbf{F}$ по четырем парам индексов: $\text{rot } \mathbf{F} = C(\hat{\mathbf{g}} \otimes \boldsymbol{\omega} \otimes \hat{\mathbf{g}} \otimes \nabla \mathbf{F})$.

Замечание. Если величины ω_{ijk} в (10.5) понимать как компоненты псевдотензора объема (6.11), то ротор векторного поля следует считать псевдовекторным полем.

Пусть выбрана декартова прямоугольная правоориентированная система координат $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ в пространстве \mathbb{E} . Ее базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ является ортонормированным правым базисом. Матрица Грама такого базиса единична, поэтому

$$g_{ij} = g^{ij} = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Псевдоскалярное поле ориентации ξ_E в правоориентированной системе координат является константным полем, равным единице: $\xi_E \equiv 1$. Эти обстоятельства существенно упрощают запись формул (10.1) и (10.5) для компонент градиента $\text{grad } f$ и для компонент ротора $\text{rot } \mathbf{F}$:

$$(\text{grad } f)^i = \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad (10.6)$$

$$(\text{rot } \mathbf{F})^i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \frac{\partial F^k}{\partial x^j}. \quad (10.7)$$

Формула (10.4) для дивергенции остается без изменений:

$$\text{div } \mathbf{F} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial F^k}{\partial x^k}. \quad (10.8)$$

Формула (10.7) для ротора имеет изящное представление в виде формального определителя матрицы 3×3 :

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ F^1 & F^2 & F^3 \end{vmatrix}. \quad (10.9)$$

Формула (8.2) для векторного произведения в декартовой прямоугольной правоориентированной системе координат переходит в формулу (6.9), которая также имеет представление в виде формального определителя:

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ X^1 & X^2 & X^3 \\ Y^1 & Y^2 & Y^3 \end{vmatrix}. \quad (10.10)$$

Сходство (10.9) и (10.10) позволяет представлять оператор ковариантного дифференцирования ∇ в виде вектора с компонентами $\nabla = (\partial/\partial x^1, \partial/\partial x^2, \partial/\partial x^3)$, а дивергенцию и ротор записывать в виде скалярного и векторного произведений:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = (\nabla | \mathbf{F}), \quad \operatorname{rot} \mathbf{F} = [\nabla, \mathbf{F}].$$

ТЕОРЕМА 10.1. *Для любого скалярного поля φ гладкости C^2 выполнено соотношение $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0$.*

ДОК-ВО. Выберем декартову прямоугольную правоориентированную систему координат и используем формулы (10.6) и (10.7). Пусть $\mathbf{F} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi$. Тогда:

$$F^i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^j \partial x^k}. \quad (10.11)$$

В формуле (10.11) произведем замену индексов суммирования. Заменим индекс j на k , а индекс k , наоборот, на j . Такое переобозначение индексов суммирования не меняет значения суммы в правой части (10.11). Поэтому

$$F^i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ikj} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^k \partial x^j} = - \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^j \partial x^k} = -F^i.$$

Здесь мы использовали кососимметричность символа Леви-Чивита по паре индексов j и k и симметричность вторых частных производных функции φ по той же паре индексов:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^k \partial x^j}. \quad (10.12)$$

Значение смешанных вторых частных производных для функций класса гладкости C^2 не зависит от порядка дифференцирований. Полученные соотношения $F^i = -F^i$ немедленно дают $F^i = 0$. Теорема доказана. \square

ТЕОРЕМА 10.2. *Для любого векторного поля \mathbf{F} гладкости C^2 выполнено соотношение $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$.*

ДОК-ВО. Здесь, как и в случае теоремы 10.1, выберем декартову прямоугольную правоориентированную систему координат, после чего используем формулы (10.7) и (10.8). Для скалярного поля $\varphi = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F}$ из этих формул получаем:

$$\varphi = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 F^k}{\partial x^j \partial x^i}. \quad (10.13)$$

Используя соотношение аналогичное (10.12) для смешанных производных компонент векторного поля F

$$\frac{\partial^2 F^k}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial^2 F^k}{\partial x^i \partial x^j}$$

и кососимметричность ε_{ijk} по паре индексов i и j , из формулы (10.13) легко выводим $\varphi = -\varphi$. Отсюда $\varphi = 0$. \square

Пусть φ — скалярное поле класса гладкости C^2 . Величина $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi$ в общем случае отлична от нуля. Она обозначается так: $\Delta \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi$. Значком Δ обозначен дифференциальный оператор второго порядка, переводящий скалярное поле φ в другое скалярное поле $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi$. Он называется *оператором Лапласа* или *лапласианом*. В декартовой прямоугольной системе координат оператор Лапласа задается формулой

$$\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x^3} \right)^2. \quad (10.14)$$

Формулы (10.6) и (10.8) позволяют пересчитать оператор Лапласа в декартовой косоугольной системе координат:

$$\Delta = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}. \quad (10.15)$$

Используя значки ковариантных производных $\nabla_i = \partial/\partial x^i$, мы можем переписать оператор Лапласа (10.15) в виде:

$$\Delta = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g^{ij} \nabla_i \nabla_j. \quad (10.16)$$

Отличие (10.16) от (10.15) состоит не только в специальных обозначениях для операторов дифференцирования. Оператор Лапласа, определенной формулой $\Delta \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi$, может быть применен только к скалярному полю φ . Формула же (10.16) позволяет применять оператор Лапласа к любому дважды непрерывно дифференцируемому тензорному полю \mathbf{F} типа (r, s) . В силу этой формулы $\Delta \mathbf{F}$ есть результат свертки тензорного произведения $\hat{\mathbf{g}} \otimes \nabla \nabla \mathbf{F}$ по двум парам индексов: $\Delta \mathbf{F} = C(\hat{\mathbf{g}} \otimes \nabla \nabla \mathbf{F})$. Полученное поле $\Delta \mathbf{F}$ имеет тот же тип

(r, s) , что и исходное поле \mathbf{F} . Оператор Лапласа в форме (10.16) иногда называют *оператором Лапласа-Бельтрами*.

§ 11. Потенциальные и вихревые векторные поля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.1. Дифференцируемое векторное поле \mathbf{F} в пространстве \mathbb{E} называется *потенциальным*, если $\text{rot } \mathbf{F} = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.2. Дифференцируемое векторное поле \mathbf{F} в пространстве \mathbb{E} называется *вихревым*, если $\text{div } \mathbf{F} = 0$.

Теорема 10.1 дает примеры потенциальных полей, а теорема 10.2 дает примеры вихревых полей. Любое поле вида $\text{grad } \varphi$ является потенциальным, а поле вида $\text{rot } \mathbf{F}$ является вихревым. Оказываются результаты теорем 10.1 и 10.2 можно усилить.

ТЕОРЕМА 11.1. *Всякое потенциальное векторное поле \mathbf{F} в пространстве \mathbb{E} является градиентом некоторого скалярного поля φ , то есть $\mathbf{F} = \text{grad } \varphi$.*

Док-во. Выберем некоторую декартову прямоугольную систему координат $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ с ортонормированным правым базисом $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. В этой системе координат условие потенциальности $\text{rot } \mathbf{F} = 0$ для поля \mathbf{F} эквивалентно следующим трем соотношениям для его компонент:

$$\frac{\partial F^1(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^2} = \frac{\partial F^2(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^1}, \quad (11.1)$$

$$\frac{\partial F^2(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^3} = \frac{\partial F^3(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^2}, \quad (11.2)$$

$$\frac{\partial F^3(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^1} = \frac{\partial F^1(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^3}. \quad (11.3)$$

Соотношения (11.1), (11.2) и (11.3) легко выводятся из формул (10.7) либо (10.9). Определим функцию $\varphi(x^1, x^2, x^3)$ в виде суммы следующих трех интегралов от компонент поля \mathbf{F} :

$$\begin{aligned} \varphi(x^1, x^2, x^3) = c + \int_0^{x_1} F^1(x^1, 0, 0) dx^1 + \\ + \int_0^{x_2} F^2(x^1, x^2, 0) dx^2 + \int_0^{x_3} F^3(x^1, x^2, x^3) dx^3. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Здесь c — некоторая произвольная константа. Остается проверить, что функция (11.4) и есть то скалярное поле, для которого $\mathbf{F} = \text{grad } \varphi$.

Продифференцируем функцию φ по x^3 . Константа c и первые два интеграла в (11.4) от x^3 не зависят. Поэтому

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x^3} \int_0^{x_3} F^3(x^1, x^2, x^3) dx^3 = F^3(x^1, x^2, x^3). \quad (11.5)$$

При выводе соотношения (11.5) мы воспользовались правилом дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом (см. [2]).

Теперь продифференцируем функцию φ по x^2 . Константа c и первый интеграл в (11.4) не зависят от x^2 . Дифференцирование оставшихся двух интегралов дает:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^2} = F^2(x^1, x^2, 0) + \frac{\partial}{\partial x^2} \int_0^{x_3} F^3(x^1, x^2, x^3) dx^3.$$

Операции дифференцирования по x^2 и интегрирования по x^3 в полученной формуле перестановочны (см. [2]). Поэтому

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^2} = F^2(x^1, x^2, 0) + \int_0^{x_3} \frac{\partial F^3(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^2} dx^3. \quad (11.6)$$

Для преобразования подинтегрального выражения в (11.6) используем формулу (11.2). Это дает:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} &= F^2(x^1, x^2, 0) + \int_0^{x^3} \frac{\partial F^2(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^3} dx^3 = \\ &= F^2(x^1, x^2, 0) + F^2(x^1, x^2, x) \Big|_{x=0}^{x=x^3} = F^2(x^1, x^2, x^3). \end{aligned} \quad (11.7)$$

Вычисление производной $\partial \varphi / \partial x^1$ использует те же приемы, что и в случае производных $\partial \varphi / \partial x^3$ и $\partial \varphi / \partial x^2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} &= \frac{\partial}{\partial x^1} \int_0^{x^1} F^1(x^1, 0, 0) dx^1 + \frac{\partial}{\partial x^1} \int_0^{x^2} F^2(x^1, x^2, 0) dx^2 + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x^1} \int_0^{x^3} F^3(x^1, x^2, x^3) dx^3 = F^1(x^1, 0, 0) + \\ &+ \int_0^{x^2} \frac{\partial F^2(x^1, x^2, 0)}{\partial x^1} dx^2 + \int_0^{x^3} \frac{\partial F^3(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^1} dx^3. \end{aligned}$$

Для преобразования последних двух интегралов применим соотношения (11.1) и (11.3). Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} &= F^1(x^1, 0, 0) + F^1(x^1, x, 0) \Big|_{x=0}^{x=x^2} + \\ &+ F^1(x^1, x^2, x) \Big|_{x=0}^{x=x^3} = F^1(x^1, x^2, x^3). \end{aligned} \quad (11.8)$$

Выведенные соотношения (11.5), (11.7) и (11.8) представляют собой покомпонентную запись соотношения $\text{grad } \varphi = \mathbf{F}$ для функции $\varphi(x^1, x^2, x^3)$, которая определяется формулой (11.4). Теорема доказана. \square

ТЕОРЕМА 11.2. *Всякое вихревое векторное поле \mathbf{F} в пространстве \mathbb{E} является ротором некоторого другого векторного поля \mathbf{A} , то есть $\mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{A}$.*

ДОК-ВО. Доказательство этой теоремы также проведем в некоторой декартовой прямоугольной системе координат с ортонормированным базисом $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Условие того, что поле \mathbf{F} является вихревым, в такой системе координат изображается одним уравнением на его компоненты:

$$\frac{\partial F^1(\mathbf{x})}{\partial x^1} + \frac{\partial F^2(\mathbf{x})}{\partial x^2} + \frac{\partial F^3(\mathbf{x})}{\partial x^3} = 0. \quad (11.9)$$

Построим векторное поле \mathbf{A} , задав его компоненты в выбранной системе координат следующими формулами:

$$\begin{aligned} A^1 &= \int_0^{x_3} F^2(x^1, x^2, x^3) dx^3 - \int_0^{x_2} F^3(x^1, x^2, 0) dx^2, \\ A^2 &= - \int_0^{x_3} F^1(x^1, x^2, x^3) dx^3, \end{aligned} \quad (11.10)$$

$$A^3 = 0.$$

Покажем, что поле \mathbf{A} с компонентами (11.10) и есть то поле, для которого $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{F}$. Сделаем это прямым вычислением компонент ротора в выбранной декартовой системе координат. Для первой компоненты ротора имеем:

$$\frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x^3} \int_0^{x_3} F^1(x^1, x^2, x^3) dx^3 = F^1(x^1, x^2, x^3).$$

Здесь мы воспользовались правилом дифференцирования ин-

теграла с переменным верхним пределом. При вычислении второй компоненты ротора учтем, что второй интеграл в формуле (11.10) для компоненты A^1 не зависит от x^3 :

$$\frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} = \frac{\partial}{\partial x^3} \int_0^{x^3} F^2(x^1, x^2, x^3) dx^3 = F^2(x^1, x^2, x^3).$$

И, наконец, для третьей компоненты ротора поля \mathbf{A} имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} &= - \int_0^{x^3} \left(\frac{\partial F^1(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^1} + \frac{\partial F^2(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^2} \right) dx^3 + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x^2} \int_0^{x^2} F^3(x^1, x^2, 0) dx^2 = \int_0^{x^3} \frac{\partial F^3(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^3} dx^3 + \\ &+ F^3(x^1, x^2, 0) = F^3(x^1, x^2, x) \Big|_{x=0}^{x=x^3} + F^3(x^1, x^2, 0) = \\ &= F^3(x^1, x^2, x^3). \end{aligned}$$

В этих вычислениях мы воспользовались соотношением (11.9) для замены суммы двух производных $\partial F^1/\partial x^1 + \partial F^2/\partial x^2$ на $-\partial F^3/\partial x^3$. Теперь, объединяя результаты вычисления всех компонент ротора, видим, что $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{F}$. Значит, искомое поле \mathbf{A} действительно можно выбирать в форме (11.10). \square

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ.

**§ 1. Некоторые примеры
криволинейных систем координат.**

Основным предназначением декартовых систем координат является числовое представление точек: каждая точка пространства \mathbb{E} представляется некоторой уникальной тройкой чисел (x^1, x^2, x^3) . Для той же цели предназначены и криволинейные системы координат. Рассмотрение таких систем координат начнем с некоторых примеров.

Полярные координаты. Рассмотрим некоторую плоскость, выберем в ней точку O — *полос* и некоторый луч OX , исходящий из этой точки. Для произвольной точки $A \neq O$ ее

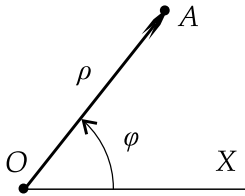


Рис. 1.1

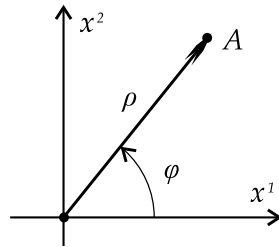


Рис. 1.2

положение на плоскости определяется заданием двух параметров: длины ее радиус-вектора $\rho = |\overrightarrow{OA}|$ и угла φ между лучом

OX и радиус-вектором точки A . Разумеется, направление отсчета углов должно быть выбрано заранее (это эквивалентно выбору ориентации на плоскости). Пара чисел (ρ, φ) — это полярные координаты точки A .

Свяжем с полярной системой координат декартову прямоугольную систему координат как это сделано на рисунке 1.2. В качестве начало координат выберем точку O , направим ось абсцисс вдоль луча OX , а ось ординат получим из оси абсцисс поворотом на 90° . Тогда пересчет полярных координат точки A в ее декартовы координаты задается формулами

$$\begin{cases} x^1 = \rho \cos(\varphi), \\ x^2 = \rho \sin(\varphi). \end{cases} \quad (1.1)$$

Обратный пересчет можно производить по формулам

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}, \\ \varphi = \arctg(x^2/x^1). \end{cases} \quad (1.2)$$

Пару чисел (ρ, φ) можно трактовать как элемент двумерного пространства \mathbb{R}^2 . Для наглядного изображения \mathbb{R}^2 представим это пространство в виде координатной плоскости.

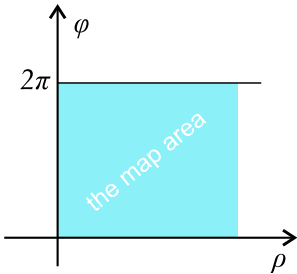


Рис. 1.3

Координатная плоскость (ρ, φ) не имеет непосредственного геометрического смысла, она называется *картой* полярной системы координат. Не все точки карты соответствуют реальным геометрическим точкам. Условие $\rho \geq 0$ исключает целую полуплоскость в карте. Синус и косинус — периодические функции с периодом $2\pi = 360^\circ$. Поэтому имеются различные точки карты, отображающиеся в одну и ту же геометрическую

Условие $\rho \geq 0$ исключает целую полуплоскость в карте. Синус и косинус — периодические функции с периодом $2\pi = 360^\circ$. Поэтому имеются различные точки карты, отображающиеся в одну и ту же геометрическую

точку. Тем самым, отображение $(\rho, \varphi) \rightarrow (x^1, x^2)$, задаваемое формулами (1.1), не является ни инъективным.

Пусть U — неограниченная область, выделенная голубым цветом на рисунке 1.3 (точки границы в U не включаются). Обозначим через V образ области U при отображении (1.1). Легко понять, что V — это все точки плоскости (x^1, x^2) за исключением точек луча OX . Если сузить (1.1) на область U , то мы получим биективное отображение $m : U \rightarrow V$.

Отметим, что формулы (1.2) не являются точным выражением для обратного отображения $m^{-1} : V \rightarrow U$. Дело в том, что значения $\operatorname{tg}(\varphi)$ в точках с координатами (x^1, x^2) и $(-x^1, -x^2)$ совпадают. Для обращения m более точным было бы использование тангенса половинного угла:

$$\varphi = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{x^2}{x^1 + \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}} \right).$$

Однако, мы предпочтем не совсем точное выражение для φ из (1.2) ввиду его относительной простоты.

Проведем в карте \mathbb{R}^2 полярной системы координат серию прямых, параллельных осям координат. Отображение (1.1)

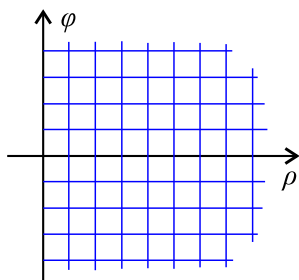


Рис. 1.4

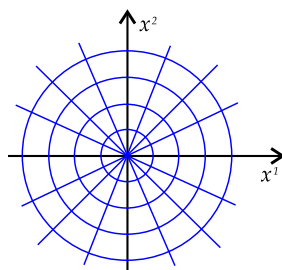


Рис. 1.5

переведет их в серию лучей и концентрических окружностей

на плоскости (x^1, x^2) . Прямые линии в карте на рисунке 1.4, а также лучи и окружности на рисунке 1.5 образуют координатную сетку полярной системы координат. Координатную сетку можно сделать более густой путем уменьшения интервала между линиями. В пределе мы можем мыслить такую сетку максимально густой. Такая сетка состоит из двух семейств линий: первое семейство задается условием $u^2 = \text{const}$, а второе — условием $u^1 = \text{const}$.

В карте через каждую точку проходит ровно две координатные линии — одна из первого семейства, другая — из второго. На плоскости (x^1, x^2) это условие выполняется во всех точках, кроме точки O . Здесь сходятся все координатные линии первого семейства. Точка O является единственной особой точкой полярной системы координат.

Цилиндрическая система координат в пространстве получается из полярной системы координат на плоскости путем добавления третьей координаты h . Как и в случае полярной системы координат, с цилиндрической системой координат свяжем декартову прямоугольную систему координат (см. рисунок 1.6). Тогда

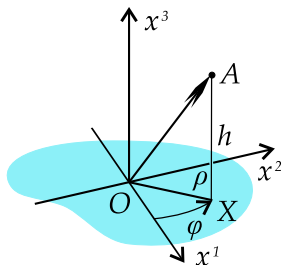


Рис. 1.6

$$\begin{cases} x^1 = \rho \cos(\varphi), \\ x^2 = \rho \sin(\varphi), \\ x^3 = h. \end{cases} \quad (1.3)$$

Обратный переход от декартовых координат к цилиндрическим координатам дается формулой

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}, \\ \varphi = \arctg(x^2/x^1), \\ h = x^3. \end{cases} \quad (1.4)$$

Координатная сетка цилиндрической системы координат состоит из трех семейств линий. Это горизонтальные лучи, исходящие из точек вертикальной оси Ox^3 , горизонтальные окружности с центрами в точках оси Ox^3 и вертикальные прямые, параллельные оси Ox^3 . Особые точки цилиндрической системы координат составляют ось Ox^3 . Через любую другую точку (не лежащую на этой оси) проходит ровно три координатные линии по одной из каждого семейства.

Сферическая система координат в пространстве получается в результате некоторой модификации цилиндрической системы координат. Координата h заменяется на угловую координату ϑ , а величина ρ в сферических координатах означает длину радиус-вектора точки A (см. рисунок 1.7). Тогда

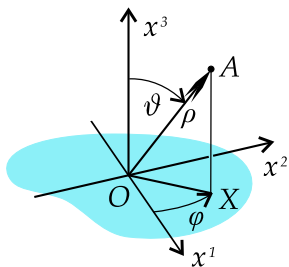


Рис. 1.7

$$\begin{cases} x^1 = \rho \sin(\vartheta) \cos(\varphi), \\ x^2 = \rho \sin(\vartheta) \sin(\varphi), \\ x^3 = \rho \cos(\vartheta). \end{cases} \quad (1.5)$$

Сферические координаты точки A принято записывать в следующем порядке: ρ, ϑ, φ . Обратный переход от декартовых координат точки A к этим величинам дается формулой:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}, \\ \vartheta = \arccos\left(x^3 / \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}\right), \\ \varphi = \arctg(x^2/x^1). \end{cases} \quad (1.6)$$

Координатные линии сферических координат образуют три семейства. Первое — это лучи, исходящие из точки O ; второе семейство — это окружности с центром в точке O , лежащие

во всевозможных вертикальных плоскостях, содержащих ось Ox^3 ; и, наконец, третье семейство составляют горизонтальные окружности с центрами на оси Ox^3 . Особые точки сферической системы координат лежат на оси Ox^3 . Через каждую из неособых точек проходит ровно по три координатные линии по одной из каждого семейства.

Условие $\rho = \text{const}$ выделяет в пространстве \mathbb{E} сферу радиуса ρ . Координатные линии из второго и третьего семейств задают на этой сфере сетку из меридианов и параллелей, в точности такую же, какая используется в географии для задания координат на поверхности Земли.

§ 2. Подвижный репер криволинейной системы координат.

Пусть D — некоторая область в пространстве \mathbb{E} . Под областью обычно понимается открытое связное множество. Открытость D означает, что вместе с каждой своей точкой $A \in D$ множество D содержит некоторую сферическую окрестность $O(A)$ этой точки. Связность же означает, что любые две точки множества D могут быть соединены гладкой кривой, целиком лежащей внутри D . Подробнее об этих понятиях см. [2]. Рассмотрим три числовые функции $u^1(\mathbf{x})$, $u^2(\mathbf{x})$ и $u^3(\mathbf{x})$ с областью определения D . Вообще говоря, их область определения может быть и шире, но нас будет интересовать их поведение лишь в точках множества D . Значения трех функций u^1, u^2, u^3 в каждой точке — это тройка чисел, которую можно интерпретировать как точку пространства \mathbb{R}^3 . Тогда тройка функций u^1, u^2, u^3 задает отображение $\mathbf{u} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Тройка дифференцируемых функций u^1, u^2, u^3 называется *регулярной в точке A* пространства \mathbb{E} , если градиенты этих функций $\text{grad } u^1$, $\text{grad } u^2$ и $\text{grad } u^3$ линейно независимы в точке A .

Выберем некоторую декартову систему координат в \mathbb{E} , в ней функции u^1, u^2, u^3 будут представлены тремя функциями декартовых координат точки: $u^i = u^i(x^1, x^2, x^3)$. Градиенты дифференцируемых функций u^1, u^2, u^3 составляют тройку ко-векторных полей, компонентами которых являются частные производные функций u^1, u^2, u^3 по x^1, x^2, x^3 :

$$\text{grad } u^i = \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^1}, \frac{\partial u^i}{\partial x^2}, \frac{\partial u^i}{\partial x^3} \right). \quad (2.1)$$

Составим из компонент градиентов вида (2.1) матрицу

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x^1} & \frac{\partial u^1}{\partial x^2} & \frac{\partial u^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial u^2}{\partial x^1} & \frac{\partial u^2}{\partial x^2} & \frac{\partial u^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial u^3}{\partial x^1} & \frac{\partial u^3}{\partial x^2} & \frac{\partial u^3}{\partial x^3} \end{vmatrix}. \quad (2.2)$$

Матрица J вида (2.2) называется *матрицей Якоби* отображения $\mathbf{u} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, задаваемого тройкой дифференцируемых функций u^1, u^2, u^3 в области D . Очевидно, что регулярность тройки функций u^1, u^2, u^3 в некоторой точке эквивалентна невырожденности матрицы Якоби в этой точке: $\det J \neq 0$.

ТЕОРЕМА 2.1. Если тройка непрерывно дифференцируемых функций u^1, u^2, u^3 с областью определения в области D регулярна в точке A , то существует некоторая окрестность $O(A)$ точки A и некоторая окрестность $O(\mathbf{u}(A))$ точки $\mathbf{u}(A)$ в пространстве \mathbb{R}^3 , такие, что выполнены следующие условия:

- (1) отображение $\mathbf{u} : O(A) \rightarrow O(\mathbf{u}(A))$ биективно;
- (2) обратное отображение $\mathbf{u}^{-1} : O(\mathbf{u}(A)) \rightarrow O(A)$ является непрерывно дифференцируемым.

Теорема 2.1 или эквивалентные ей утверждения обычно доказываются в курсе математического анализа (см. [2]). Они известны как теоремы о неявных функциях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Скажем, что упорядоченная тройка непрерывно дифференцируемых функций u^1, u^2, u^3 с областью определения в области $D \subset E$ задает криволинейную систему координат в D , если она регулярна во всех точках области D и если определяемое ею отображение \mathbf{u} является биективным отображением из D в некоторую область $U \subset \mathbb{R}^3$.

Цилиндрическая система координат задается тремя функциями $u^1 = \rho(\mathbf{x})$, $u^2 = \varphi(\mathbf{x})$ и $u^3 = h(\mathbf{x})$ из (1.4), а сферическая система координат — функциями (1.6). Однако, тройки функций (1.4) и (1.6) удовлетворяют условиям определения 2.2 только после некоторого сужения их областей определения. После правильного подбора области D для (1.4) и (1.6) обратные отображения \mathbf{u}^{-1} задаются формулами (1.3) и (1.5).

Пусть в области $D \subset E$ задана криволинейная система координат u^1, u^2, u^3 . Выберем вспомогательную декартову систему координат в \mathbb{E} . Тогда u^1, u^2, u^3 — это три функции, задающие отображение \mathbf{u} из D в некоторую область $U \subset \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} u^1 = u^1(x^1, x^2, x^3), \\ u^2 = u^2(x^1, x^2, x^3), \\ u^3 = u^3(x^1, x^2, x^3). \end{cases} \quad (2.3)$$

Область D принято называть *картируемым множеством*, область $U \subset \mathbb{R}^3$ — *картой*, а отображение $\mathbf{u}^{-1} : U \rightarrow D$ принято называть *картирующим отображением*. Картирующее отображение задается следующими тремя функциями:

$$\begin{cases} x^1 = x^1(u^1, u^2, u^3), \\ x^2 = x^2(u^1, u^2, u^3), \\ x^3 = x^3(u^1, u^2, u^3). \end{cases} \quad (2.4)$$

Обозначим через \mathbf{r} радиус-вектор \mathbf{r} точки с декартовыми координатами x^1 , x^2 и x^3 . Тогда вместо трех скалярных функций в (2.4) можно использовать одну векторную функцию, определив ее следующей очевидной формулой:

$$\mathbf{r}(u^1, u^2, u^3) = \sum_{q=1}^3 x^q(u^1, u^2, u^3) \cdot \mathbf{e}_q. \quad (2.5)$$

Фиксируем две из трех криволинейных координат u^1, u^2, u^3 и будем менять одну из них. Это определяет три семейства координатных прямых в области $U \subset \mathbb{R}^3$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u^1 = t, \\ u^2 = c^2, \\ u^3 = c^3, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} u^1 = c^1, \\ u^2 = t, \\ u^3 = c^3, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} u^1 = c^1, \\ u^2 = c^2, \\ u^3 = t, \end{array} \right. \quad (2.6)$$

где c^1 , c^2 и c^3 — константы. Координатные прямые (2.6) формируют прямолинейную координатную сеть в карте U . Через каждую точку карты приходит ровно одна прямая из каждого семейства (2.6). Подстановка (2.6) в (2.5) переводит прямолинейную координатную сеть из U в криволинейную сеть в области $D \subset E$. Такая сеть называется *координатной сетью* криволинейной системы координат.

Координатная сеть криволинейной системы координат в области D состоит из трех семейств линий. В силу биективности отображения $\mathbf{u} : D \rightarrow U$ через каждую точку области D проходит ровно три координатные линии — по одной из каждого семейства. На каждой координатной кривой есть своя параметризация: на кривых первого семейства параметром служит $t = u^1$, на кривых второго семейства — это $t = u^2$ и, наконец, на кривых третьего семейства параметром служит $t = u^3$. В каждой точке области D имеется три касательных вектора к трем кривым из трех семейств. Обозначим их через \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 и \mathbf{E}_3 . Вектора $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ получаются дифференцированием

радиус-вектора $\mathbf{r}(u^1, u^2, u^3)$ по параметрам u^1 , u^2 и u^3 на координатных кривых. Изобразим это обстоятельство в виде следующей формулы:

$$\mathbf{E}_j(u^1, u^2, u^3) = \frac{\partial \mathbf{r}(u^1, u^2, u^3)}{\partial u^j}. \quad (2.7)$$

Подставим в (2.7) разложение радиус-вектора (2.5) по базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ вспомогательной декартовой системы координат. Базисные вектора $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ не зависят от u^1, u^2, u^3 , поэтому:

$$\mathbf{E}_j(u^1, u^2, u^3) = \sum_{q=1}^3 \frac{\partial x^q(u^1, u^2, u^3)}{\partial u^j} \cdot \mathbf{e}_q. \quad (2.8)$$

Формула (2.8) определяет разложение векторов $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ по базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Вектор-столбцы из координат векторов $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ и \mathbf{E}_3 можно собрать в следующую матрицу:

$$I = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} & \frac{\partial x^1}{\partial u^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} & \frac{\partial x^2}{\partial u^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial u^1} & \frac{\partial x^3}{\partial u^2} & \frac{\partial x^3}{\partial u^3} \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Сравнение (2.9) и (2.2) показывает, что матрица (2.9) — это матрица Якоби отображения $\mathbf{u}^{-1} : U \rightarrow D$, задаваемого функциями (2.4). Подставим (2.4) в аргументы (2.3):

$$u^i(x^1(u^1, u^2, u^3), x^2(u^1, u^2, u^3), x^3(u^1, u^2, u^3)) = u^i. \quad (2.10)$$

Это вытекает из того, что функции (2.3) и (2.4) задают обратные друг для друга отображения \mathbf{u} и \mathbf{u}^{-1} . Продифференциру-

ем тождества (2.10) по переменной u^j :

$$\sum_{q=1}^3 \frac{\partial u^i(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^q} \frac{\partial x^q(u^1, u^2, u^3)}{\partial u^j} = \delta_j^i. \quad (2.11)$$

Здесь мы использовали правило дифференцирования сложной функции. Полученные соотношения показывают, что матрицы (2.2) и (2.9) являются обратными друг для друга. Точнее, имеет место следующее соотношение:

$$I(u^1, u^2, u^3) = J(x^1, x^2, x^3)^{-1}, \quad (2.12)$$

если x^1, x^2, x^3 выражены через u^1, u^2, u^3 посредством (2.4), или же, наоборот, если u^1, u^2, u^3 выражены через x^1, x^2, x^3 посредством (2.3). Аргументы, указанные в соотношении (2.12) являются естественными аргументами для компонент матриц Якоби I и J . Однако, мы можем в любой ситуации перейти к нужному нам набору аргументов при помощи подстановки (2.3) либо (2.4).

Регулярность тройки функций (2.3), задающей криволинейную систему координат в области D , означает невырожденность матрицы (2.2). Тогда в силу (2.12) обратная матрица (2.9) также является невырожденной. Из этого вытекает линейная независимость векторов $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ из (2.8) во всех точках области D . В силу доказанной линейной независимости координатных касательных векторов $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ они формируют подвижный репер, который принято называть *координатным репером* криволинейной системы координат. Формулу (2.8) теперь можно интерпретировать как формулу перехода из базиса вспомогательной декартовой системы координат в базис, образованный векторами репера $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$:

$$\mathbf{E}_j = \sum_{q=1}^3 S_j^q(u^1, u^2, u^3) \cdot \mathbf{e}_q. \quad (2.13)$$

Матрица перехода S в формуле совпадает с матрицей Якоби (2.9), поэтому ее компоненты зависят от u^1 , u^2 , и u^3 . Это естественные переменные, от которых зависят компоненты S .

Обратный переход от базиса $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ к базису декартовой системы координат дается обратной матрицей $T = S^{-1}$. В силу (2.12) матрица обратного перехода совпадает с матрицей Якоби (2.2). Поэтому естественные переменные для компонент матрицы T — это переменные x^1, x^2 и x^3 :

$$\mathbf{e}_q = \sum_{i=1}^3 T_q^i(x^1, x^2, x^3) \cdot \mathbf{E}_i. \quad (2.14)$$

Сами вектора репера $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ определяются заданием точки области $D \subset E$. Поскольку в криволинейной системе координат мы задаем точки заданием их координат u^1, u^2 и u^3 , то именно эти переменные являются естественными переменными для векторов подвижного репера $\mathbf{E}_i(u^1, u^2, u^3)$.

§ 3. Замена криволинейных координат.

Пусть в области D_1 заданы криволинейные координаты u^1, u^2, u^3 , а в области D_2 — координаты $\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{u}^3$. Если эти области имеют непустое пересечение, то в области $D = D_1 \cap \tilde{D}_2$ оказываются заданными две системы координат.

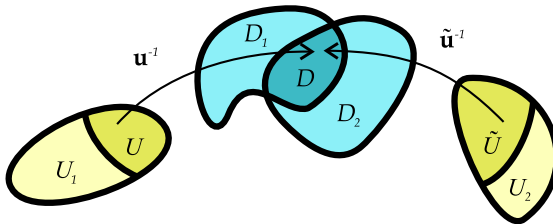


Рис. 3.1

Обозначим через U и \tilde{U} прообразы области D в картах U_1 и

U_2 , то есть положим: $U = \mathbf{u}(D_1 \cap \tilde{D}_2)$ и $\tilde{U} = \tilde{\mathbf{u}}(D_1 \cap \tilde{D}_2)$. В силу картирующих отображений точки области D находятся во взаимно однозначном соответствии с точками областей U и \tilde{U} в картах. Сами же картирующие отображения \mathbf{u}^{-1} и $\tilde{\mathbf{u}}^{-1}$ задаются следующими наборами функций:

$$\begin{cases} x^1 = x^1(u^1, u^2, u^3), \\ x^2 = x^2(u^1, u^2, u^3), \\ x^3 = x^3(u^1, u^2, u^3), \end{cases} \quad \begin{cases} x^1 = x^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{u}^3), \\ x^2 = x^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{u}^3), \\ x^3 = x^3(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{u}^3). \end{cases} \quad (3.1)$$

Отображения \mathbf{u} и $\tilde{\mathbf{u}}$, обратные картирующим, также задаются в форме систем функций:

$$\begin{cases} u^1 = u^1(x^1, x^2, x^3), \\ u^2 = u^2(x^1, x^2, x^3), \\ u^3 = u^3(x^1, x^2, x^3), \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{u}^1 = \tilde{u}^1(x^1, x^2, x^3), \\ \tilde{u}^2 = \tilde{u}^2(x^1, x^2, x^3), \\ \tilde{u}^3 = \tilde{u}^3(x^1, x^2, x^3). \end{cases} \quad (3.2)$$

Подставим первый набор функций из (3.1) в аргументы второго набора функций в (3.2). Аналогичным образом подставим второй набор функций (3.1) в аргументы первого набора функций в (3.2). В результате получим функции

$$\begin{cases} \tilde{u}^1(x^1(u^1, u^2, u^3), x^2(u^1, u^2, u^3), x^3(u^1, u^2, u^3)), \\ \tilde{u}^2(x^1(u^1, u^2, u^3), x^2(u^1, u^2, u^3), x^3(u^1, u^2, u^3)), \\ \tilde{u}^3(x^1(u^1, u^2, u^3), x^2(u^1, u^2, u^3), x^3(u^1, u^2, u^3)), \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} u^1(x^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{u}^3), x^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{u}^3), x^3(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{u}^3)), \\ u^2(x^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{u}^3), x^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{u}^3), x^3(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{u}^3)), \\ u^3(x^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{u}^3), x^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{u}^3), x^3(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{u}^3)), \end{cases} \quad (3.4)$$

которые задают пару взаимно обратных отображений $\tilde{\mathbf{u}} \circ \mathbf{u}^{-1}$

и $\mathbf{u} \circ \tilde{\mathbf{u}}^{-1}$. Для краткости запишем эти наборы функций так:

$$\begin{cases} \tilde{u}^1 = \tilde{u}^1(u^1, u^2, u^3), \\ \tilde{u}^2 = \tilde{u}^2(u^1, u^2, u^3), \\ \tilde{u}^3 = \tilde{u}^3(u^1, u^2, u^3), \end{cases} \quad \begin{cases} u^1 = u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{u}^3), \\ u^2 = u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{u}^3), \\ u^3 = u^3(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{u}^3). \end{cases} \quad (3.5)$$

Формулы (3.5) выражают координаты точки из области D в одной криволинейной системе координат через координаты этой же точки в другой криволинейной системе координат. Эти формулы называют формулами *преобразования* или же формулами *замены* криволинейных координат.

С каждой из двух рассмотренных криволинейных систем координат в области $D = D_1 \cap D_2$ связан некоторый подвижный репер из трех векторных полей. Обозначим через S и T матрицы перехода, связывающие эти два репера:

$$\tilde{\mathbf{E}}_j = \sum_{i=1}^3 S_j^i \cdot \mathbf{E}_i, \quad \mathbf{E}_i = \sum_{k=1}^3 T_i^k \cdot \tilde{\mathbf{E}}_k. \quad (3.6)$$

ТЕОРЕМА 3.1. *Компоненты матриц перехода S и T для подвижных реперов двух криволинейных систем координат в (3.6) определяются частными производными функций (3.5):*

$$S_j^i(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{u}^3) = \frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^j}, \quad T_i^k(u^1, u^2, u^3) = \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^i}. \quad (3.7)$$

ДОК-ВО. Докажем лишь первую формулу в (3.7). Доказательство второй формулы полностью аналогично доказательству первой. Выберем некоторую вспомогательную декартову систему координат и запишем формулу (2.8) применительно к векторам репера второй криволинейной системы координат:

$$\tilde{\mathbf{E}}_j(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{u}^3) = \sum_{q=1}^3 \frac{\partial x^q(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{u}^3)}{\partial \tilde{u}^j} \cdot \mathbf{e}_q. \quad (3.8)$$

Выразим вектора $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ через $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$, воспользовавшись формулой (2.14). При этом вспомним, что матрица T в (2.14) совпадает с матрицей Якоби $J(x^1, x^2, x^3)$ из (2.2). Поэтому

$$\mathbf{e}_q = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u^i(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^q} \cdot \mathbf{E}_i. \quad (3.9)$$

Теперь подставим (3.9) в (3.8). Это позволяет связать вектора реперов двух криволинейных систем координат:

$$\tilde{\mathbf{E}}_j = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{q=1}^3 \frac{\partial u^i(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^q} \frac{\partial x^q(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{u}^3)}{\partial \tilde{u}^j} \right) \cdot \mathbf{E}_i. \quad (3.10)$$

Сравним (3.10) с (3.6) и из такого сравнения для компонент матрицы S получаем:

$$S_j^i = \sum_{q=1}^3 \frac{\partial u^i(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^q} \frac{\partial x^q(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{u}^3)}{\partial \tilde{u}^j}. \quad (3.11)$$

Но декартовы координаты x^1, x^2, x^3 в полученном выражении связаны с криволинейными координатами $\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{u}^3$ посредством соотношений (3.1). Поэтому сумма в правой части (3.11) может быть преобразована к виду производной сложной функции $u^i((x^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{u}^3), x^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{u}^3), x^3(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{u}^3)))$ из (3.4):

$$S_j^i = \frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^j}.$$

Заметим, что именно функции (3.4), записанные в форме (3.5), осуществляют переход от координат $\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{u}^3$ к координатам u^1, u^2, u^3 , и именно производные этих функций фигурируют в формуле (3.7). Теорема доказана. \square

Замечание об ориентации. Из определения 2.2 вытекает непрерывная дифференцируемость функций (2.3). В силу теоремы 2.1 функции (2.4), задающие обратные отображения, также непрерывно дифференцируемы. Тогда компоненты матрицы S в формуле (2.13), совпадающие с компонентами матрицы Якоби (2.9), являются непрерывными функциями в области U . То же самое верно и для детерминанта матрицы S : определитель $\det S(u^1, u^2, u^3)$ есть непрерывная функция в области U , отличная от нуля во всех ее точках. Непрерывная вещественная функция на связном множестве U , отличная от нуля, не может принимать значений разных знаков, то есть $\det S > 0$, либо $\det S < 0$. Значит, ориентация тройки векторов репера криволинейной системы координат не меняется от точки к точке. Если считать пространство \mathbb{E} оснащенный выделенной ориентацией, то можно говорить о правоориентированных и левоориентированных криволинейных системах координат.

Замечание о гладкости. Определение 2.2 дает нам понятие непрерывно дифференцируемой криволинейной системы координат. Однако, определяющие функции (2.3) могут иметь и более высокий класс гладкости C^m . В этом случае мы будем говорить о *криволинейной системе координат гладкости C^m* . Компоненты матрицы Якоби (2.2) для такой системы координат являются функциями класса C^{m-1} . В силу соотношения (2.12) компоненты матрицы Якоби (2.9) имеют тот же самый класс гладкости C^{m-1} , а функции (2.4), в силу этого, принадлежат классу гладкости C^m .

Если же мы имеем две криволинейные системы координат гладкости C^m , то в силу сказанного выше функции перехода (3.5) будут функциями класса C^m , а компоненты матриц перехода S и T , вычисленные по формулам (3.7), будут функциями класса C^{m-1} .

§ 4. Векторные и тензорные поля в криволинейных координатах.

Пусть u^1, u^2, u^3 — некоторая криволинейная система координат в области $D \subset E$ и пусть \mathbf{F} — некоторое векторное поле, определенное в точках области D . Тогда в точке с криволинейными координатами u^1, u^2, u^3 мы имеем вектор поля $\mathbf{F}(u^1, u^2, u^3)$ тройку векторов репера $\mathbf{E}_1(u^1, u^2, u^3)$, $\mathbf{E}_2(u^1, u^2, u^3)$ и $\mathbf{E}_3(u^1, u^2, u^3)$. Разложим вектор поля по базису из векторов репера в этой точке:

$$\mathbf{F}(u^1, u^2, u^3) = \sum_{i=1}^3 F^i(u^1, u^2, u^3) \cdot \mathbf{E}_i(u^1, u^2, u^3). \quad (4.1)$$

Величины $F^i(u^1, u^2, u^3)$ в таком разложении естественно называть компонентами векторного поля \mathbf{F} в криволинейной системе координат. Если в области D задана еще одна криволинейная система координат $\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{u}^3$, то имеется еще одно разложение вида (4.1):

$$\mathbf{F}(u^1, u^2, u^3) = \sum_{i=1}^3 \tilde{F}^i(u^1, u^2, u^3) \cdot \tilde{\mathbf{E}}_i(u^1, u^2, u^3). \quad (4.2)$$

Пользуясь формулами (3.6), нетрудно вывести связь между компонентами поля \mathbf{F} в разложениях (4.1) и (4.2):

$$F^i(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^3 S_j^i(\tilde{\mathbf{u}}) \tilde{F}^j(\tilde{\mathbf{u}}), \quad (4.3)$$

$$u^i = u^i(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{u}^3).$$

Соотношение (4.3) естественно интерпретировать как обобщение соотношения (1.2) из второй главы на случай криволинейных систем координат.

Заметим, что декартовы системы координат можно интерпретировать как частный случай криволинейных. Функции перехода $u^i = u^i(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{u}^3)$ в случае двух декартовых систем координат линейны, поэтому матрица S , вычисленная по теореме 3.1, в этом случае имеет константные компоненты.

Пусть теперь \mathbf{F} — поле ковекторов, поле линейных операторов или же поле билинейных форм. В любом из перечисленных случаев компоненты поля F в некоторой точке определяются заданием некоторого базиса, прикрепленного к этой точке. Вектора репера криволинейной системы координат в точке с координатами u^1, u^2, u^3 , как раз, и дают необходимый базис. Компоненты поля \mathbf{F} , определяемые таким базисом, называются компонентами поля \mathbf{F} в криволинейной системе координат. Правила преобразования компонент перечисленных выше полей при замене криволинейной системы координат обобщают формулы (1.3), (1.4) и (1.5) из второй главы.

Для ковекторного поля \mathbf{F} правило преобразования его компонент при замене координат имеет вид:

$$F_i(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^3 T_i^j(\mathbf{u}) \tilde{F}_j(\tilde{\mathbf{u}}), \quad (4.4)$$

$$u^i = u^i(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{u}^3).$$

Формула преобразования для компонент операторного поля \mathbf{F} при замене системы координат записывается так:

$$F_j^i(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 S_p^i(\tilde{\mathbf{u}}) T_j^q(\mathbf{u}) \tilde{F}_q^p(\tilde{\mathbf{x}}), \quad (4.5)$$

$$u^i = u^i(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{u}^3).$$

В случае поля билинейных (квадратичных) форм обобщение

соответствующей формулы (1.5) из второй главы имеет вид:

$$F_{ij}(\mathbf{u}) = \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 T_i^p(\mathbf{u}) T_j^q(\mathbf{u}) \tilde{F}_{pq}(\tilde{\mathbf{u}}), \quad (4.6)$$

$$u^i = u^i(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{u}^3).$$

Пусть \mathbf{F} — тензорное поле типа (r, s) . В отличие от векторного поля, значения такого тензорного поля в точке не имеют наглядного изображения в виде направленных отрезков. Более того, в общем случае нет наглядных приемов для нахождения компонент такого поля в заданном базисе. Однако, согласно определению 1.1 из второй главы тензор — это геометрический объект, у которого с каждым выбором базиса связан некоторый набор компонент в этом базисе. Обозначим через $\mathbf{F}(u^1, u^2, u^3)$ значение поля \mathbf{F} в точке с координатами u^1, u^2, u^3 . Это тензор, компоненты которого в базисе $\mathbf{E}_1(u^1, u^2, u^3)$, $\mathbf{E}_2(u^1, u^2, u^3)$ и $\mathbf{E}_3(u^1, u^2, u^3)$ называются компонентами поля \mathbf{F} в криволинейной системе координат. Правило преобразования компонент тензорного поля при замене системы координат вытекает из формулы (1.6) из второй главы. Для тензорного поля типа (r, s) оно имеет вид:

$$F_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(\mathbf{u}) = \sum_{\substack{p_1 \dots p_r \\ q_1 \dots q_s}} S_{p_1}^{i_1}(\tilde{\mathbf{u}}) \dots S_{p_r}^{i_r}(\tilde{\mathbf{u}}) \times \\ \times T_{j_1}^{q_1}(\mathbf{u}) \dots T_{j_s}^{q_s}(\mathbf{u}) \tilde{F}_{q_1 \dots q_s}^{p_1 \dots p_r}(\tilde{\mathbf{u}}), \quad (4.7)$$

$$u^i = u^i(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{u}^3).$$

Выписанная здесь формула (4.7) имеет два важных отличия от соответствующей формулы (1.7) во второй главе. В случае криволинейных систем координат:

- (1) функции перехода $u^i(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{u}^3)$ не обязаны более быть линейными функциями;

- (2) матрицы перехода $S(\tilde{\mathbf{u}})$ и $T(\mathbf{u})$ не являются константными матрицами.

Отметим, что эти различия не оказывают никакого влияния на выполнение алгебраических операций с тензорными полями. Операции сложения, тензорного умножения, свертки, перестановки индексов, симметрирования и альтернирования тензоров в криволинейных координатах выполняются по тем же формулам, что и в декартовых координатах. Отличия (1) и (2) начинают проявляться лишь при выполнении операции ковариантного дифференцирования тензорных полей.

Всякая криволинейная система координат естественным образом оснащена метрическим тензором \mathbf{g} . Это тензорное поле, компоненты которого определяются скалярными произведениями векторов репера:

$$g_{ij} = (\mathbf{E}_i(\mathbf{u}) | \mathbf{E}_j(\mathbf{u})). \quad (4.8)$$

Компоненты обратного метрического тензора $\hat{\mathbf{g}}$ получаются обращением матрицы \mathbf{g} . В криволинейной системе координат величины g_{ij} и величины g^{ij} уже не являются константами.

Мы уже знаем, что метрический тензор \mathbf{g} определяет псевдотензор объема ω . В криволинейной системе координат его компоненты по-прежнему задаются формулой (6.11) из второй главы. В случае выбора выделенной ориентации в пространстве \mathbb{E} псевдотензор объема может быть преобразован в тензор объема ω . Формула (8.1) из второй главы для такого тензора остается справедливой и в криволинейных координатах.

§ 5. Дифференцирование тензорных полей в криволинейных координатах.

Пусть \mathbf{A} — дифференцируемое тензорное поле типа (r, s) . В § 5 второй главы мы определили понятие ковариантного дифференциала. Ковариантный дифференциал $\nabla \mathbf{A}$ поля \mathbf{A}

это тензорное поле типа $(r, s + 1)$. В произвольной декартовой системе координат компоненты поля $\nabla \mathbf{A}$ получаются простым дифференцированием компонент исходного поля \mathbf{A} по x^1, x^2 и x^3 . Использование криволинейных координат не отменяет операции ковариантного дифференцирования. Однако, вычисление компонент поля $\nabla \mathbf{A}$ по компонентам поля \mathbf{A} в криволинейных координатах становится более сложным.

Пусть u^1, u^2, u^3 — некоторая криволинейная система координат в области $D \subset E$. Выведем правило ковариантного дифференцирования тензорных полей в такой системе координат. Начнем рассмотрение со случая векторного поля \mathbf{A} . Это поле, компоненты которого нумеруются одним верхним индексом $A^i(u^1, u^2, u^3)$. Для вычисления компонент поля $\mathbf{B} = \nabla \mathbf{A}$ выберем некоторую вспомогательную декартову систему координат $\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3$. После чего применим следующий маневр: преобразуем компоненты поля \mathbf{A} из криволинейной системы координат в декартову, здесь вычислим компоненты поля $\mathbf{B} = \nabla \mathbf{A}$ по известной формуле (5.1) из второй главы, затем преобразуем найденные компоненты поля $\nabla \mathbf{A}$ из декартовой системы координат обратно в криволинейную.

Связь декартовых координат $\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3$ с криволинейными координатами u^1, u^2, u^3 дается функциями перехода:

$$\begin{cases} \tilde{x}^1 = \tilde{x}^1(u^1, u^2, u^3), \\ \tilde{x}^2 = \tilde{x}^2(u^1, u^2, u^3), \\ \tilde{x}^3 = \tilde{x}^3(u^1, u^2, u^3), \end{cases} \quad \begin{cases} u^1 = u^1(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3), \\ u^2 = u^2(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3), \\ u^3 = u^3(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3), \end{cases} \quad (5.1)$$

а компоненты соответствующих матриц перехода вычисляются по формуле (3.7). Для к (5.1) эта формула дает:

$$S_j^i(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{\partial u^i}{\partial \tilde{x}^j}, \quad T_i^k(\mathbf{u}) = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial u^i}. \quad (5.2)$$

Обозначим через $\tilde{A}^k(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)$ компоненты векторного поля

\mathbf{A} в декартовой системе координат. Тогда

$$\tilde{A}^k = \sum_{p=1}^3 T_p^k(\mathbf{u}) A^p(\mathbf{u}).$$

Для компонент поля $\mathbf{B} = \nabla \mathbf{A}$ в декартовой системе координат по формуле (5.1) из второй главы находим:

$$\tilde{B}_q^k = \frac{\partial \tilde{A}^k}{\partial \tilde{x}^q} = \sum_{p=1}^3 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^q} (T_p^k(\mathbf{u}) A^p(\mathbf{u})). \quad (5.3)$$

Теперь произведем обратный пересчет компонент поля \mathbf{B} из декартовой системы координат в криволинейную:

$$\nabla_j A^i = B_j^i(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^3 \sum_{q=1}^3 S_k^i(\tilde{\mathbf{x}}) T_j^q(\mathbf{u}) \tilde{B}_q^k. \quad (5.4)$$

Продифференцируем произведение в формуле (5.3) по правилу Лейбница. Это приведет к возникновению двух сумм в (5.3). Последующая подстановка этих сумм в (5.4) дает:

$$\begin{aligned} \nabla_j A^i &= \sum_{q=1}^3 \sum_{p=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 S_k^i(\tilde{\mathbf{x}}) T_p^k(\mathbf{u}) \right) T_j^q(\mathbf{u}) \frac{\partial A^p(\mathbf{u})}{\partial \tilde{x}^q} + \\ &+ \sum_{p=1}^3 \left(\sum_{q=1}^3 \sum_{k=1}^3 S_k^i(\tilde{\mathbf{x}}) T_j^q(\mathbf{u}) \frac{\partial T_p^k(\mathbf{u})}{\partial \tilde{x}^q} \right) A^p(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Заметим, что матрицы S и T являются обратными друг для друга. Это позволяет вычислить суммы по k и p в первом слагаемом. Кроме того, заменим $T_j^q(\mathbf{u})$ на производные $\partial \tilde{x}^q / \partial u^j$ в силу формулы (5.2), что дает:

$$\sum_{q=1}^3 T_j^q(\mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^q} = \sum_{q=1}^3 \frac{\partial \tilde{x}^q}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^q} = \frac{\partial}{\partial u^j}.$$

Учет перечисленных обстоятельств позволяет преобразовать формулу для $\nabla_j A^i$ к следующему виду:

$$\nabla_j A^i(\mathbf{u}) = \frac{\partial A^i(\mathbf{u})}{\partial u^j} + \sum_{p=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 S_k^i(\tilde{\mathbf{x}}) \frac{\partial T_p^k(\mathbf{u})}{\partial u^j} \right) A^p(\mathbf{u}).$$

Для суммы в скобках введем специальное обозначение. Величину этой суммы обозначим через Γ_{jp}^i :

$$\Gamma_{jp}^i(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^3 S_k^i(\tilde{\mathbf{x}}) \frac{\partial T_p^k(\mathbf{u})}{\partial u^j}. \quad (5.5)$$

С учетом обозначений (5.5) правило ковариантного дифференцирования векторного поля в криволинейной системе координат записывается так:

$$\nabla_j A^i = \frac{\partial A^i}{\partial u^j} + \sum_{p=1}^3 \Gamma_{jp}^i A^p. \quad (5.6)$$

Величины Γ_{jp}^i в этой формуле, вычисляемые согласно (5.5), называются *компонентами связности* или *символами Кристоффеля*. Эти величины являются некоторыми внутренними характеристиками криволинейной системы координат, что подтверждается следующей леммой.

ЛЕММА 5.1. *Компоненты связности Γ_{jp}^i криволинейной системы координат u^1, u^2, u^3 , вычисляемые по формуле (5.5), не зависят от выбора вспомогательной декартовой системы координат $\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3$.*

ДОК-ВО. Умножим обе части равенства (5.5) на вектор репера \mathbf{E}_i и просуммируем по индексу i :

$$\sum_{i=1}^3 \Gamma_{jp}^i(\mathbf{u}) \mathbf{E}_i(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial T_p^k(\mathbf{u})}{\partial u^j} S_k^i(\tilde{\mathbf{x}}) \mathbf{E}_i(\mathbf{u}). \quad (5.7)$$

Сумму по i в правой части полученного выражения можно вычислить явно в силу первой из следующих формул:

$$\tilde{\mathbf{e}}_k = \sum_{i=1}^3 S_k^i \mathbf{E}_i, \quad \mathbf{E}_p = \sum_{k=1}^3 T_p^k \tilde{\mathbf{e}}_k, \quad (5.8)$$

которые связывают вектора репера $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ с векторами базиса $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ вспомогательной декартовой системы координат. Теперь формула (5.7) запишется так:

$$\sum_{i=1}^3 \Gamma_{jp}^i \mathbf{E}_i = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial T_p^k(\mathbf{u})}{\partial u^j} \tilde{\mathbf{e}}_k = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial u^j} (T_p^k(\mathbf{u}) \tilde{\mathbf{e}}_k).$$

Базисный вектор $\tilde{\mathbf{e}}_k$ не зависит от u^1, u^2, u^3 , поэтому он внесен под знак дифференцирования по u^j . Сумма по k в правой части полученного выражения вычисляется в силу второй формулы (5.8). В итоге соотношение (5.7) приводится к виду

$$\frac{\partial \mathbf{E}_p}{\partial u^j} = \sum_{i=1}^3 \Gamma_{jp}^i \cdot \mathbf{E}_i. \quad (5.9)$$

Формулу (5.9) можно трактовать как еще один способ вычисления компонент связности Γ_{jp}^i . Эта формула не содержит ничего, связанного с выбором вспомогательной декартовой системы координат $\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3$. Вектор репера $\mathbf{E}_p(u^1, u^2, u^3)$ определяется выбором криволинейных координат u^1, u^2, u^3 в области D . Достаточно продифференцировать такой вектор по u^j и разложить полученный в результате дифференцирования вектор по векторам репера $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$. Коэффициенты в таком разложении — это в точности компоненты связности Γ_{jp}^i . Они, очевидно, не зависят от выбора вспомогательной декартовой системы координат. \square

Перейдем теперь к выводу правила ковариантного дифференцирования произвольного тензорного поля \mathbf{A} типа (r, s) в

криволинейных координатах. Для этого нам потребуется еще одно выражение для компонент связности, выводимое из (5.5). Преобразуем формулу (5.5) следующим образом:

$$\Gamma_{jp}^i(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial u^j} (S_k^i(\tilde{\mathbf{x}}) T_p^k(\mathbf{u})) - \sum_{k=1}^3 T_p^k(\mathbf{u}) \frac{\partial S_k^i(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial u^j}.$$

Матрицы S и T являются обратными друг для друга. Поэтому после выполнения суммирования по k в первом слагаемом оно обратиться в ноль. Для компонент связности отсюда выводим:

$$\Gamma_{jp}^i(\mathbf{u}) = - \sum_{k=1}^3 T_p^k(\mathbf{u}) \frac{\partial S_k^i(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial u^j}. \quad (5.10)$$

Пусть $A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ — компоненты поля \mathbf{A} типа (r, s) в криволинейных координатах. Для вычисления компонент поля $\mathbf{B} = \nabla \mathbf{A}$ применим тот же прием, что был использован выше. Сначала преобразуем компоненты поля \mathbf{A} в некоторую вспомогательную декартову систему координат:

$$\tilde{A}_{q_1 \dots q_s}^{p_1 \dots p_r} = \sum_{\substack{v_1 \dots v_r \\ w_1 \dots w_s}} T_{v_1}^{p_1} \dots T_{v_r}^{p_r} S_{q_1}^{w_1} \dots S_{q_s}^{w_s} A_{w_1 \dots w_s}^{v_1 \dots v_r}.$$

Затем вычислим компоненты поля \mathbf{B} во вспомогательной декартовой системе координат простым дифференцированием:

$$\tilde{B}_{q_1 \dots q_{s+1}}^{p_1 \dots p_r} = \sum_{\substack{v_1 \dots v_r \\ w_1 \dots w_s}} \frac{\partial (T_{v_1}^{p_1} \dots T_{v_r}^{p_r} S_{q_1}^{w_1} \dots S_{q_s}^{w_s} A_{w_1 \dots w_s}^{v_1 \dots v_r})}{\partial \tilde{x}^{q_{s+1}}}.$$

После чего произведем обратный пересчет компонент из де-

картовой системы координат в криволинейную:

$$\begin{aligned}
 B_{j_1 \dots j_{s+1}}^{i_1 \dots i_r} &= \sum_{\substack{p_1 \dots p_r \\ q_1 \dots q_{s+1}}} S_{p_1}^{i_1} \dots S_{p_r}^{i_r} T_{j_1}^{q_1} \dots T_{j_{s+1}}^{q_{s+1}} \tilde{B}_{q_1 \dots q_{s+1}}^{p_1 \dots p_r} = \\
 &= \sum_{\substack{p_1 \dots p_r \\ q_1 \dots q_{s+1}}} \sum_{\substack{v_1 \dots v_r \\ w_1 \dots w_s}} S_{p_1}^{i_1} \dots S_{p_r}^{i_r} T_{j_1}^{q_1} \dots T_{j_{s+1}}^{q_{s+1}} \times \\
 &\quad \times \frac{\partial (T_{v_1}^{p_1} \dots T_{v_r}^{p_r} S_{q_1}^{w_1} \dots S_{q_s}^{w_s} A_{w_1 \dots w_s}^{v_1 \dots v_r})}{\partial \tilde{x}^{q_{s+1}}}. \tag{5.11}
 \end{aligned}$$

Фактическое выполнение дифференцирования в (5.11) по правилу Лейбница приведет к возникновению трех групп слагаемых. Слагаемые первой группы отвечают дифференцированию компонент матриц T , слагаемые второй группы получаются дифференцированием компонент матриц S и, наконец, единственное слагаемое в третьей группе получается дифференцированием $A_{w_1 \dots w_s}^{v_1 \dots v_r}$. В любом из таких слагаемых если множитель $T_{v_m}^{p_m}$ либо множитель $S_{q_n}^{w_n}$ не дифференцируется, то он включается в сумму, которая вычисляется явно:

$$\sum_{p_m=1}^3 S_{p_m}^{i_m} T_{v_m}^{p_m} = \delta_{v_m}^{i_m}, \quad \sum_{q_n=1}^3 T_{j_n}^{q_n} S_{q_n}^{w_n} = \delta_{j_n}^{w_n}.$$

Это обстоятельство позволяет выполнить явно большую часть суммирований в формуле (5.11). Кроме того:

$$\sum_{q_{s+1}=1}^3 T_{j_{s+1}}^{q_{s+1}} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{q_{s+1}}} = \sum_{q_{s+1}=1}^3 \frac{\partial \tilde{x}^{q_{s+1}}}{\partial u^{j_{s+1}}} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{q_{s+1}}} = \frac{\partial}{\partial u^{j_{s+1}}}.$$

Учет всех перечисленных обстоятельств позволяет преобразо-

вать формулу (5.11) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \nabla_{j_{s+1}} A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} &= \sum_{m=1}^r \sum_{v_m=1}^3 \left(\sum_{p_m=1}^3 S_{p_m}^{i_m} \frac{\partial T_{v_m}^{p_m}}{\partial u^{j_{s+1}}} \right) A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots v_m \dots i_r} + \\ &+ \sum_{n=1}^s \sum_{w_n=1}^3 \left(\sum_{q_n=1}^3 T_{j_n}^{q_n} \frac{\partial S_{q_n}^{w_n}}{\partial u^{j_{s+1}}} \right) A_{j_1 \dots w_n \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} + \frac{\partial A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial u^{j_{s+1}}}. \end{aligned}$$

Формулы (5.5) и (5.10) позволяют заменить суммы в скобках на символы Кристоффеля. Окончательно формула (5.11) может быть преобразована к следующему виду:

$$\begin{aligned} \nabla_{j_{s+1}} A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} &= \frac{\partial A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial u^{j_{s+1}}} + \\ &+ \sum_{m=1}^r \sum_{v_m=1}^3 \Gamma_{j_{s+1} v_m}^{i_m} A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots v_m \dots i_r} - \\ &- \sum_{n=1}^s \sum_{w_n=1}^3 \Gamma_{j_{s+1} j_n}^{w_n} A_{j_1 \dots w_n \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Формула (5.12) представляет собой правило ковариантного дифференцирования тензорного поля типа (r, s) в криволинейной системе координат. Его можно прокомментировать так: ковариантная производная $\nabla_{j_{s+1}}$ получается из частной производной по $u^{j_{s+1}}$ добавлением $r + s$ слагаемых — по одному на каждый из индексов в компонентах поля \mathbf{A} . Слагаемые, отвечающие верхним индексам, входят со знаком плюс, те же, что отвечают нижним индексам, входят со знаком минус. Каждый из верхних индексов i_m и каждый из нижних индексов j_n по очереди перемещается в символ Кристоффеля, а на их место пишется индекс суммирования v_m либо w_n . Индекс j_{s+1} , добавляемый в результате ковариантного дифференцирования, всегда записывается первым нижним

индексом в символе Кристоффеля. Положение индексов суммирования v_m и w_n в символах Кристоффеля дополняет их положение в компонентах поля \mathbf{A} , так, что образуется пара индексов — верхний и нижний. Несмотря на некоторую громоздкость формулы (5.12), мы надеемся, что изложенная закономерность позволит легко воспроизводить ее при любых обозначениях для индексов.

§ 6. Преобразование компонент связности при замене системы координат.

При выводе формулы для ковариантного дифференцирования тензорных полей в криволинейных координатах, мы обнаружили новый тип индексных объектов — это символы Кристоффеля. Величины Γ_{ij}^k нумеруются одним верхним и двумя нижними индексами, их значения определяются лишь выбором системы координат. Однако, они не являются компонентами тензорного поля типа (1, 2). Значения всех Γ_{ij}^k в декартовой системе координат равны нулю тождественно (это вытекает из сравнения (5.12) с формулой (5.1) из второй главы). Но тензорное поле, имеющее чисто нулевые компоненты в одной системе координат, не может иметь ненулевых компонент в любой другой системе координат. Символы Кристоффеля Γ_{ij}^k — это компоненты геометрического объекта, который называют *полем связности* или просто *связностью*.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть u^1, u^2, u^3 и $\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{u}^3$ две системы координат в области $D \subset E$. Тогда компоненты связности в этих двух системах координат связаны соотношением:

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{m=1}^3 \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 S_m^k T_i^p T_j^q \tilde{\Gamma}_{pq}^m + \sum_{m=1}^3 S_m^k \frac{\partial T_i^m}{\partial u^j}, \quad (6.1)$$

где матрицы перехода S и T определяются соотношением (3.7).

Замечание о гладкости. Наличие производных от компонент матрицы перехода T в (6.1) и формулы (3.7), в которых компоненты T определяются как производные от функций перехода (3.5), показывают, что компоненты связности корректно определять лишь в системах координат класса гладкости не ниже C^2 . Это же видно и из формул (5.5) для Γ_{jp}^i .

Док-во. Для доказательства теоремы 6.1 применим формулу (5.9). Запишем ее для репера $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$, затем применим формулу (3.6) для выражения \mathbf{E}_j через $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ и $\tilde{\mathbf{E}}_3$:

$$\sum_{k=1}^3 \Gamma_{ij}^k \mathbf{E}_k = \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}_j}{\partial u^i} = \sum_{m=1}^3 \frac{\partial}{\partial u^i} (T_j^m \tilde{\mathbf{E}}_m). \quad (6.2)$$

Выполнив дифференцирование по правилу Лейбница в правой части (6.2) мы получим два слагаемых:

$$\sum_{k=1}^3 \Gamma_{ij}^k \mathbf{E}_k = \sum_{m=1}^3 \frac{\partial T_j^m}{\partial u^i} \tilde{\mathbf{E}}_m + \sum_{q=1}^3 T_j^q \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}_q}{\partial u^i}. \quad (6.3)$$

В первом слагаемом в правой части (6.3) выразим $\tilde{\mathbf{E}}_m$ через вектора $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ и \mathbf{E}_3 , а во втором слагаемом заменим дифференцирование по u^i через производные по переменным $\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{u}^3$ по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\sum_{k=1}^3 \Gamma_{ij}^k \mathbf{E}_k = \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 S_m^k \frac{\partial T_j^m}{\partial u^i} \mathbf{E}_k + \sum_{q=1}^3 \sum_{p=1}^3 T_j^q \frac{\partial \tilde{u}^p}{\partial u^i} \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}_q}{\partial \tilde{u}^p}.$$

Заменим производные $\partial \tilde{u}^p / \partial u^i$ на T_i^p в силу формулы (3.7) и применим соотношение (5.9) еще раз в форме:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}_q}{\partial \tilde{u}^p} = \sum_{m=1}^3 \tilde{\Gamma}_{pq}^m \tilde{\mathbf{E}}_m.$$

В результате полученное выражение преобразуется к виду:

$$\sum_{k=1}^3 \Gamma_{ij}^k \mathbf{E}_k = \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 S_m^k \frac{\partial T_j^m}{\partial u^i} \mathbf{E}_k + \sum_{q=1}^3 \sum_{p=1}^3 \sum_{m=1}^3 T_i^p T_j^q \tilde{\Gamma}_{pq}^m \tilde{\mathbf{E}}_m.$$

Остается лишь выразить вектор $\tilde{\mathbf{E}}_m$ через вектора репера $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ и привести подобные слагаемые:

$$\sum_{k=1}^3 \left(\Gamma_{ij}^k - \sum_{m=1}^3 \sum_{q=1}^3 \sum_{p=1}^3 S_m^k T_i^p T_j^q \tilde{\Gamma}_{pq}^m - \sum_{m=1}^3 S_m^k \frac{\partial T_j^m}{\partial u^i} \right) \mathbf{E}_k = 0.$$

Ввиду линейной независимости векторов репера $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ выражение в скобках должно занулиться. Это в точности эквивалентно соотношению (6.1), которое требовалось доказать. \square

§ 7. Согласованность метрики и связности. Еще одна формула для символов Кристоффеля.

Рассмотрим метрический тензор \mathbf{g} . Ковариантный дифференциал $\nabla \mathbf{g}$ поля \mathbf{g} равен нулю (см. формулы (6.7) из второй главы). Это связано с тем, что в любой декартовой системе координат x^1, x^2, x^3 в \mathbb{E} компоненты g_{ij} метрического тензора не зависят от x^1, x^2, x^3 . В криволинейной системе координат компоненты метрического тензора $g_{ij}(u^1, u^2, u^3)$ уже не являются константами. Но равенство нулю тензора $\nabla \mathbf{g}$ означает зануление всех его компонент в любой системе координат:

$$\nabla_k g_{ij} = 0. \quad (7.1)$$

Соотношение (7.1) известно как *условие согласованности метрики и связности*. С учетом формулы (5.12) это условие согласованности можно переписать так:

$$\frac{g_{ij}}{\partial u^k} - \sum_{r=1}^3 \Gamma_{ki}^r g_{rj} - \sum_{r=1}^3 \Gamma_{kj}^r g_{ir} = 0. \quad (7.2)$$

Формула (7.2) устанавливает связь компонент связности Γ_{ij}^k с компонентами метрического тензора g_{ij} . Такая связь позволяет находить Γ_{ij}^k по известным компонентам метрического тензора при учете следующего важного свойства компонент связности (5.5).

ТЕОРЕМА 7.1. *Связность, задаваемая формулой (5.5), является симметричной, то есть $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.*

ДОК-ВО. Соединим формулы (5.2) и (5.5). Для компонент связности Γ_{ij}^k это дает:

$$\Gamma_{ij}^k(\mathbf{u}) = \sum_{q=1}^3 S_q^k \frac{\partial T_j^q(\mathbf{u})}{\partial u^i} = \sum_{q=1}^3 S_q^k \frac{\partial^2 \tilde{x}^q}{\partial u^j \partial u^i}. \quad (7.3)$$

Для функций класса C^2 вторые смешанные частные производные не зависят от порядка дифференцирования:

$$\frac{\partial^2 \tilde{x}^q}{\partial u^j \partial u^i} = \frac{\partial^2 \tilde{x}^q}{\partial u^i \partial u^j}.$$

Это доказывает симметричность символов Кристоффеля, вычисленных по формуле (7.3). Теорема доказана. \square

Теперь, возвращаясь обратно к формуле (7.2), связывающей Γ_{ij}^k и g_{ij} , введем следующие обозначения:

$$\Gamma_{ijk} = \sum_{r=1}^3 \Gamma_{ij}^r g_{kr}. \quad (7.4)$$

Величины Γ_{ijk} в (7.4) получаются из Γ_{ij}^k в результате процедуры опускания верхнего индекса, описанной во второй главе. Обратно, величины Γ_{ij}^k получаются из Γ_{ijk} по формуле:

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{r=1}^3 g^{kr} \Gamma_{ijr}. \quad (7.5)$$

Из симметричности Γ_{ij}^k вытекает симметричность величин Γ_{ijk} из (7.4) по паре индексов i и j , то есть $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik}$. Используя обозначения (7.4) и симметричность метрического тензора соотношение (7.2) можно переписать так:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - \Gamma_{kij} - \Gamma_{kji} = 0. \quad (7.6)$$

Дополним (7.6) еще двумя точно такими же соотношениями, произведя в формуле (7.6) циклическую перестановку индексов $i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow i$ два раза. В итоге получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - \Gamma_{kij} - \Gamma_{kji} &= 0. \\ \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \Gamma_{ijk} - \Gamma_{ikj} &= 0. \\ \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} - \Gamma_{jki} - \Gamma_{jik} &= 0. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Сложим два последних соотношения (7.7) и вычтем из них первое соотношение (7.7). Учет симметричности Γ_{ijk} по первой паре индексов при этом дает

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - 2\Gamma_{ijk} = 0.$$

Полученное соотношение позволяет выразить Γ_{ijk} через производные компонент метрического тензора и подставить это выражение в формулу (7.5), что дает:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^3 g^{kr} \left(\frac{\partial g_{rj}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ir}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^r} \right). \quad (7.8)$$

Соотношение (7.8) это еще одна формула для символов Кристоффеля Γ_{ij}^k , вытекающая из их симметричности и из условия согласованности метрики и связности. Важным преимуще-

шеством формулы (7.8) перед формулой (5.5) состоит в том, что ее использование не требует выбора вспомогательной декартовой системы координат. В отличие же от формулы (5.9) здесь не надо работать с вектор-функциями $\mathbf{E}_i(u^1, u^2, u^3)$. Все вычисления по формуле (7.8) производятся в рамках одной криволинейной системы координат, если известны компоненты метрического тензора в этой системе координат.

§ 8. Параллельный перенос. Уравнение прямой в криволинейных координатах.

Пусть \mathbf{a} — некоторый ненулевой вектор, прикрепленный к точке A в пространстве \mathbb{E} . В евклидовом пространстве имеется процедура параллельного переноса, позволяющая перенести этот вектор в точку B . Эта процедура не меняет ни величины, ни направления вектора \mathbf{a} . Наиболее просто процедура параллельного переноса описывается в декартовых координатах: исходный вектор \mathbf{a} в точке A и перенесенный вектор \mathbf{a} в точке B имеют одинаковые координаты. В криволинейной же системе координат вектора репера в точке A и вектора репера в точке B задают различные базисы. Поэтому, компоненты вектора \mathbf{a} в разложениях

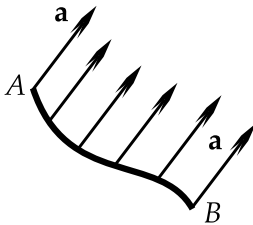


Рис. 8.1

в точке A и вектора репера в точке B задают различные базисы. Поэтому, компоненты вектора \mathbf{a} в разложениях

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a^1(A) \cdot \mathbf{E}_1(A) + a^2(A) \cdot \mathbf{E}_2(A) + a^3(A) \cdot \mathbf{E}_3(A), \\ \mathbf{a} &= a^1(B) \cdot \mathbf{E}_1(B) + a^2(B) \cdot \mathbf{E}_2(B) + a^3(B) \cdot \mathbf{E}_3(B) \end{aligned} \quad (8.1)$$

будут различаться. Если точки A и B близки друг к другу, то тройки векторов $\mathbf{E}_1(A), \mathbf{E}_2(A), \mathbf{E}_3(A)$ и $\mathbf{E}_1(B), \mathbf{E}_2(B), \mathbf{E}_3(B)$

мало отличаются друг от друга. Поэтому компоненты вектора \mathbf{a} в разложениях (8.1) также будут мало отличаться друг от друга. Это рассуждение показывает, что в криволинейных координатах параллельный перенос удобно производить постепенно: сначала совместить точку B с точкой A , а затем медленно перемещать ее в нужное положение, постоянно следя за компонентами вектора \mathbf{a} во втором разложении (8.1). Проще всего эту идею реализовать, если соединить точки A и B отрезком параметрической кривой: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, где t — параметр, принадлежащий отрезку $[0, 1]$ на числовой оси. В криволинейной системе координат параметрическая кривая задается тремя функциями $u^1(t)$, $u^2(t)$ и $u^3(t)$, которые для каждого значения $t \in [0, 1]$ задают координаты u^1, u^2, u^3 соответствующей точки на кривой.

ТЕОРЕМА 8.1. *Для параметрической кривой, которая задана функциями $u^1(t)$, $u^2(t)$ и $u^3(t)$ в некоторой криволинейной системе координат, компоненты касательного вектора $\boldsymbol{\tau}(t)$ в репере этой криволинейной системы координат определяются производными $\dot{u}^1(t)$, $\dot{u}^2(t)$ и $\dot{u}^3(t)$.*

Док-во. Криволинейные координаты u^1, u^2, u^3 задают положение точки в пространстве посредством вектор-функции $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2, u^3)$, где \mathbf{r} — радиус-вектор точки в некоторой вспомогательной декартовой системе координат (см. формулы (2.4) и (2.5)). Поэтому векторно-параметрическое уравнение кривой определяется так:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1(t), u^2(t), u^3(t)). \quad (8.2)$$

Продифференцируем функцию $\mathbf{r}(t)$ в (8.2) по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j} \cdot \dot{u}^j(t). \quad (8.3)$$

Но в силу формулы (2.7) частные производные в (8.3) совпадают с векторами репера криволинейной системы координат. Поэтому саму формулу (8.3) можно переписать в виде

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \sum_{j=1}^3 \dot{u}^j(t) \cdot \mathbf{E}_j(u^1(t), u^2(t), u^3(t)). \quad (8.4)$$

Но это и есть искомое разложение касательного вектора по векторам репера криволинейной системы координат. Компоненты вектора $\boldsymbol{\tau}(t)$ в разложении (8.4) совпадают с производными $\dot{u}^1(t)$, $\dot{u}^2(t)$ и $\dot{u}^3(t)$. Теорема доказана. \square

Пусть вектор \mathbf{a} разнесен параллельным переносом во все точки кривой, соединяющей точки A и B (см. рисунок 8.1). Тогда для него можно записать разложение

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a^i(t) \cdot \mathbf{E}_i(u^1(t), u^2(t), u^3(t)), \quad (8.5)$$

аналогичное разложению (8.4). Продифференцируем соотношение (8.5) и при этом учтем, что $\mathbf{a} = \text{const}$:

$$0 = \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \dot{a}^i \cdot \mathbf{E}_i + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a^i \frac{\partial \mathbf{E}_i}{\partial u^j} \dot{u}^j.$$

Теперь воспользуемся формулой (5.9) для дифференцирования векторов репера криволинейной системы координат. Это позволяет преобразовать полученное соотношение к виду:

$$\sum_{i=1}^3 \left(\dot{a}^i + \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \Gamma_{jk}^i \dot{u}^j a^k \right) \cdot \mathbf{E}_i = 0.$$

Отсюда в силу линейной независимости $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ получаем:

$$\dot{a}^i + \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \Gamma_{jk}^i \dot{u}^j a^k = 0. \quad (8.6)$$

Уравнение (8.6) называется *дифференциальным уравнением параллельного переноса векторов вдоль кривых*. По отношению к компонентам вектора \mathbf{a} — это система трех линейных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами. Для того, чтобы фактически выполнить параллельный перенос вектора \mathbf{a} из точки A в точку B в криволинейных координатах, надо решить задачу Коши для уравнений (8.6), задав начальные значения компонент вектора \mathbf{a} в точке A при $t = 0$.

Процедура параллельного перенесения векторов приводит нас к ситуации, когда к каждой точке кривой в \mathbb{E} прикреплен некоторый вектор. Такая же ситуация возникает при рассмотрении векторов $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{n} и \mathbf{b} , составляющих репер Френе (см. первую главу). Обобщая такую ситуацию, можно рассмотреть семейство тензоров типа (r, s) , прикрепленных к каждой точке некоторой кривой. Задание такого семейства тензоров отличается от задания тензорного поля в \mathbb{E} , ибо для задания тензорного поля мы должны прикрепить тензор к каждой точке пространства, а не только к точкам кривой. В случае, когда тензоры типа (r, s) заданы лишь в точках кривой, мы будем говорить о *тензорном поле типа (r, s) на кривой*. Для записи такого тензорного поля \mathbf{A} в компонентах мы можем использовать репер $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ некоторой криволинейной системы координат, заданной в некоторой окрестности точек кривой. При этом мы получим набор функций

$$A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(t). \quad (8.7)$$

При замене одной криволинейной системы координат на дру-

гию величины (8.7) преобразуются по известному правилу

$$A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(t) = \sum_{\substack{p_1 \dots p_r \\ q_1 \dots q_s}} S_{p_1}^{i_1}(t) \dots S_{p_r}^{i_r}(t) \times \\ \times T_{j_1}^{q_1}(t) \dots T_{j_s}^{q_s}(t) \tilde{A}_{q_1 \dots q_s}^{p_1 \dots p_r}(t), \quad (8.8)$$

где $S(t)$ и $T(t)$ — значения матриц перехода в точках кривой:

$$S(t) = S(\tilde{u}^1(t), \tilde{u}^2(t), \tilde{u}^3(t)), \\ \Gamma(t) = \Gamma(u^1(t), u^2(t), u^3(t)). \quad (8.9)$$

Для дифференцирования поля \mathbf{A} на кривой мы не можем использовать формулу (5.12), поскольку единственным аргументом, от которого зависят функции (8.7), является параметр t . Модифицируем формулу (5.12) следующим образом:

$$\nabla_t A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \frac{dA_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{dt} + \\ + \sum_{m=1}^r \sum_{q=1}^3 \sum_{v_m=1}^3 \Gamma_{q v_m}^{i_m} \dot{u}^q A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots v_m \dots i_r} - \\ - \sum_{n=1}^s \sum_{q=1}^3 \sum_{w_n=1}^3 \Gamma_{q j_n}^{w_n} \dot{u}^q A_{j_1 \dots w_n \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}. \quad (8.10)$$

Формула (8.10) выражает *правило ковариантного дифференцирования тензорного поля \mathbf{A} по параметру t вдоль параметрической кривой* в криволинейных координатах u^1, u^2, u^3 . Индекс t рядом со значком ∇ не есть дополнительный индекс как в формуле (5.12). Он лишь обозначает переменную, по которой выполняется дифференцирование.

ТЕОРЕМА 8.2. *При замене криволинейной системы координат u^1, u^2, u^3 на $\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{u}^3$ величины $B_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \nabla_t A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$, вычисленные по формуле (8.10), преобразуются по правилу (8.8) и*

задают тензорное поле $\mathbf{B} = \nabla_t \mathbf{A}$ типа (r, s) , называемое ковариантной производной поля \mathbf{A} по параметру t вдоль кривой.

Док-во. Доказательство этой теоремы производится прямым вычислением. Начнем с первого слагаемого в формуле (8.10). Выразим компоненты $A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ через компоненты поля \mathbf{A} в другой системе координат по формуле (8.8). При вычислении производных $dA_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}/dt$ это эквивалентно дифференцированию по t обеих частей соотношения (8.8):

$$\begin{aligned} \frac{dA_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{dt} &= \sum_{\substack{p_1 \dots p_r \\ q_1 \dots q_s}} S_{p_1}^{i_1} \dots S_{p_r}^{i_r} T_{j_1}^{q_1} \dots T_{j_s}^{q_s} \frac{d\tilde{A}_{q_1 \dots q_s}^{p_1 \dots p_r}}{dt} + \\ &+ \sum_{m=1}^r \sum_{\substack{p_1 \dots p_r \\ q_1 \dots q_s}} S_{p_1}^{i_1} \dots \dot{S}_{p_m}^{i_m} \dots S_{p_r}^{i_r} T_{j_1}^{q_1} \dots T_{j_s}^{q_s} \tilde{A}_{q_1 \dots q_s}^{p_1 \dots p_r} + \\ &+ \sum_{n=1}^s \sum_{\substack{p_1 \dots p_r \\ q_1 \dots q_s}} S_{p_1}^{i_1} \dots S_{p_r}^{i_r} T_{j_1}^{q_1} \dots \dot{T}_{j_n}^{q_n} \dots T_{j_s}^{q_s} \tilde{A}_{q_1 \dots q_s}^{p_1 \dots p_r}. \end{aligned} \quad (8.11)$$

При вычисления производных $\dot{S}_{p_m}^{i_m}$ и $\dot{T}_{j_n}^{q_n}$ в (8.11) используем то, что матрицы S и T являются обратными друг для друга:

$$\begin{aligned} \dot{S}_{p_m}^{i_m} &= \sum_{k=1}^3 \sum_{v_m=1}^3 \dot{S}_k^{i_m} T_{v_m}^k S_{p_m}^{v_m} = \sum_{v_m=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{d(S_k^{i_m} T_{v_m}^k)}{dt} S_{p_m}^{v_m} - \\ &- \sum_{v_m=1}^3 \sum_{k=1}^3 S_k^{i_m} \frac{dT_{v_m}^k}{dt} S_{p_m}^{v_m} = - \sum_{v_m=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 S_k^{i_m} \frac{dT_{v_m}^k}{dt} \right) S_{p_m}^{v_m}, \\ \dot{T}_{j_n}^{q_n} &= \sum_{k=1}^3 \sum_{w_n=1}^3 \dot{T}_{j_n}^k S_k^{w_n} T_{w_n}^{q_n} = \sum_{w_n=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 \frac{dT_{j_n}^k}{dt} S_k^{w_n} \right) T_{w_n}^{q_n}. \end{aligned}$$

Для дальнейшего преобразования полученных формул для

$\dot{S}_{p_m}^{i_m}$ и $\dot{T}_{j_n}^{q_n}$ воспользуемся второй формулой в (8.9):

$$\dot{S}_{p_m}^{i_m} = - \sum_{v_m=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 \sum_{q=1}^3 S_k^{i_m} \frac{\partial T_{v_m}^k}{\partial u^q} \dot{u}^q \right) S_{p_m}^{v_m}, \quad (8.12)$$

$$\dot{T}_{j_n}^{q_n} = \sum_{w_n=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 \sum_{q=1}^3 S_k^{w_n} \frac{\partial T_{j_n}^k}{\partial u^q} \dot{u}^q \right) T_{w_n}^{q_n}. \quad (8.13)$$

Подставим (8.12) и (8.13) в (8.11). После этого учет соотношения (8.8) позволяет выполнить суммирование по p_1, \dots, p_r и q_1, \dots, q_s во втором и в третьем слагаемом в (8.11), что преобразует формулу (8.11) к виду:

$$\begin{aligned} \frac{dA_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{dt} &= \sum_{\substack{p_1 \dots p_r \\ q_1 \dots q_s}} S_{p_1}^{i_1} \dots S_{p_r}^{i_r} T_{j_1}^{q_1} \dots T_{j_s}^{q_s} \frac{d\tilde{A}_{q_1 \dots q_s}^{p_1 \dots p_r}}{dt} - \\ &- \sum_{m=1}^r \sum_{q=1}^3 \sum_{v_m=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 S_k^{i_m} \frac{\partial T_{v_m}^k}{\partial u^q} \right) \dot{u}^q A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots v_m \dots i_r} + \\ &+ \sum_{n=1}^s \sum_{q=1}^3 \sum_{w_n=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 S_k^{w_n} \frac{\partial T_{j_n}^k}{\partial u^q} \right) \dot{u}^q A_{j_1 \dots w_n \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Второе и третье слагаемые в формулах (8.10) и (8.14) имеют сходное строение. Это позволяет привести подобные слагаемые после подстановки (8.14) в (8.10). В качестве коэффициентов в результате приведения подобных слагаемых выделяются следующие два выражения:

$$\Gamma_{q v_m}^{i_m} = \sum_{k=1}^3 S_k^{i_m} \frac{\partial T_{v_m}^k}{\partial u^q}, \quad \Gamma_{q j_n}^{w_n} = \sum_{k=1}^3 S_k^{w_n} \frac{\partial T_{j_n}^k}{\partial u^q}.$$

К этим двум выражениям применим формулу (6.1):

$$\begin{aligned}\Gamma_q^{i_m} v_m - \sum_{k=1}^3 S_k^{i_m} \frac{\partial T_{v_m}^k}{\partial u^q} &= \sum_{r=1}^3 \sum_{p=1}^3 \sum_{k=1}^3 S_r^{i_m} \tilde{\Gamma}_{pk}^r T_q^p T_{v_m}^k, \\ \Gamma_q^{w_n} j_n - \sum_{k=1}^3 S_k^{w_n} \frac{\partial T_{j_n}^k}{\partial u^q} &= \sum_{r=1}^3 \sum_{p=1}^3 \sum_{k=1}^3 S_r^{w_n} \tilde{\Gamma}_{pk}^r T_q^p T_{j_n}^k.\end{aligned}\quad (8.15)$$

Учтем соотношения (8.15) при подстановке (8.14) в (8.10). Это позволяет записать соотношение (8.10) в форме:

$$\begin{aligned}\nabla_t A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} &= \sum_{\substack{p_1 \dots p_r \\ q_1 \dots q_s}} S_{p_1}^{i_1} \dots S_{p_r}^{i_r} T_{j_1}^{q_1} \dots T_{j_s}^{q_s} \frac{d\tilde{A}_{q_1 \dots q_s}^{p_1 \dots p_r}}{dt} + \\ &+ \sum_{m=1}^r \sum_{q=1}^3 \sum_{v_m=1}^3 \sum_{p_m=1}^3 \sum_{p=1}^3 \sum_{k=1}^3 S_{p_m}^{i_m} \tilde{\Gamma}_{pk}^{p_m} T_q^p T_{v_m}^k \dot{u}^q A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots v_m \dots i_r} - \\ &- \sum_{n=1}^s \sum_{q=1}^3 \sum_{w_n=1}^3 \sum_{q_n=1}^3 \sum_{p=1}^3 \sum_{k=1}^3 S_k^{w_n} \tilde{\Gamma}_{pq_n}^k T_q^p T_{j_n}^{q_n} \dot{u}^q A_{j_1 \dots w_n \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}.\end{aligned}$$

Для дальнейшего преобразования полученной формулы выразим компоненты $A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots v_m \dots i_r}$ и $A_{j_1 \dots w_n \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ поля \mathbf{A} через компоненты этого же поля в другой системе координат по формуле (8.8). Кроме того, учтем, что $T_q^p \dot{u}^q$ после суммирования по q переходит в \dot{u}^p . Это дает:

$$\begin{aligned}\nabla_t A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} &= \sum_{\substack{p_1 \dots p_r \\ q_1 \dots q_s}} S_{p_1}^{i_1} \dots S_{p_r}^{i_r} T_{j_1}^{q_1} \dots T_{j_s}^{q_s} \times \\ &\times \left(\frac{d\tilde{A}_{q_1 \dots q_s}^{p_1 \dots p_r}}{dt} + \sum_{m=1}^r \sum_{p=1}^3 \sum_{v_m=1}^3 \tilde{\Gamma}_{pv_m}^{p_m} \dot{u}^p \tilde{A}_{q_1 \dots q_s}^{p_1 \dots v_m \dots p_r} - \right. \\ &\left. - \sum_{n=1}^s \sum_{p=1}^3 \sum_{w_n=1}^3 \tilde{\Gamma}_{pw_n}^{w_n} \dot{u}^p \tilde{A}_{q_1 \dots w_n \dots q_s}^{p_1 \dots p_r} \right).\end{aligned}\quad (8.16)$$

Но выражение, заключенное в скобки в (8.16), — это в точности $\nabla_t \tilde{A}_{q_1 \dots q_s}^{p_1 \dots p_r}$. Поэтому компоненты поля $\nabla_t \mathbf{A}$ на кривой, вычисляемые по формуле (8.10), при замене координат преобразуются по формуле (8.8). Теорема 8.2 доказана. \square

Возвратимся теперь к формуле (8.6). Левая часть этой формулы совпадает с выражением (8.10) для ковариантной производной по t векторного поля \mathbf{a} . Поэтому уравнение параллельного переноса можно записать в виде: $\nabla_t \mathbf{a} = 0$. В такой форме уравнение параллельного переноса легко обобщается на случай произвольного тензора \mathbf{A} :

$$\nabla_t \mathbf{A} = 0. \quad (8.17)$$

Уравнение (8.17) не может быть выведено непосредственным образом, ибо параллельный перенос произвольных тензоров не имеет наглядного изображения, подобного рисунку 8.1.

Рассмотрим фрагмент прямой линии, заданный параметрически функциями $u^1(t)$, $u^2(t)$ и $u^3(t)$ в криволинейной системе координат. Пусть $t = s$ — натуральный параметр на этой прямой. Тогда касательный вектор $\boldsymbol{\tau}(t)$ во всех точках прямой имеет единичную длину и одно и то же направление. Поэтому его компоненты \dot{u}^i удовлетворяют уравнению параллельного переноса. Подставив $a^i = \dot{u}^i$ в (8.6), получим

$$\ddot{u}^i + \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \Gamma_{jk}^i \dot{u}^j \dot{u}^k = 0. \quad (8.18)$$

Уравнение (8.18) — это дифференциальное уравнение прямой в криволинейных координатах (в натуральном параметре).

§ 9. Некоторые вычисления в полярных, цилиндрических и сферических координатах.

Рассмотрим полярную систему координат на плоскости, задаваемую формулами (1.1). Дифференцируя (1.1), находим

компоненты векторов репера полярной системы координат:

$$\mathbf{E}_1 = \left\| \begin{array}{c} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{array} \right\|, \quad \mathbf{E}_2 = \left\| \begin{array}{c} -\rho \sin(\varphi) \\ \rho \cos(\varphi) \end{array} \right\|. \quad (9.1)$$

Вектор-столбцы (9.1) составлены из координат векторов \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 в ортонормированном базисе. Это позволяет вычислить их скалярные произведения и определить компоненты прямого и обратного метрических тензоров \mathbf{g} или $\hat{\mathbf{g}}$:

$$g_{ij} = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{array} \right\|, \quad g^{ij} = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & \rho^{-2} \end{array} \right\|. \quad (9.2)$$

По известным компонентам тензоров \mathbf{g} и $\hat{\mathbf{g}}$ вычислим символы Кристоффеля. Для этого применим формулу (7.8):

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0, & \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = 0, & \Gamma_{22}^1 &= -\rho, \\ \Gamma_{11}^2 &= 0, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \rho^{-1}, & \Gamma_{22}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Применим найденные компоненты связности (9.3) для вычисления оператора Лапласа Δ в полярных координатах. Пусть ψ — некоторое скалярное поле: $\psi = \psi(\rho, \varphi)$. Тогда:

$$\Delta\psi = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 g^{ij} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^i \partial u^j} - \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \psi}{\partial u^k} \right). \quad (9.4)$$

Формула (9.4) — это двумерный вариант формулы (10.16) из второй главы, записанный применительно к скалярному полю. Подстановка (9.3) в (9.4) дает:

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}. \quad (9.5)$$

Теперь перейдем к рассмотрению цилиндрической системы координат. Для компонент метрических тензоров здесь имеем:

$$g_{ij} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (9.6)$$

Из (9.6) на основе формулы (7.8) вычисляем компонентны связности. Они образуют следующий массив:

$$\begin{array}{lll} \Gamma_{11}^1 = 0, & \Gamma_{12}^1 = 0, & \Gamma_{21}^1 = 0, \\ \Gamma_{13}^1 = 0, & \Gamma_{31}^1 = 0, & \Gamma_{22}^1 = -\rho, \\ \Gamma_{23}^1 = 0, & \Gamma_{32}^1 = 0, & \Gamma_{33}^1 = 0, \end{array} \quad (9.7)$$

$$\begin{array}{lll} \Gamma_{11}^2 = 0, & \Gamma_{12}^2 = \rho^{-1}, & \Gamma_{21}^2 = \rho^{-1}, \\ \Gamma_{13}^2 = 0, & \Gamma_{31}^2 = 0, & \Gamma_{22}^2 = 0, \\ \Gamma_{23}^2 = 0, & \Gamma_{32}^2 = 0, & \Gamma_{33}^2 = 0, \end{array} \quad (9.8)$$

$$\begin{array}{lll} \Gamma_{11}^3 = 0, & \Gamma_{12}^3 = 0, & \Gamma_{21}^3 = 0, \\ \Gamma_{13}^3 = 0, & \Gamma_{31}^3 = 0, & \Gamma_{22}^3 = 0, \\ \Gamma_{23}^3 = 0, & \Gamma_{32}^3 = 0, & \Gamma_{33}^3 = 0. \end{array} \quad (9.9)$$

Перепишем в размерности 3 соотношение (9.4) для оператора Лапласа, примененного к скалярному полю ψ :

$$\Delta\psi = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g^{ij} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^i \partial u^j} - \sum_{k=1}^3 \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \psi}{\partial u^k} \right). \quad (9.10)$$

Подстановка (9.7), (9.8) и (9.9) в формулу (9.10) дает:

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial h^2}. \quad (9.11)$$

Вычислим также формулу для компонент ротора в цилиндрических координатах. Пусть \mathbf{A} — векторное поле с компонентами A^1 , A^2 и A^3 в цилиндрических координатах. Для вычисления компонент поля $\mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{A}$ воспользуемся формулой (10.5) из второй главы. Эта формула содержит тензор объема, компоненты которого вычисляются по формуле (8.1) из второй главы. Знаковый множитель ξ_E в этой формуле определяется ориентацией системы координат. Цилиндрическая система координат может быть как правоориентированной, так и левоориентированной. Это зависит от выбора ориентации вспомогательной декартовой системы координат x^1, x^2, x^3 , с которой цилиндрические координаты связаны соотношениями (1.3). Пусть для определенности выбраны правоориентированные цилиндрические координаты, тогда $\xi_E = 1$ и для компонент ротора $\mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{A}$ имеем формулу:

$$F^m = \sqrt{\det \mathbf{g}} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{q=1}^3 g^{mi} \varepsilon_{ijk} g^{jq} \nabla_q F^k. \quad (9.12)$$

Использование (9.7), (9.8), (9.9) и (9.6) при вычислениях по формуле (9.12) дает:

$$\begin{aligned} F^1 &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial A^3}{\partial\varphi} - \rho \frac{\partial A^2}{\partial h}, \\ F^2 &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial A^1}{\partial h} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A^3}{\partial\rho}, \\ F^3 &= \rho \frac{\partial A^2}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A^1}{\partial\varphi} + 2A^2. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Соотношения (9.13) можно записать в виде детерминанта:

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{E}_1 & \mathbf{E}_2 & \mathbf{E}_3 \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial h} \\ A^1 & \rho^2 A^2 & A^3 \end{vmatrix}, \quad (9.14)$$

где $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ — репер цилиндрической системы координат.

Вычисления в сферических координатах также начнем с нахождения компонент метрического тензора \mathbf{g} :

$$g_{ij} = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \sin^2(\vartheta) \end{array} \right\|. \quad (9.15)$$

Теперь вычислим компоненты связности:

$$\begin{array}{lll} \Gamma_{11}^1 = 0, & \Gamma_{12}^1 = 0, & \Gamma_{21}^1 = 0, \\ \Gamma_{13}^1 = 0, & \Gamma_{31}^1 = 0, & \Gamma_{22}^1 = -\rho, \\ \Gamma_{23}^1 = 0, & \Gamma_{32}^1 = 0, & \Gamma_{33}^1 = -\rho \sin^2(\vartheta), \end{array} \quad (9.16)$$

$$\begin{array}{lll} \Gamma_{11}^2 = 0, & \Gamma_{12}^2 = \rho^{-1}, & \Gamma_{21}^2 = \rho^{-1}, \\ \Gamma_{13}^2 = 0, & \Gamma_{31}^2 = 0, & \Gamma_{22}^2 = 0, \end{array} \quad (9.17)$$

$$\begin{array}{lll} \Gamma_{23}^2 = 0, & \Gamma_{32}^2 = 0, & \Gamma_{33}^2 = -\frac{\sin(2\vartheta)}{2}, \\ \Gamma_{11}^3 = 0, & \Gamma_{12}^3 = 0, & \Gamma_{21}^3 = 0, \\ \Gamma_{13}^3 = \rho^{-1}, & \Gamma_{31}^3 = \rho^{-1}, & \Gamma_{22}^3 = 0, \\ \Gamma_{23}^3 = \operatorname{ctg}(\vartheta), & \Gamma_{32}^3 = \operatorname{ctg}(\vartheta), & \Gamma_{33}^3 = 0. \end{array} \quad (9.18)$$

Подстановка (9.16), (9.17) и (9.18) в соотношение (9.10) дает:

$$\begin{aligned} \Delta\psi = & \frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\vartheta^2} + \\ & + \frac{\operatorname{ctg}(\vartheta)}{\rho^2} \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2(\vartheta)} \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Пусть \mathbf{A} — векторное поле с компонентами A^1 , A^2 и A^3 в правоориентированных сферических координатах. Обозначим $\mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$. Тогда для компонент \mathbf{F} имеем:

$$\begin{aligned} F^1 &= \sin(\vartheta) \frac{\partial A^3}{\partial\vartheta} - \frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial A^2}{\partial\varphi} + 2 \cos(\vartheta) A^3, \\ F^2 &= \frac{1}{\rho^2 \sin(\vartheta)} \frac{\partial A^1}{\partial\varphi} - \sin(\vartheta) \frac{\partial A^3}{\partial\rho} - \frac{2 \sin(\vartheta)}{\rho} A^3, \\ F^3 &= \frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial A^2}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho^2 \sin(\vartheta)} \frac{\partial A^1}{\partial\vartheta} + \frac{2}{\rho \sin(\vartheta)} A^2. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Так же, как и (9.13), формулы (9.20) можно записать в виде формального детерминанта:

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{\rho^{-2}}{\sin(\vartheta)} \begin{vmatrix} \mathbf{E}_1 & \mathbf{E}_2 & \mathbf{E}_3 \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\vartheta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ A^1 & \rho^2 A^2 & \rho^2 \sin^2(\vartheta) A^3 \end{vmatrix}. \quad (9.21)$$

Формулы (9.5), (9.11) и (9.19) для оператора Лапласа и формулы (9.14) и (9.21) для ротора являются основной целью проделанных вычислений. Они довольно часто встречаются в прикладных задачах и даже иногда приводятся в справочниках для инженерных расчетов.

Матрицы \mathbf{g} для всех рассмотренных выше систем координат диагональны. Такие криволинейные системы координат называются *ортогональными*, а величины $H_i = \sqrt{g_{ii}}$ называются *коэффициентами Ламэ* ортогональных систем. Отметим, что ортонормированных криволинейных систем координат не бывает. Все такие системы обязательно являются декартовыми, что вытекает из (7.8) и (5.9).

ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ.**§ 1. Параметрическое задание поверхностей.
Криволинейные координаты на поверхности.**

Поверхность — это двумерно протяженный геометрический объект. Существует несколько способов для количественного (математического) выражения этого факта двумерности поверхностей. В трехмерном евклидовом пространстве \mathbb{E} выбор произвольной точки имеет три степени произвола: точка задается тремя координатами. Для того, чтобы уменьшить этот произвол, свяжем три координаты точки уравнением:

$$F(x^1, x^2, x^3) = 0. \quad (1.1)$$

Тогда выбор двух координат определяет выбор третьей. Это задание поверхности ее уравнением в некоторой системе координат (для удобства можно выбрать декартову систему координат). С таким способом задания поверхностей мы уже встречались (см. формулу (1.2) в первой главе) при задании кривой как пересечения двух поверхностей.

Другой способ задания поверхности — параметрический. В отличие от кривых, поверхности параметризуются двумя параметрами. Обозначим их через u^1 и u^2 :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2) = \left\| \begin{array}{l} x^1(u^1, u^2) \\ x^2(u^1, u^2) \\ x^3(u^1, u^2) \end{array} \right\|. \quad (1.2)$$

Формула (1.2) выражает радиус-вектор точек поверхности в некоторой декартовой системе координат как функцию двух параметров u^1, u^2 . Обычно в параметрической форме задают лишь некоторый фрагмент поверхности. Поэтому, рассматривая пару чисел (u^1, u^2) как точку из \mathbb{R}^2 , мы можем считать, что точка (u^1, u^2) пробегает некоторую область $U \subset \mathbb{R}^2$. Обозначим через D образ области U при отображении (1.2). Тогда D — это *картируемый фрагмент* поверхности, U — это *карта*, а отображение (1.2) проектирует карту U на D .

Класс гладкости поверхности D определяется гладкостью функций $x^1(u^1, u^2)$, $x^2(u^1, u^2)$ и $x^3(u^1, u^2)$ в (1.2). В дальнейшем мы будем рассматривать лишь поверхности, для которых эти функции, как минимум, непрерывно дифференцируемы. Тогда из их производных можно организовать матрицу Якоби:

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x^3}{\partial u^1} & \frac{\partial x^3}{\partial u^2} \end{vmatrix}. \quad (1.3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Непрерывно дифференцируемое отображение (1.2) называется *регулярным* в точке (u^1, u^2) , если матрица Якоби (1.3), вычисленная в этой точке, имеет ранг 2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Множество D называется *регулярным фрагментом* непрерывно дифференцируемой поверхности, если задано картирующее отображение $\mathbf{u} : D \rightarrow U$ из D в некоторую область $U \subset \mathbb{R}^2$ и выполнены следующие условия:

- (1) картирующее отображение $\mathbf{u} : D \rightarrow U$ биективно;
- (2) обратное отображение $\mathbf{u}^{-1} : U \rightarrow D$, задаваемое тремя непрерывно дифференцируемыми функциями (1.2), регулярно во всех точках области U .

Матрица Якоби (1.3) имеет три минора порядка 2. Это следующие детерминанты матриц размера 2×2 :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x^3}{\partial u^1} & \frac{\partial x^3}{\partial u^2} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial x^3}{\partial u^1} & \frac{\partial x^3}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} \end{vmatrix}. \quad (1.4)$$

В случае регулярности отображения (1.2), по крайней мере, один из определителей (1.4) отличен от нуля. За счет перестановки декартовых координат x^1, x^2, x^3 мы всегда можем добиться того, что будет отличен от нуля первый детерминант:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (1.5)$$

В этом случае рассмотрим первые две функции $x^1(u^2, u^2)$ и $x^2(u^2, u^2)$ из (1.2) как отображение, записав их так:

$$\begin{cases} x^1 = x^1(u^1, u^2), \\ x^2 = x^2(u^1, u^2). \end{cases} \quad (1.6)$$

При выполнении условия (1.5) отображение (1.6) локально обратимо. После сужения (1.6) на некоторую достаточно малую окрестность произвольной наперед заданной точки можно построить две непрерывно дифференцируемые функции:

$$\begin{cases} u^1 = u^1(x^1, x^2), \\ u^2 = u^2(x^1, x^2), \end{cases} \quad (1.7)$$

реализующие обратное отображение для (1.6). Этот факт хорошо известен, он составляет один из вариантов теоремы

о неявных функциях (см. [2], см. также теорему 2.1 в третьей главе). Подставим u^1 и u^2 из (1.7) в аргументы третьей функции $x^3(u^1, u^2)$, задающей отображение (1.2). Это определяет функцию $F(x^1, x^2) = x^3(u^1(x^2, x^2), u^2(x^2, x^2))$, и каждый регулярный фрагмент поверхности можно локально (в окрестности каждой его точки) задать в форме графика непрерывно дифференцируемой функции двух переменных:

$$x^3 = F(x^1, x^2). \quad (1.8)$$

Замечание об особых точках. Отказ от условия регулярности в определении 1.2 может привести к появлению особых точек на поверхности. В качестве примера можно рассмотрим две поверхности, задаваемые гладкими функциями:

$$\begin{cases} x^1 = (u^1)^3, \\ x^2 = (u^2)^3, \\ x^3 = (u^1)^2 + (u^2)^2, \end{cases} \quad \begin{cases} x^1 = (u^1)^3, \\ x^2 = (u^2)^3, \\ x^3 = (u^1)^4 + (u^2)^4. \end{cases} \quad (1.9)$$

В обоих случаях условие регулярности параметризации нарушается при $u^1 = u^2 = 0$. В результате этого у первой поверхности (1.9) имеется особая точка в начале координат, а вторая поверхность особых точек не имеет.

Выделение регулярного фрагмента D на поверхности и задание картирующего отображения $\mathbf{u}^{-1}: U \rightarrow D$ можно рассматривать как введение криволинейной системы координат на поверхности. Условия $u^1 = \text{const}$ и $u^2 = \text{const}$ выделяют два семейства координатных прямых в плоскости параметров u^1, u^2 . Они образуют координатную сетку в карте U . Отображение (1.2) переводит ее в координатную сетку на поверхности D (см рисунки 1.1 и 1.2 ниже). Рассмотрим касательные векторы к кривым координатной сетки на D :

$$\mathbf{E}_i(u^1, u^2) = \frac{\partial \mathbf{r}(u^1, u^2)}{\partial u^i}. \quad (1.10)$$

Формула (1.10) определяет пару касательных векторов \mathbf{E}_1 и

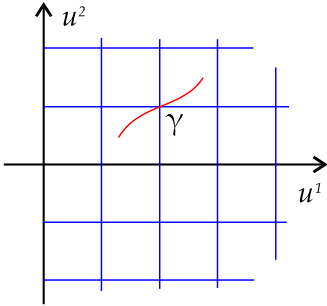


Рис. 1.1

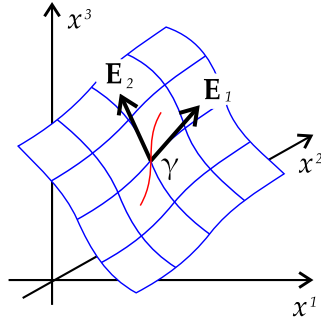


Рис. 1.2

\mathbf{E}_2 , прикрепленных к каждой точке поверхности D .

Вектор-функция $\mathbf{r}(u^1, u^2)$, задающая отображение (1.2), может быть записана в виде разложения

$$\mathbf{r}(u^1, u^2) = \sum_{q=1}^3 x^q(u^1, u^2) \cdot \mathbf{e}_q. \quad (1.11)$$

Подстановка (1.11) в (1.10) позволяет выразить касательные вектора \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 через базисные вектора $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ вспомогательной декартовой системы координат:

$$\mathbf{E}_i(u^1, u^2) = \sum_{q=1}^3 \frac{\partial x^q(u^1, u^2)}{\partial u^i} \cdot \mathbf{e}_q. \quad (1.12)$$

Рассмотрим вектор-столбцы, составленные из декартовых координат касательных векторов \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 :

$$\mathbf{E}_1 = \begin{Bmatrix} \partial x^1 / \partial u^1 \\ \partial x^2 / \partial u^1 \\ \partial x^3 / \partial u^1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{E}_2 = \begin{Bmatrix} \partial x^1 / \partial u^2 \\ \partial x^2 / \partial u^2 \\ \partial x^3 / \partial u^2 \end{Bmatrix}. \quad (1.13)$$

Заметим, что вектор-столбцы (1.13) совпадают со столбцами в матрице Якоби (1.3). Но из условия регулярности (см. определение 1.1) вытекает линейная независимость двух столбцов матрицы Якоби (1.3). В результате приведенных рассуждений мы доказали следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.1. *Касательные вектора \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 линейно независимы в каждой точке поверхности, в силу чего, они формируют репер из касательных векторных полей в D .*

Вектора репера \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 , прикрепленные в некоторой точке, определяют касательную плоскость к поверхности D в этой точке. Любой касательный вектор к поверхности в этой точке лежит в касательной плоскости и раскладывается по векторам \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 . Рассмотрим некоторую произвольную кривую γ , целиком лежащую на поверхности (см. рисунки 1.1 и 1.2). В параметрической форме такая кривая задается двумя функциями параметра t , задающими точки кривой:

$$\begin{cases} u^1 = u^1(t), \\ u^2 = u^2(t). \end{cases} \quad (1.14)$$

Подставив (1.14) в (1.11) либо в (1.2), мы найдем радиус-вектор точек кривой во вспомогательной декартовой системе координат: $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(u^1(t), u^2(t))$. Продифференцируем $\mathbf{r}(t)$ по t и найдем касательный вектор к кривой (1.14):

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \cdot \frac{du^i}{dt}.$$

Сравнив полученное выражение с (1.10), для $\boldsymbol{\tau}$ получаем:

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \sum_{i=1}^2 \dot{u}^i \cdot \mathbf{E}_i. \quad (1.15)$$

В силу (1.15) вектор τ есть линейная комбинация векторов касательного репера \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 . Значит, если кривая γ целиком лежит на поверхности, то ее касательный вектор лежит в касательной плоскости к поверхности, а производные функций (1.14) — это координаты вектора τ в репере \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 .

§ 2. Замена криволинейных координат на поверхности.

Рассмотрим два регулярных фрагмента D_1 и D_2 на некоторой поверхности, на каждом из которых задана своя криволинейная система координат. Пусть их пересечение $D = D_1 \cap D_2$ непусто. Тогда в D задано две криволинейные системы u^1, u^2 и \tilde{u}^1, \tilde{u}^2 . Обозначим через U и \tilde{U} образы области D при соответствующих картирующих отображениях (см. рисунок 3.1 в третьей главе). Биjectивность картирующих отображений (см. определение 1.2) позволяет построить два отображения:

$$\tilde{\mathbf{u}} \circ \mathbf{u}^{-1} : U \rightarrow \tilde{U}, \quad \mathbf{u} \circ \tilde{\mathbf{u}}^{-1} : \tilde{U} \rightarrow U. \quad (2.1)$$

Отображения $\tilde{\mathbf{u}} \circ \mathbf{u}^{-1}$ и $\mathbf{u} \circ \tilde{\mathbf{u}}^{-1}$ в (2.1) биjectивны, их можно представить следующими парами функций:

$$\begin{cases} \tilde{u}^1 = \tilde{u}^1(u^1, u^2), \\ \tilde{u}^2 = \tilde{u}^2(u^1, u^2). \end{cases} \quad \begin{cases} u^1 = u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), \\ u^2 = u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2). \end{cases} \quad (2.2)$$

ТЕОРЕМА 2.1. *Функции (2.2), представляющие отображения $\tilde{\mathbf{u}} \circ \mathbf{u}^{-1}$ и $\mathbf{u} \circ \tilde{\mathbf{u}}^{-1}$, непрерывно дифференцируемы.*

ДОК-ВО. Докажем непрерывную дифференцируемость второй пары функций (2.2). Для первой пары функций доказательство аналогично. Выберем некоторую точку в карте U и отображим ее на D . Подберем подходящую декартову систему координат в пространстве \mathbb{E} так, чтобы было выполнено

условие (1.5) и в некоторой окрестности полученной точки существовало отображение (1.7), обратное для (1.6). Отображение (1.7) непрерывно дифференцируемо.

Существование второй криволинейной системы координат в D определяет еще одну пару функций типа (1.6):

$$\begin{cases} x^1 = x^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), \\ x^2 = x^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2). \end{cases} \quad (2.3)$$

Это две из трех функций, задающих отображение $\tilde{\mathbf{u}}^{-1}$ в форме (1.2). А функции $u^1 = u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$ и $u^2 = u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$, определяющие отображение $\mathbf{u} \circ \tilde{\mathbf{u}}^{-1}$ в форме (2.2), получаются подстановкой (2.3) в аргументы (1.7).

$$\begin{cases} u^1 = u^1(x^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), x^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)), \\ u^2 = u^2(x^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), x^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)). \end{cases} \quad (2.4)$$

Композиции непрерывно дифференцируемых функций (2.4) непрерывно дифференцируемы. Это завершает доказательство теоремы. \square

Функции (2.2), непрерывную дифференцируемость которых мы доказали, осуществляют *преобразование* или *замену* криволинейных координат на поверхности. Они аналогичны функциям (3.5), которые мы рассматривали в третьей главе.

Замечание о гладкости. Если функции (1.2) принадлежат классу гладкости C^m для обеих криволинейных систем координат u^1, u^2 и \tilde{u}^1, \tilde{u}^2 , то функции перехода (2.2) также принадлежат классу гладкости C^m .

Пусть $\mathbf{r}(u^1, u^2)$ и $\mathbf{r}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$ — две вектор-функции из (1.2) для двух криволинейных систем координат в D . Они задают отображения \mathbf{u}^{-1} и $\tilde{\mathbf{u}}^{-1}$, действующие из карт U и \tilde{U} в D . Но $\tilde{\mathbf{u}}^{-1} = \mathbf{u}^{-1} \circ (\mathbf{u} \circ \tilde{\mathbf{u}}^{-1})$. Поэтому функция $\mathbf{r}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$ получается

подстановкой соответствующих функций перехода из (2.2) в аргументы функции $\mathbf{r}(u^1, u^2)$:

$$\mathbf{r}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) = \mathbf{r}(u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)). \quad (2.5)$$

Продифференцируем соотношение (2.5) по переменной \tilde{u}^j , учтем при этом правило дифференцирования сложной функции и формулу (1.10) для векторов касательного репера:

$$\tilde{\mathbf{E}}_j = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tilde{u}^j} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^j} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^j} \cdot \mathbf{E}_i.$$

Дифференцируя функцию $\mathbf{r}(u^1, u^2) = \mathbf{r}(\tilde{u}^1(u^1, u^2), \tilde{u}^2(u^1, u^2))$, выводим аналогичное соотношение

$$\mathbf{E}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tilde{u}^k} \cdot \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^i} = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^i} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_k,$$

выражающее вектора $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ через вектора $\tilde{\mathbf{E}}_1, \tilde{\mathbf{E}}_2$. Ясно, что полученные соотношения задают прямой и обратный переход из одного репера в другой. Запишем их в форме

$$\tilde{\mathbf{E}}_j = \sum_{i=1}^2 S_j^i \cdot \mathbf{E}_i, \quad \mathbf{E}_i = \sum_{k=1}^2 T_i^k \cdot \tilde{\mathbf{E}}_k, \quad (2.6)$$

где компоненты матриц S и T определяются формулами:

$$S_j^i(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) = \frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^j}, \quad T_i^k(u^1, u^2) = \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^i}. \quad (2.7)$$

Из (2.7) видим, что матрицы перехода S и T — это матрицы Якоби отображений, заданных функциями перехода (2.2). Они невырождены и являются обратными друг для друга.

Преобразования (2.2) и связанные с ними матрицы перехода S и T используются для построения теории тензоров и тензорных полей, аналогичной той, что мы рассматривали во второй и третьей главах. При этом надо учесть лишь отличие в размерности — это 2 вместо 3. Тензоры и тензорные поля, при построении которых используются преобразования (2.2) и матрицы перехода (2.7), называются *внутренними* тензорами и тензорными полями на поверхности.

$$F_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \sum_{\substack{p_1 \dots p_r \\ q_1 \dots q_s}} S_{p_1}^{i_1} \dots S_{p_r}^{i_r} T_{j_1}^{q_1} \dots T_{j_s}^{q_s} \tilde{F}_{q_1 \dots q_s}^{p_1 \dots p_r}. \quad (2.8)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Внутренним тензором типа (r, s) на поверхности называется геометрический объект \mathbf{F} , компоненты которого в произвольной криволинейной системе координат на этой поверхности нумеруются $(r + s)$ индексами и при замене системы координат преобразуются по правилу (2.8).

Формула (2.8) отличается от соответствующей формулы (1.6) во второй главе лишь диапазоном изменения индексов. Каждый индекс здесь пробегает ровно два значения от 1 до 2. Добавив знаковый множитель $(-1)^S = \text{sign}(\det S) = \pm 1$ в формулу (2.8), мы получим определение псевдотензора.

$$F_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \sum_{\substack{p_1 \dots p_r \\ q_1 \dots q_s}} (-1)^S S_{p_1}^{i_1} \dots S_{p_r}^{i_r} T_{j_1}^{q_1} \dots T_{j_s}^{q_s} \tilde{F}_{q_1 \dots q_s}^{p_1 \dots p_r}, \quad (2.9)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Внутренним псевдотензором типа (r, s) на поверхности называется геометрический объект \mathbf{F} , компоненты которого в произвольной криволинейной системе координат на этой поверхности нумеруются $(r + s)$ индексами и при замене системы координат преобразуются по правилу (2.9).

Внутренние тензорные и псевдотензорные поля получаются заданием внутреннего тензора или псевдотензора в каждой

точке поверхности. Операции сложения, тензорного умножения, свертывания, перестановки индексов, симметрирования и альтернирования для таких полей определяются точно так же, как и для полей в пространстве \mathbb{E} (см. вторую главу). Сохраняются и все свойства таких операций.

Замечание о дифференцировании. Операция ковариантного дифференцирования тензорных полей в пространстве \mathbb{E} была первоначально определена в декартовых системах координат. Затем она была распространена на произвольные криволинейные системы координат. На поверхностях, как правило, декартовых координат не существует. Поэтому введение операции дифференцирования для внутренних тензорных полей должно производиться несколько иначе.

§ 3. Метрический тензор и тензор площади.

Выбор параметризации u^1, u^2 на поверхности определяет касательный репер $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ на этой поверхности. Рассмотрим скалярные произведения векторов касательного репера

$$g_{ij} = (\mathbf{E}_i | \mathbf{E}_j). \quad (3.1)$$

Они образуют матрицу Грама \mathbf{g} размером 2×2 , которая симметрична, невырождена и положительно определена. Поэтому

$$\det \mathbf{g} > 0. \quad (3.2)$$

Подстановка (2.6) в (3.1) показывает, что при замене системы координат величины (3.1) преобразуются как компоненты внутреннего тензорного поля типа $(0, 2)$. Тензор \mathbf{g} с компонентами (3.1) называется *метрическим тензором* на поверхности. Заметим, что компоненты метрического тензора определяются при помощи скалярного произведения во внешнем пространстве \mathbb{E} . Поэтому говорят, что тензорное поле \mathbf{g} *индуцируется*

внешним скалярным произведением. В этой связи тензор \mathbf{g} называется метрическим тензором *индуцированной метрики*.

Симметричные тензоры типа $(0, 2)$ связаны с квадратичными формами. Это определяет еще одно название для \mathbf{g} . Он называется *первой квадратичной формой* поверхности. Часто для компонент первой квадратичной формы используются специальные обозначения: $g_{11} = E$, $g_{12} = g_{21} = F$, $g_{22} = G$. Эти обозначения особенно в более ранних изданиях.

$$g_{ij} = \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} \quad (3.3)$$

Невырожденность матрицы Грама \mathbf{g} позволяет определить обратную матрицу $\hat{\mathbf{g}} = \mathbf{g}^{-1}$. Компоненты такой матрицы обозначим g^{ij} , поместив индексы i и j наверху:

$$\sum_{j=1}^3 g^{ij} g_{jk} = \delta_j^i. \quad (3.4)$$

Для матрицы $\hat{\mathbf{g}}$ имеет место утверждение, аналогичное теореме 6.1 из второй главы. Компоненты этой матрицы определяют внутренне тензорное поле типа $(2, 0)$ на поверхности, называемое *обратным метрическим тензором*. Доказательство аналогично доказательству теоремы 6.1 во второй главе.

Из симметричности матрицы \mathbf{g} и соотношений (3.4) вытекает симметричность обратной матрицы $\hat{\mathbf{g}}$. Прямой и обратный метрические тензоры используются для опускания и поднятия индексов тензорных полей. Эти операции по-прежнему определяются формулами (9.1) и (9.2) из второй главы:

$$B_{j_1 \dots j_{s+1}}^{i_1 \dots i_{r-1}} = \sum_{k=1}^2 A_{j_1 \dots j_{n-1} j_{n+1} \dots j_{s+1}}^{i_1 \dots i_{m-1} k i_m \dots i_{r-1}} g_{kj_n}. \quad (3.5)$$

$$A_{j_1 \dots j_{s-1}}^{i_1 \dots i_{r+1}} = \sum_{k=1}^2 B_{j_1 \dots j_{n-1} q j_n \dots j_{s-1}}^{i_1 \dots i_{m-1} i_{m+1} \dots i_{r+1}} g^{q i_m}.$$

Единственным отличием формул (3.5) здесь является то, что индекс суммирования k пробегает лишь два значения от 1 до 2. В силу (3.4) операции опускания и поднятия индекса (3.5) обратны друг для друга.

Для определения тензора (либо псевдотензора) площади нам потребуется следующая кососимметричная матрица:

$$d_{ij} = d^{ij} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (3.6)$$

Компоненты матрицы (3.6) — это двумерный аналог компонент символа Леви-Чивита (см. формулу (6.8) из второй главы). Величины (3.6) удовлетворяют соотношению

$$\sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 d_{pq} M_{ip} M_{jq} = \det \mathbf{M} d_{ij}, \quad (3.7)$$

где \mathbf{M} — некоторая квадратная матрица размера 2×2 . Формула (3.7) является аналогом соотношения (6.10) из второй главы (доказательство см. в [4]).

Используя величины d_{ij} и матрицу метрического тензора \mathbf{g} в некоторой криволинейной системе координат, построим следующий набор величин:

$$\omega_{ij} = \sqrt{\det \mathbf{g}} d_{ij}. \quad (3.8)$$

Из (3.7) вытекает следующее соотношение, которое связывает величины ω_{ij} и $\tilde{\omega}_{pq}$, вычисленные по формуле (3.8) в двух различных системах координат:

$$\omega_{ij} = \text{sign}(\det S) \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 T_i^p T_j^q \tilde{\omega}_{pq}. \quad (3.9)$$

В силу (3.9) величины (3.8) задают кососимметричное внут-

ренное псевдотензорное поле типа $(0, 2)$. Оно называется *псевдотензором площади*. Если на поверхности D выделена одна из двух возможных ориентаций, то формула

$$\omega_{ij} = \xi_D \sqrt{\det \mathbf{g}} d_{ij} \quad (3.10)$$

задает тензорное поле типа $(0, 2)$, которое называется тензором площади. Формула (3.10) отличается от (3.8) лишь знаковым множителем ξ_D , который представляет собой единичное псевдоскалярное поле — поле ориентации (ср. с формулой (8.1) во второй главе). Здесь следует отметить, что не всякая поверхность допускает выделение глобальной ориентации. Пример такой неориентируемой поверхности — это лента Мёбиуса, он хорошо известен.

§ 4. Подвижный репер поверхности. Деривационные формулы Вайнгартена.

С каждым выбором криволинейной системы координат на поверхности связан репер $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ из касательных векторных полей на ней. Вектора такого репера выделяют касательную плоскость в каждой точке поверхности. Однако, число их недостаточно для разложения произвольного пространственного вектора, приложенного к точке поверхности. Поэтому их принято дополнять еще одним вектором, не лежащим в касательной плоскости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Единичным *вектором нормали* \mathbf{n} к поверхности D в точке A называется вектор единичной длины, прикрепленный точке A и перпендикулярный векторам из касательной плоскости к D в этой точке.

Определение 4.1 фиксирует вектор нормали \mathbf{n} лишь с точностью до знака: в каждой точке есть два противоположных

единичных вектора, перпендикулярных касательной плоскости. Один из способов однозначной фиксации вектора \mathbf{n} состоит в использовании векторного произведения

$$\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2]}{||[\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2]||}. \quad (4.1)$$

Вектор \mathbf{n} , определенный формулой (4.1), содержит зависимость от выбора криволинейной системы координат. Поэтому при замене одной системы координат на другую он может поменять свое направление. Действительно, связь между векторами реперов $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ и $\tilde{\mathbf{E}}_1, \tilde{\mathbf{E}}_2$ дается формулой (2.6):

$$\mathbf{E}_1 = T_1^1 \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1 + T_1^2 \cdot \tilde{\mathbf{E}}_2, \quad \mathbf{E}_2 = T_2^1 \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1 + T_2^2 \cdot \tilde{\mathbf{E}}_2.$$

Подставив это в векторное произведение $[\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2]$, получаем

$$[\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2] = (T_1^1 T_2^2 - T_1^2 T_2^1) \cdot [\tilde{\mathbf{E}}_1, \tilde{\mathbf{E}}_2] = \det T \cdot [\tilde{\mathbf{E}}_1, \tilde{\mathbf{E}}_2].$$

Отсюда уже легко выводится правило преобразования вектора нормали, заданного формулой (4.1):

$$\mathbf{n} = (-1)^S \cdot \tilde{\mathbf{n}}. \quad (4.2)$$

Знаковый множитель $(-1)^S = \text{sign}(\det S) = \pm 1$ здесь такой же, как и в формуле (2.8).

Другой способ выбора вектора нормали возможен, если на поверхности имеется какая-то выделенная ориентация. Пусть такая ориентация на D задана единичным псевдоскалярным полем ξ_D . Тогда \mathbf{n} можно задать формулой:

$$\mathbf{n} = \xi_D \cdot \frac{[\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2]}{||[\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2]||}. \quad (4.3)$$

В этом случае правило преобразования вектора нормали при замене системы координат заметно упрощается:

$$\mathbf{n} = \tilde{\mathbf{n}}. \quad (4.4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Касательный репер $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ криволинейной системы координат u^1, u^2 на поверхности, дополненный единичным вектором нормали \mathbf{n} , называется *подвижным* или *сопровождающим* репером этой поверхности.

Если вектор нормали выбирается по формуле (4.1), то сопровождающий репер $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{n}$ является всегда правоориентированным. Поэтому, если мы меняем ориентацию касательного репера $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$, то сразу же меняется и направление вектора \mathbf{n} . Если же вектор нормали \mathbf{n} определен формулой (4.3), то его направление совсем никак не зависит от выбора касательного репера $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$. Это обстоятельство показывает, что задание ориентации на поверхности эквивалентно выбору направления вектора \mathbf{n} , не зависящего от выбора касательных векторов $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$.

Имеется один случай, когда такой независимый выбор вектора нормали заведомо существует. Пусть поверхность D является границей некоторого объемного множества. Тогда из двух нормалей одна является внешней, а другая — внутренней. Вывод: граница объемного множества в пространстве \mathbb{E} всегда ориентируема.

Пусть D — некоторый фрагмент поверхности класса C^2 . Вектора сопровождающего репера такой поверхности являются непрерывно дифференцируемыми вектор-функциями криволинейных координат: $\mathbf{E}_1(u^1, u^2)$, $\mathbf{E}_2(u^1, u^2)$ и $\mathbf{n}(u^1, u^2)$. Производные таких векторов прикреплены к той же точке поверхности, что и сами вектора. Поэтому имеют место разложения:

$$\frac{\partial \mathbf{E}_j}{\partial u^i} = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \cdot \mathbf{E}_k + b_{ij} \cdot \mathbf{n}. \quad (4.5)$$

Производные единичного вектора \mathbf{n} ортогональны этому век-

тору (см. лемму 3.1 в первой главе). Отсюда

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^i} = \sum_{k=1}^2 c_i^k \cdot \mathbf{E}_k. \quad (4.6)$$

Умножим соотношение (4.5) скалярно на вектор \mathbf{n} , а соотношение (4.6) — на вектор \mathbf{E}_j . В силу $(\mathbf{E}_k | \mathbf{n}) = 0$ это дает:

$$(\partial \mathbf{E}_j / \partial u^i | \mathbf{n}) = b_{ij} (\mathbf{n} | \mathbf{n}) = b_{ij}, \quad (4.7)$$

$$(\mathbf{E}_j | \partial \mathbf{n} / \partial u^i) = \sum_{k=1}^2 c_i^k g_{kj}. \quad (4.8)$$

Сложим левые части полученных формул (4.7) и (4.8). После несложных вычислений обнаруживаем, что сумма равна нулю:

$$(\partial \mathbf{E}_j / \partial u^i | \mathbf{n}) + (\mathbf{E}_j | \partial \mathbf{n} / \partial u^i) = \partial (\mathbf{E}_j | \mathbf{n}) / \partial u^i = 0.$$

Это определяет связь коэффициентов b_{ij} и c_j^k в (4.5) и (4.6):

$$b_{ij} = - \sum_{k=1}^2 c_i^k g_{kj}.$$

Пользуясь матрицей обратного метрического тензора $\hat{\mathbf{g}}$, это соотношение можно обратить. Введем обозначение:

$$b_i^k = \sum_{j=1}^2 b_{ij} g^{jk}. \quad (4.9)$$

Тогда коэффициенты c_i^k в (4.6) можно выразить через коэффициенты b_{ij} в (4.5) следующей формулой:

$$c_i^k = -b_i^k. \quad (4.10)$$

Теперь с учетом полученной формулы (4.10) сами разложения (4.5) и (4.6) можно переписать так:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{E}_j}{\partial u^i} &= \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \cdot \mathbf{E}_k + b_{ij} \cdot \mathbf{n}, \\ \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^i} &= - \sum_{k=1}^2 b_i^k \cdot \mathbf{E}_k.\end{aligned}\tag{4.11}$$

Разложения (4.5) и (4.6), записанные в форме (4.11), называются *дериационными формулами Вайнгартена*. Они определяют динамику подвижного репера и играют центральную роль в теории поверхностей.

§ 5. Символы Кристоффеля и вторая квадратичная форма.

Рассмотрим первую из дериационных формул Вайнгартена в двух различных криволинейных системах координат на поверхности. В координатах u^1, u^2 она имеет вид (4.5):

$$\frac{\partial \mathbf{E}_j}{\partial u^i} = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \cdot \mathbf{E}_k + b_{ij} \cdot \mathbf{n}.\tag{5.1}$$

В новых координатах \tilde{u}^1, \tilde{u}^2 эту же формулу перепишем так:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}_q}{\partial \tilde{u}^p} = \sum_{m=1}^2 \tilde{\Gamma}_{pq}^m \cdot \tilde{\mathbf{E}}_m + \tilde{b}_{pq} \cdot \tilde{\mathbf{n}}.\tag{5.2}$$

Выразим вектор \mathbf{E}_j в левой части формулы (5.1) через вектора репера второй системы координат. Для этого применим (2.6):

$$\frac{\partial \mathbf{E}_j}{\partial u^i} = \sum_{q=1}^2 \frac{\partial (T_j^q \cdot \tilde{\mathbf{E}}_q)}{\partial u^i} = \sum_{q=1}^2 \frac{\partial T_j^q}{\partial u^i} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_q + \sum_{q=1}^2 T_j^q \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}_q}{\partial u^i}.$$

Для дальнейшего преобразования полученного выражения используем правило дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial \mathbf{E}_j}{\partial u^i} = \sum_{m=1}^2 \frac{\partial T_j^m}{\partial u^i} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_m + \sum_{q=1}^2 \sum_{p=1}^2 \left(T_j^q \frac{\partial \tilde{u}^p}{\partial u^i} \right) \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}_q}{\partial \tilde{u}^p}.$$

Значение частных производных $\partial \tilde{\mathbf{E}}_q / \partial \tilde{u}^p$ определяется формулой (5.2). Кроме того, учтем (2.7) в форме $\partial \tilde{u}^p / \partial u^i = T_i^p$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}_j}{\partial u^i} &= \sum_{m=1}^2 \frac{\partial T_j^m}{\partial u^i} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_m + \sum_{q=1}^2 \sum_{p=1}^2 \sum_{m=1}^2 (T_j^q T_i^p \tilde{\Gamma}_{pq}^m) \cdot \tilde{\mathbf{E}}_m + \\ &+ \sum_{q=1}^2 \sum_{p=1}^2 (T_j^q T_i^p \tilde{b}_{pq}) \cdot \tilde{\mathbf{n}} = \sum_{m=1}^2 \sum_{k=1}^2 \left(\frac{\partial T_j^m}{\partial u^i} S_m^k \right) \cdot \mathbf{E}_k + \\ &+ \sum_{q=1}^2 \sum_{p=1}^2 \sum_{m=1}^2 \sum_{k=1}^2 (T_j^q T_i^p \tilde{\Gamma}_{pq}^m S_m^k) \cdot \mathbf{E}_k + \sum_{q=1}^2 \sum_{p=1}^2 (T_j^q T_i^p \tilde{b}_{pq}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}. \end{aligned}$$

Единичные вектора нормали \mathbf{n} и $\tilde{\mathbf{n}}$ отличаются не более чем знаком: $\mathbf{n} = \pm \tilde{\mathbf{n}}$. Значит, полученное разложение для $\partial \mathbf{E}_j / \partial u^i$ и разложение (5.1) — это, по существу, разложения в одном и том же базисе $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{n}$. Отсюда

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{m=1}^2 S_m^k \frac{\partial T_j^m}{\partial u^i} + \sum_{m=1}^2 \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 S_m^k T_i^p T_j^q \tilde{\Gamma}_{pq}^m, \quad (5.3)$$

$$b_{ij} = \pm \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 T_i^p T_j^q \tilde{b}_{pq}. \quad (5.4)$$

Формулы (5.3) и (5.4) выражают правило преобразования коэффициентов Γ_{ij}^k и b_{ij} в дериационных формулах Вайнгартена при замене криволинейных координат на поверхности.

Для уточнения знака в формуле (5.4) необходимо фиксировать правило выбора вектора нормали. Если для выбора вектора нормали \mathbf{n} мы используем формулу (4.1), то при замене системы координат он преобразуется по правилу (4.2). Тогда соотношение (5.4) записывается так:

$$b_{ij} = \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 (-1)^S T_i^p T_j^q \tilde{b}_{pq}. \quad (5.5)$$

В этом случае величины b_{ij} задают внутреннее псевдотензорное поле типа $(0, 2)$ на поверхности.

Если же для выбора вектора нормали \mathbf{n} мы применяем формулу (4.3), то вектор нормали \mathbf{n} не зависит от выбора криволинейной системы координат на поверхности (см. формулу (4.4)). Величины b_{ij} определяют уже тензорное поле типа $(0, 2)$. Формула (5.4) принимает вид:

$$b_{ij} = \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 T_i^p T_j^q \tilde{b}_{pq}. \quad (5.6)$$

Тензоры типа $(0, 2)$ соответствуют билинейным и квадратичным формам. Псевдотензоры типа $(0, 2)$ такой интерпретации не имеют. Несмотря на это, величины b_{ij} в деривационных формулах Вайнгартена принято называть компонентами *второй квадратичной формы* \mathbf{b} на поверхности. В пользу этого свидетельствует и следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5.1. *Наборы величин Γ_{ij}^k и b_{ij} в деривационных формулах Вайнгартена (4.11) симметричны по паре нижних индексов i и j .*

ДОК-ВО. Для доказательства теоремы воспользуемся формулой (1.10). Запишем ее в виде

$$\mathbf{E}_j(u^1, u^2) = \frac{\partial \mathbf{r}(u^1, u^2)}{\partial u^j} \quad (5.7)$$

и подставим выражение (5.7) в первую формулу (4.11):

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}(u^1, u^2)}{\partial u^i \partial u^j} = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \cdot \mathbf{E}_k + b_{ij} \cdot \mathbf{n}. \quad (5.8)$$

Значение смещанных частных производных не зависит от порядка дифференцирования, поэтому левая часть (5.8) есть вектор, не меняющийся при перестановке индексов i и j . Значит, и коэффициенты его разложения Γ_{ij}^k и b_{ij} по базису $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{n}$ не меняются при перестановке индексов i и j . Теорема доказана. \square

Для компонент матрицы второй квадратичной формы иногда используют обозначения, аналогичные (3.3):

$$b_{ij} = \begin{vmatrix} L & M \\ M & N \end{vmatrix}. \quad (5.9)$$

Такие обозначения особенно популярны в ранних изданиях.

Поля \mathbf{g} и \mathbf{b} задают пару квадратичных форм в каждой точке поверхности. Этим, в частности, объясняются их названия — *первая* и *вторая* квадратичные формы. Первая квадратичная форма невырождена и положительно определена. Такая ситуация хорошо известна в линейной алгебре (см. [1]). Две формы, одна из которых положительно определена, могут быть одновременно приведены к диагональному виду, причем матрица положительно определенной формы может быть сделана единичной. Диагональные элементы в матрице второй формы после такого приведения называются *инвариантами пары форм*. Для их вычисления рассмотрим свертку:

$$b_i^k = \sum_{j=1}^2 b_{ij} g^{jk}. \quad (5.10)$$

Величины b_i^k фигурируют во второй из дериационных формул Вайнгартена (4.11). Они определяют тензорное (или псев-

дотензорное) поле типа $(1, 1)$ — операторное поле. Оператор с матрицей (5.10) называется *оператором Вайнгартена*. Матрица такого оператора диагонализуеться одновременно с диагонализацией матриц квадратичных форм, а его собственные числа — это в точности инварианты пары форм. Обозначим их через k_1 и k_2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Собственные числа матрицы оператора Вайнгартена $k_1(u^1, u^2)$ и $k_2(u^1, u^2)$ называются *главными кривизнами* поверхности в точке с координатами u^1, u^2 .

Более удобными с точки зрения вычислений оказываются два других инварианта поверхности. Это:

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad K = k_1 k_2. \quad (5.11)$$

Они могут быть вычислены без вычисления собственных чисел матрицы b_i^k . Достаточно найти след матрицы оператора Вайнгартена, а также определить детерминант этой матрицы:

$$H = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(b_i^k), \quad K = \det(b_i^k). \quad (5.12)$$

Величина H в формулах (5.11) и (5.12) называется *средней кривизной*, а величина K — *гауссовой кривизной* поверхности. Имеются формулы, выражающие H и K через компоненты матриц первой и второй квадратичных форм (3.3) и (5.9):

$$H = \frac{1}{2} \frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2}, \quad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}. \quad (5.13)$$

Пусть $\mathbf{v}(u^1, u^2)$ и $\mathbf{w}(u^1, u^2)$ — вектора базиса, где матрица первой формы единична, а матрица второй — диагональна:

$$\mathbf{v} = \left\| \begin{array}{c} v^1 \\ v^2 \end{array} \right\|, \quad \mathbf{w} = \left\| \begin{array}{c} w^2 \\ w^2 \end{array} \right\|. \quad (5.14)$$

Это собственные вектора матрицы оператора Вайнгартена. Вектора (5.14) имеют и трехмерную реализацию:

$$\mathbf{v} = v^1 \cdot \mathbf{E}_1 + v^2 \cdot \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{w} = w^1 \cdot \mathbf{E}_1 + w^2 \cdot \mathbf{E}_2. \quad (5.15)$$

Это пара единичных векторов в касательной плоскости, перпендикулярных друг другу. Направления, задаваемые векторами (5.15) называются *главными направлениями* на поверхности в точке с координатами u^1, u^2 . Если главные кривизны в этой точке не равны друг другу $k_1 \neq k_2$, то главные направления в этой точке определяются однозначно. Если же $k_1 = k_2$, то любые два взаимно перпендикулярных направления в касательной плоскости являются главными направлениями. Такая точка поверхности называется *точкой округления*.

Замечание о знаке. Вспомним, что, в зависимости от способа выбора вектора нормали, вторая квадратичная форма может быть как тензорным, так и псевдотензорным полем. Это же относится и к операторному полю Вайнгартена. Поэтому главные кривизны k_1 и k_2 определены лишь с точностью до знака. Средняя кривизна H также определена лишь с точностью до знака. А гауссова кривизна такой неопределенности в знаке уже не имеет. Более того величина гауссовой кривизны разделяет точки поверхности на три типа: если $K > 0$, точка поверхности называется *эллиптической*, если $K < 0$, такая точка называется *гиперболической*, и, если $K = 0$, то точка называется *параболической*.

§ 6. Ковариантное дифференцирование внутренних тензорных полей на поверхности.

Рассмотрим формулу (5.3) и сравним ее с формулой (6.1) из третьей главы. Эти две формулы отличаются лишь диапазоном значений, который пробегает индексы. Поэтому ве-

личины Γ_{ij}^k , появляющиеся в качестве коэффициентов в дери-
вационной формуле Вайнгартена, определяют геометрический
объект на поверхности, называемый связностью. Компоненты
связности Γ_{ij}^k называются символами Кристоффеля.

Основным предназначением компонент связности Γ_{ij}^k яв-
ляется их использование для дифференцирования тензорных
полей. Воспроизведем здесь формулу для ковариантной про-
изводной (5.12) из третьей главы в двумерном случае:

$$\begin{aligned} \nabla_{j_{s+1}} A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} &= \frac{\partial A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial u^{j_{s+1}}} + \\ &+ \sum_{m=1}^r \sum_{v_m=1}^2 \Gamma_{j_{s+1} v_m}^{i_m} A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots v_m \dots i_r} - \\ &- \sum_{n=1}^s \sum_{w_n=1}^2 \Gamma_{j_{s+1} j_n}^{w_n} A_{j_1 \dots w_n \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

ТЕОРЕМА 6.1. *Формула (6.1) корректно определяет кова-
риантное дифференцирование внутренних тензорных полей на
поверхности, переводящее поле типа (r, s) в поле типа $(r, s+1)$,
тогда и только тогда, когда величины Γ_{ij}^k при замене координат
на поверхности преобразуются по формуле (5.3).*

ДОК-ВО. Начнем с доказательства необходимости. Выбе-
рем некоторое произвольное векторное поле \mathbf{A} и построим по-
ле $\mathbf{B} = \nabla \mathbf{A}$ типа $(1, 1)$, вычислив его компоненты по формуле
(6.1). Корректность формулы (6.1) означает, что компоненты
построенного поля \mathbf{B} преобразуются в соответствии с форму-
лой (2.8). Из этого условия необходимо вывести формулу (5.3)
для преобразования компонент связности Γ_{ij}^k в формуле (6.1).
Запишем формулу (2.8) для поля $\mathbf{B} = \nabla \mathbf{A}$:

$$\frac{\partial A^k}{\partial u^i} + \sum_{j=1}^2 \Gamma_{ij}^k A^j = \sum_{m=1}^2 \sum_{p=1}^2 S_m^k T_i^p \left(\frac{\partial \tilde{A}^m}{\partial \tilde{u}^p} + \sum_{q=1}^2 \tilde{\Gamma}_{pq}^m \tilde{A}^q \right).$$

Раскроем скобки в правой части полученного соотношения. В первом из двух слагаемых заменим T_i^p на $\partial\tilde{u}^p/\partial u^i$ в соответствии с формулой (2.7) и выразим \tilde{A}^m через A^j в соответствии с правилом преобразования компонент векторного поля:

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^2 T_i^p \frac{\partial \tilde{A}^m}{\partial \tilde{u}^p} &= \sum_{p=1}^2 \frac{\partial \tilde{u}^p}{\partial u^i} \frac{\partial \tilde{A}^m}{\partial \tilde{u}^p} = \frac{\partial \tilde{A}^m}{\partial u^i} = \\ &= \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sum_{k=1}^2 T_k^m A^k \right) = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial T_j^m}{\partial u^i} A^j + \sum_{j=1}^2 T_j^m \frac{\partial A^j}{\partial u^i}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Учет (6.2) приводит к сокращению производной $\partial A^k/\partial u^i$ и позволяет привести полученное выше соотношение к виду:

$$\sum_{j=1}^2 \Gamma_{ij}^k A^j = \sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^2 S_m^k \frac{\partial T_j^m}{\partial u^i} A^j + \sum_{m=1}^2 \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 S_m^k T_i^p \tilde{\Gamma}_{pq}^m \tilde{A}^q.$$

Теперь остается лишь выразить \tilde{A}^q через A^j по правилу преобразования компонент векторного поля, привести подобные слагаемые и выделить общий множитель A^j :

$$\sum_{j=1}^2 \left(\Gamma_{ij}^k - \sum_{m=1}^2 S_m^k \frac{\partial T_j^m}{\partial u^i} - \sum_{m=1}^2 \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 S_m^k T_i^p T_j^q \tilde{\Gamma}_{pq}^m \right) A^j = 0.$$

Произвольность векторного поля \mathbf{A} в этой формуле означает зануление всех коэффициентов при A^j по отдельности. Это условие в точности совпадает с правилом преобразования компонент связности (5.3). В одну сторону теорема доказана.

Перейдем доказательству достаточности. Пусть условие (5.3) выполнено. Выберем некоторое тензорное поле \mathbf{A} типа (r, s) и докажем, что величины, $\nabla_{j_{s+1}} A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ определяемые формулой (6.1), при замене координат преобразуются

как компоненты тензорного поля типа $(r, s + 1)$. Рассмотрим структуру формулы (6.1): она содержит производную $\partial A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} / \partial u^{j_{s+1}}$ и еще $r + s$ слагаемых. Обозначим эти слагаемые через $A_{j_1 \dots j_{s+1}}^{i_1 \dots i_r} [m]$ и $A_{j_1 \dots j_{s+1}}^{i_1 \dots i_r} [n]$:

$$\begin{aligned} \nabla_{j_{s+1}} A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} &= \partial A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} / \partial u^{j_{s+1}} + \\ &+ \sum_{m=1}^r A_{j_1 \dots j_{s+1}}^{i_1 \dots i_r} [m] - \sum_{n=1}^s A_{j_1 \dots j_{s+1}}^{i_1 \dots i_r} [n]. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Применим к \mathbf{A} правило преобразования компонент тензора типа (r, s) . В первом слагаемом в (6.3) это дает:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial u^{j_{s+1}}} &= \frac{\partial}{\partial u^{j_{s+1}}} \left(\sum_{\substack{p_1 \dots p_r \\ q_1 \dots q_s}} S_{p_1}^{i_1} \dots S_{p_r}^{i_r} T_{j_1}^{q_1} \dots T_{j_s}^{q_s} \tilde{A}_{q_1 \dots q_s}^{p_1 \dots p_r} \right) = \\ &= \sum_{\substack{p_1 \dots p_r \\ q_1 \dots q_s}} \sum_{q_{s+1}=1}^2 S_{p_1}^{i_1} \dots S_{p_r}^{i_r} T_{j_1}^{q_1} \dots T_{j_s}^{q_s} \frac{\partial \tilde{u}^{q_{s+1}}}{\partial u^{j_{s+1}}} \frac{\partial \tilde{A}_{q_1 \dots q_s}^{p_1 \dots p_r}}{\partial \tilde{u}^{q_{s+1}}} + \\ &+ \sum_{m=1}^r \sum_{\substack{p_1 \dots p_r \\ q_1 \dots q_s}} S_{p_1}^{i_1} \dots \frac{\partial S_{p_m}^{i_m}}{\partial u^{j_{s+1}}} \dots S_{p_r}^{i_r} T_{j_1}^{q_1} \dots T_{j_s}^{q_s} \tilde{A}_{q_1 \dots q_s}^{p_1 \dots p_r} + \\ &+ \sum_{n=1}^s \sum_{\substack{p_1 \dots p_r \\ q_1 \dots q_s}} S_{p_1}^{i_1} \dots S_{p_r}^{i_r} T_{j_1}^{q_1} \dots \frac{\partial T_{j_n}^{q_n}}{\partial u^{j_{s+1}}} \dots T_{j_s}^{q_s} \tilde{A}_{q_1 \dots q_s}^{p_1 \dots p_r}. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали формулу Лейбница для дифференцирования произведения и правило дифференцирования сложной функции для замены дифференцирования по $u^{j_{s+1}}$ на дифференцирование по $\tilde{u}^{q_{s+1}}$. Для дальнейшего преобразования полученной формулы заменим производные $\partial \tilde{u}^{q_{s+1}} / \partial u^{j_{s+1}}$

на $T_{j_{s+1}}^{q_{s+1}}$ согласно формулам (2.7) и сделаем подстановки, основанные на том, что S и T — взаимно обратные матрицы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{p_m}^{i_m}}{\partial u^{j_{s+1}}} &= - \sum_{v_m=1}^2 \sum_{k=1}^2 S_{v_m}^{i_m} \frac{\partial T_k^{v_m}}{\partial u^{j_{s+1}}} S_{p_m}^k, \\ \frac{\partial T_{j_n}^{q_n}}{\partial u^{j_{s+1}}} &= \sum_{w_n=1}^2 \sum_{k=1}^2 T_{j_n}^{w_n} S_{w_n}^k \frac{\partial T_k^{q_n}}{\partial u^{j_{s+1}}}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

После выполнения подстановок (6.4) удобно поменять местами индексы суммирования p_m с v_m и q_n с w_n . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial u^{j_{s+1}}} &= \sum_{\substack{p_1 \dots p_r \\ q_1 \dots q_s}} S_{p_1}^{i_1} \dots S_{p_r}^{i_r} T_{j_1}^{q_1} \dots T_{j_s}^{q_s} \times \\ &\times \left(\sum_{q_{s+1}=1}^2 T_{j_{s+1}}^{q_{s+1}} \frac{\tilde{A}_{q_1 \dots q_s}^{p_1 \dots p_r}}{\partial \tilde{u}^{q_{s+1}}} - \sum_{m=1}^r V^{[m]} + \sum_{n=1}^s W^{[n]} \right), \end{aligned} \quad (6.5)$$

где для сокращения записи сделаны следующие обозначения:

$$\begin{aligned} V^{[m]} &= \sum_{v_m=1}^2 \sum_{k=1}^2 S_{v_m}^k \frac{\partial T_k^{p_m}}{\partial u^{j_{s+1}}} \tilde{A}_{q_1 \dots q_s}^{p_1 \dots v_m \dots p_r}, \\ W^{[n]} &= \sum_{w_n=1}^2 \sum_{k=1}^2 S_{q_n}^k \frac{\partial T_k^{w_n}}{\partial u^{j_{s+1}}} \tilde{A}_{q_1 \dots w_n \dots q_s}^{p_1 \dots p_r}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Теперь рассмотрим величины $A_{j_1 \dots j_{s+1}}^{i_1 \dots i_r} [m]$ в формуле (6.3). Они, очевидно, задаются следующим соотношением:

$$A_{j_1 \dots j_{s+1}}^{i_1 \dots i_r} [m] = \sum_{v_m=1}^2 \Gamma_{j_{s+1} v_m}^{i_m} A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots v_m \dots i_r}.$$

Применим к полю \mathbf{A} правило преобразования компонент тензора типа (r, s) . Для $A_{j_1 \dots j_{s+1}}^{i_1 \dots i_r} [0]$ это дает:

$$A_{j_1 \dots j_{s+1}}^{i_1 \dots i_r} [0] = \sum_{\substack{p_1 \dots p_r \\ q_1 \dots q_s}} \sum_{v_m=1}^2 S_{p_1}^{i_1} \dots S_{p_m}^{v_m} \dots S_{p_r}^{i_r} \times \\ \times T_{j_1}^{q_1} \dots T_{j_s}^{q_s} \Gamma_{j_{s+1} v_m}^{i_m} \tilde{A}_{q_1 \dots q_s}^{p_1 \dots p_r}. \quad (6.7)$$

Для дальнейшего преобразования полученного выражения используем формулу (5.3), переписав ее так:

$$\Gamma_{j_{s+1} v_m}^{i_m} = \sum_{k=1}^2 S_k^{i_m} \frac{\partial \Gamma_{v_m}^k}{\partial u^{j_{s+1}}} + \sum_{k=1}^2 \sum_{q=1}^2 \sum_{q_{s+1}=1}^2 S_k^{i_m} T_{j_{s+1}}^{q_{s+1}} T_{v_m}^q \tilde{\Gamma}_{q_{s+1} q}^k.$$

Сразу после подстановки этого выражения в (6.7) сделаем циклическое переобозначение индексов суммирования: заменим r на p_m , p_m на v_m и v_m на r . Часть сумм в полученном выражении вычисляется явно при учете того, что матрицы перехода S и $T = S^{-1}$ являются обратными друг для друга:

$$A_{j_1 \dots j_{s+1}}^{i_1 \dots i_r} [0] = \sum_{\substack{p_1 \dots p_r \\ q_1 \dots q_s}} S_{p_1}^{i_1} \dots S_{p_r}^{i_r} T_{j_1}^{q_1} \dots T_{j_s}^{q_s} \times \\ \times \left(\sum_{q_{s+1}=1}^2 T_{j_{s+1}}^{q_{s+1}} \tilde{A}_{q_1 \dots q_{s+1}}^{p_1 \dots p_r} [0] + V [0] \right). \quad (6.8)$$

Для величин $A_{j_1 \dots j_{s+1}}^{i_1 \dots i_r} [n]$ в результате аналогичных выкладок могут быть получены аналогичные выражения:

$$A_{j_1 \dots j_{s+1}}^{i_1 \dots i_r} [0] = \sum_{\substack{p_1 \dots p_r \\ q_1 \dots q_s}} S_{p_1}^{i_1} \dots S_{p_r}^{i_r} T_{j_1}^{q_1} \dots T_{j_s}^{q_s} \times \\ \times \left(\sum_{q_{s+1}=1}^2 T_{j_{s+1}}^{q_{s+1}} \tilde{A}_{q_1 \dots q_{s+1}}^{p_1 \dots p_r} [n] + W [n] \right). \quad (6.9)$$

Теперь остается лишь подставить (6.5), (6.8) и (6.9) в формулу (6.3). При подстановке величины $V \begin{smallmatrix} m \\ 0 \end{smallmatrix}$ и $W \begin{smallmatrix} 0 \\ n \end{smallmatrix}$ сокращаются. А остающаяся после такого сокращения формула есть в точности правило преобразования компонент тензора типа $(r, s + 1)$, записанная применительно к полю $\nabla \mathbf{A}$. Теорема 6.1 полностью доказана. \square

Теорема 6.1 дает универсальный механизм построения ковариантного дифференцирования. Достаточно иметь связность, компоненты которой преобразуются по формуле (5.3). Для сравнения мы имеем две связности — это евклидова связность в пространстве \mathbb{E} , построенная при помощи декартовых систем координат, и связность на поверхностях в \mathbb{E} , компоненты которой определяются из деривационных формул Вайнгартена. Несмотря на различие в происхождении этих связностей, соответствующие ковариантные производные обладают рядом общих свойств. Эти свойства принято формулировать в терминах ковариантной производной вдоль векторного поля. Пусть \mathbf{X} — некоторое векторное поле на поверхности. Для всякого тензорного поля \mathbf{A} типа (r, s) определим тензорное поле $\mathbf{B} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{A}$ того же самого типа (r, s) , задав его формулой

$$B_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \sum_{q=1}^2 X^q \nabla_q A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}. \quad (6.10)$$

ТЕОРЕМА 6.2. *Операция ковариантного дифференцирования тензорных полей обладает следующими свойствами:*

- (1) $\nabla_{\mathbf{X}}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{A} + \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{B}$;
- (2) $\nabla_{\mathbf{X} + \mathbf{Y}} \mathbf{A} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{A} + \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{A}$;
- (3) $\nabla_{\xi \cdot \mathbf{X}} \mathbf{A} = \xi \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{A}$;
- (4) $\nabla_{\mathbf{X}}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{A} \otimes \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{B}$;
- (5) $\nabla_{\mathbf{X}} C(\mathbf{A}) = C(\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{A})$;

где \mathbf{A} и \mathbf{B} — произвольные дифференцируемые тензорные по-

ля, \mathbf{X} и \mathbf{Y} — произвольные векторные поля, а ξ — произвольное скалярное поле.

Внимательное рассмотрение теоремы 6.2 и формулы (6.10), показывает, что теорема 6.2 дословно повторяет теорему 5.2 из второй главы, а формула (6.10) является двумерным аналогом формулы (5.5) из этой же второй главы. Однако, приведенное там доказательство относится лишь к случаю евклидовой связности в пространстве \mathbb{E} .

Док-во. Выберем произвольную криволинейную систему координат на поверхности и проведем доказательство теоремы прямыми вычислениями в координатах. Пусть $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, где \mathbf{A} и \mathbf{B} — тензорные поля типа (r, s) . Тогда

$$C_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} + B_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}.$$

Подстановка $C_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ в формулу (6.1) для ковариантной производной после несложных вычислений дает:

$$\nabla_{j_{s+1}} C_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \nabla_{j_{s+1}} A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} + \nabla_{j_{s+1}} B_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}.$$

Остается лишь умножить обе части полученного равенства на $X^{j_{s+1}}$ и просуммировать по повторяющемуся индексу j_{s+1} . Применяя формулу (6.10), выводим требуемое равенство из первого пункта теоремы.

Заметим, что величины $B_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ в формуле (6.10) получаютcя как линейные комбинации компонент векторного поля \mathbf{X} . Пункты (2) и (3) теоремы являются немедленными следствиями этого замечания.

Перейдем к пункту (4). Положим $\mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$. Тогда для компонент тензорного поля \mathbf{C} имеем:

$$C_{j_1 \dots j_{s+q}}^{i_1 \dots i_{r+p}} = A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} B_{j_{s+1} \dots j_{s+q}}^{i_{r+1} \dots i_{r+p}}. \quad (6.11)$$

Подставим величины $C_{j_1 \dots j_{s+q}}^{i_1 \dots i_{r+p}}$ из (6.11) в формулу (6.1) для ковариантной производной. В результате такой подстановки для компонент поля $\mathbf{D} = \nabla \mathbf{C}$ выводим следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 D_{j_1 \dots j_{s+q+1}}^{i_1 \dots i_{r+p}} &= (\partial A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} / \partial u^{j_{s+q+1}}) B_{j_{s+1} \dots j_{s+q}}^{i_{r+1} \dots i_{r+p}} + \\
 &+ A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} (\partial B_{j_{s+1} \dots j_{s+q}}^{i_{r+1} \dots i_{r+p}} / \partial u^{j_{s+q+1}}) + \\
 &+ \sum_{m=1}^r \sum_{v_m=1}^2 \Gamma_{j_{s+q+1} v_m}^{i_m} A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots v_m \dots i_r} B_{j_{s+1} \dots j_{s+q}}^{i_{r+1} \dots i_{r+p}} + \\
 &+ \sum_{m=r+1}^{r+p} \sum_{v_m=1}^2 A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \Gamma_{j_{s+q+1} v_m}^{i_m} B_{j_{s+1} \dots j_{s+q}}^{i_{r+1} \dots v_m \dots i_{r+p}} - \\
 &- \sum_{n=1}^s \sum_{w_n=1}^2 \Gamma_{j_{s+q+1} w_n}^{w_n} A_{j_1 \dots w_n \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} B_{j_{s+1} \dots j_{s+q}}^{i_{r+1} \dots i_{r+p}} - \\
 &- \sum_{n=s+1}^{s+q} \sum_{w_n=1}^2 A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \Gamma_{j_{s+q+1} w_n}^{w_n} B_{j_{s+1} \dots w_n \dots j_{s+q}}^{i_{r+1} \dots i_{r+p}}.
 \end{aligned}$$

Заметим, что после приведения подобных слагаемых полученную здесь громоздкую формулу можно преобразовать так:

$$\begin{aligned}
 \nabla_{j_{s+q+1}} (A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} B_{j_{s+1} \dots j_{s+q}}^{i_{r+1} \dots i_{r+p}}) &= (\nabla_{j_{s+q+1}} A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}) \times \\
 &\times B_{j_{s+1} \dots j_{s+q}}^{i_{r+1} \dots i_{r+p}} + A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} (\nabla_{j_{s+q+1}} B_{j_{s+1} \dots j_{s+q}}^{i_{r+1} \dots i_{r+p}}).
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

Теперь для доказательства четвертого пункта теоремы остается умножить (6.12) на $X^{j_{s+q+1}}$ и просуммировать по повторяющемуся индексу j_{s+q+1} .

Для доказательства пятого пункта теоремы рассмотрим два тензорных поля \mathbf{A} и \mathbf{B} , одно из которых есть свертка другого:

$$B_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \sum_{k=1}^2 A_{j_1 \dots j_{q-1} k j_q \dots j_s}^{i_1 \dots i_{p-1} k i_p \dots i_r}. \tag{6.13}$$

Подставим (6.13) в формулу (6.1). Для $\nabla_{j_{s+1}} B_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ это дает:

$$\begin{aligned} \nabla_{j_{s+1}} B_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} &= \sum_{k=1}^2 \frac{\partial A_{j_1 \dots j_{q-1} k j_q \dots j_s}^{i_1 \dots i_{p-1} k i_p \dots i_r}}{\partial u^{j_{s+1}}} + \\ &+ \sum_{m=1}^r \sum_{k=1}^2 \sum_{v_m=1}^2 \Gamma_{j_{s+1} v_m}^{i_m} A_{j_1 \dots j_{q-1} k j_q \dots j_s}^{i_1 \dots v_m \dots k \dots i_r} - \\ &- \sum_{n=1}^s \sum_{k=1}^2 \sum_{w_n=1}^2 \Gamma_{j_{s+1} j_n}^{w_n} A_{j_1 \dots w_n \dots k \dots j_s}^{i_1 \dots i_{p-1} k i_p \dots i_r}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

В формуле (6.14) индекс v_m может располагаться как левее индекса k , так и правее его. То же самое относится и к индексу w_n . Однако, в ней нет слагаемых, когда v_m или w_n замещают индекс k . Такие слагаемые имели бы вид:

$$\sum_{k=1}^2 \sum_{v=1}^2 \Gamma_{j_{s+1} v}^k A_{j_1 \dots j_{q-1} k j_q \dots j_s}^{i_1 \dots i_{p-1} v i_p \dots i_r}, \quad (6.15)$$

$$- \sum_{k=1}^2 \sum_{w=1}^2 \Gamma_{j_{s+1} k}^w A_{j_1 \dots j_{q-1} w j_q \dots j_s}^{i_1 \dots i_{p-1} k i_p \dots i_r}. \quad (6.16)$$

Нетрудно заметить, что (6.15) и (6.16) отличаются лишь знаком. Для этого достаточно заменить k на v и w на k в формуле (6.16). Одновременное добавление (6.15) и (6.16) к (6.14) не нарушает равенства. Но после такого добавления равенство (6.14) можно записать так:

$$\nabla_{j_{s+1}} B_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \sum_{k=1}^2 \nabla_{j_{s+1}} A_{j_1 \dots j_{q-1} k j_q \dots j_s}^{i_1 \dots i_{p-1} k i_p \dots i_r}. \quad (6.17)$$

Теперь для завершения доказательства пятого пункта и всей теоремы в целом достаточно домножить (6.17) на $X^{j_{s+1}}$ и просуммировать по повторяющемуся индексу j_{s+1} . \square

Из пяти свойств ковариантной производной в теореме 6.2 в вычислениях наиболее часто используется четвертое свойство в форме (6.12). Перепишем (6.12) так:

$$\begin{aligned} \nabla_k (A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} B_{w_1 \dots w_q}^{v_1 \dots v_p}) &= (\nabla_k A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}) \times \\ &\times B_{w_1 \dots w_q}^{v_1 \dots v_p} + A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} (\nabla_k B_{w_1 \dots w_q}^{v_1 \dots v_p}). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Формула (6.18) получена из (6.12) простым переобозначением индексов; однако, она более удобна для восприятия.

§ 7. Согласованность метрики и связности на поверхностях.

Ранее мы заметили, что ковариантная производная метрического тензора \mathbf{g} в евклидовом пространстве \mathbb{E} равна нулю (см. формулу (6.7) во второй главе). Это свойство было названо согласованностью метрики и связности. После перехода к криволинейным координатам оно позволило выразить компоненты евклидовой связности Γ_{ij}^k через компоненты метрического тензора (см. формулу (7.8) в третьей главе). Рассмотрим вопрос о согласованности метрики и связности на поверхностях. Здесь он также решается положительно, что выражается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 7.1. *Компоненты метрического тензора g^{ij} и компоненты связности Γ_{ij}^k в произвольной криволинейной системе координат на поверхности связаны соотношением*

$$\nabla_k g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - \sum_{q=1}^2 \Gamma_{ki}^q g_{qj} - \sum_{q=1}^2 \Gamma_{kj}^q g_{iq} = 0, \quad (7.1)$$

выражающим условие согласованности метрики и связности на этой поверхности.

Док-во. Рассмотрим вновь первую из деривационных формул Вайнгартена в (4.11). Перепишем эту формулу, произведя некоторое переобозначение индексов в ней:

$$\frac{\partial \mathbf{E}_i}{\partial u^k} = \sum_{q=1}^2 \Gamma_{ki}^q \cdot \mathbf{E}_q + b_{ki} \cdot \mathbf{n}. \quad (7.2)$$

Умножим обе части (7.2) скалярно на \mathbf{E}_j и учтем при этом ортогональность векторов \mathbf{E}_j и \mathbf{n} . Скалярное умножение \mathbf{E}_q с \mathbf{E}_j в правой части дает компоненту матрицы Грама g_{qj} :

$$(\partial \mathbf{E}_i / \partial u^k | \mathbf{E}_j) = \sum_{q=1}^2 \Gamma_{ki}^q g_{qj}. \quad (7.3)$$

Поменяем местами индексы i и j в (7.3) и учтем симметричность матрицы Грама. Это дает

$$(\mathbf{E}_i | \partial \mathbf{E}_j / \partial u^k) = \sum_{q=1}^2 \Gamma_{kj}^q g_{iq}. \quad (7.4)$$

Теперь сложим формулы (7.3) и (7.4) и вспомним правило Лейбница применительно к дифференцированию скалярного произведения в пространстве \mathbb{E} :

$$\begin{aligned} (\partial \mathbf{E}_i / \partial u^k | \mathbf{E}_j) + (\mathbf{E}_i | \partial \mathbf{E}_j / \partial u^k) &= \partial (\mathbf{E}_i | \mathbf{E}_j) / \partial u^k = \\ &= \partial g_{ij} / \partial u^k = \sum_{q=1}^2 \Gamma_{ki}^q g_{qj} + \sum_{q=1}^2 \Gamma_{kj}^q g_{iq}. \end{aligned}$$

Теперь нетрудно видеть, что полученное соотношение, по существу, совпадает с (7.1). Теорема доказана. \square

Немедленным следствием теоремы 7.1 и теоремы 5.1 явля-

ется следующая формула для компонент связности:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^2 g^{kr} \left(\frac{g_{rj}}{\partial u^i} + \frac{g_{ir}}{\partial u^j} - \frac{g_{ij}}{\partial u^r} \right). \quad (7.5)$$

Вывод ее мы не приводим, поскольку он, по существу, повторяет вывод формулы (7.8) в третьей главе.

Из условия $\nabla_q g_{ij} = 0$ вытекает равенство нулю ковариантных производных обратного метрического тензора. Для доказательства этого применим формулу (3.4). Ковариантная производная единичного операторного поля с компонентами δ_k^i равна нулю. Действительно:

$$\nabla_q \delta_k^i = \frac{\partial(\delta_k^i)}{\partial u^q} + \sum_{r=1}^2 \Gamma_{qr}^i \delta_k^r - \sum_{r=1}^2 \Gamma_{qk}^r \delta_r^i = 0. \quad (7.6)$$

Продифференцируем ковариантным образом обе части равенства (3.4) и учтем при этом соотношение (7.6):

$$\begin{aligned} \nabla_q \left(\sum_{j=1}^2 g^{ij} g_{jk} \right) &= \sum_{j=1}^2 (\nabla_q g^{ij} g_{jk} + g^{ij} \nabla_q g_{jk}) = \\ &= \sum_{j=1}^2 \nabla_q g^{ij} g_{jk} = \nabla_q \delta_k^i = 0. \end{aligned} \quad (7.7)$$

При выводе (7.7) мы использовали пункты (4) и (5) теоремы 6.2. Опускание индекса j при помощи свертки с метрическим тензором g_{jk} есть обратимая операция. Поэтому из (7.7) вытекает $\nabla_q g^{ij} = 0$. Теперь условие согласованности метрики и связности можно записать в форме двух соотношений

$$\nabla \mathbf{g} = 0, \quad \nabla \hat{\mathbf{g}} = 0, \quad (7.8)$$

которые в точности совпадают с соотношениями (6.7) из второй главы для метрических тензоров в пространстве \mathbb{E} .

Еще одним следствием теоремы 7.1 является то, что операции поднятия и опускания индексов, осуществляемые путем свертки с метрическими тензорами $\hat{\mathbf{g}}$ и \mathbf{g} , перестановочны с операцией ковариантного дифференцирования. Это обстоятельство изобразим в виде следующих формул:

$$\begin{aligned} \nabla_q \left(\sum_{k=1}^2 g_{ik} A^{\dots k \dots} \right) &= \sum_{k=1}^2 g_{ik} \nabla_q A^{\dots k \dots}, \\ \nabla_q \left(\sum_{k=1}^2 g^{ik} A^{\dots k \dots} \right) &= \sum_{k=1}^2 g^{ik} \nabla_q A^{\dots k \dots}. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Соотношения (7.9) легко выводятся из (7.8) с использованием пунктов (4) и (5) в теореме 6.2.

ТЕОРЕМА 7.2. *Ковариантный дифференциал псевдотензора площади на любой поверхности равен нулю: $\nabla\omega = 0$.*

Для доказательства этой теоремы нам потребуется два вспомогательных утверждения, которые удобно сформулировать в виде следующих лемм.

ЛЕММА 7.1. *Для всякой квадратной матрицы M , компоненты которой являются дифференцируемыми функциями некоторого параметра x , имеет место равенство:*

$$\frac{d(\ln \det M)}{dx} = \text{tr}(M^{-1} M'), \tag{7.10}$$

где M' — квадратная матрица, компоненты которой являются производными соответствующих компонент матрицы M .

ЛЕММА 7.2. Для всякой квадратной матрицы M размера 2×2 справедливо равенство

$$\sum_{q=1}^2 (M_{iq} d_{qj} + M_{jq} d_{iq}) = \text{tr } M d_{ij}, \quad (7.11)$$

где d_{ij} — компоненты единичной кососимметричной матрицы, определяемые соотношением (3.6).

Доказательство этих двух лемм, так же, как и доказательство формулы (3.7), содержится в [4].

Применим лемму 7.1 к матрице метрического тензора. Положим $x = u^k$ и перепишем соотношение (7.10) в форме:

$$\frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{g}}} \frac{\partial \sqrt{\det \mathbf{g}}}{\partial u^k} = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^2 \sum_{p=1}^2 g^{qp} \frac{\partial g_{qp}}{\partial u^k}. \quad (7.12)$$

Заметим, что в формуле (7.11) роль матрицы M может играть любой массив из четырех чисел, пронумерованный двумя индексами. Фиксировав индекс k , в качестве такого массива мы можем рассмотреть компоненты связности Γ_{ki}^j . Тогда:

$$\sum_{q=1}^2 (\Gamma_{ki}^q d_{qj} + \Gamma_{kj}^q d_{iq}) = \sum_{q=1}^2 \Gamma_{kq}^q d_{ij}. \quad (7.13)$$

ДОК-ВО ТЕОРЕМЫ 7.2. Компоненты псевдотензора площади ω определяются формулой (3.8). Для нахождения компонент тензора $\nabla \omega$ применим формулу (6.1). Она дает:

$$\begin{aligned} \nabla_k \omega_{ij} &= \frac{\partial \sqrt{\det \mathbf{g}}}{\partial u^k} d_{ij} - \sum_{q=1}^2 \sqrt{\det \mathbf{g}} (\Gamma_{ki}^q d_{qj} + \Gamma_{kj}^q d_{iq}) = \\ &= \sqrt{\det \mathbf{g}} \left(\frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{g}}} \frac{\partial \sqrt{\det \mathbf{g}}}{\partial u^k} d_{ij} - \sum_{q=1}^2 (\Gamma_{ki}^q d_{qj} + \Gamma_{kj}^q d_{iq}) \right). \end{aligned}$$

Для дальнейшего преобразования полученного выражения используем формулы (7.12) и (7.13):

$$\nabla_k \omega_{ij} = \sqrt{\det \mathbf{g}} \left(\frac{1}{2} \sum_{q=1}^2 \sum_{p=1}^2 g^{qp} \frac{\partial g_{qp}}{\partial u^k} - \sum_{q=1}^2 \Gamma_{kq}^q \right) d_{ij}. \quad (7.14)$$

Теперь выразим Γ_{kq}^q через компоненты метрического тензора по формуле (7.5). Учет симметричности g^{pq} дает:

$$\sum_{q=1}^2 \Gamma_{kq}^q = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^2 \sum_{p=1}^2 g^{qp} \left(\frac{g_{pq}}{\partial u^k} + \frac{g_{kp}}{\partial u^q} - \frac{g_{kq}}{\partial u^p} \right) = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^2 \sum_{p=1}^2 g^{qp} \frac{g_{qp}}{\partial u^k}.$$

Подстановка этого выражения в формулу (7.14) приводит к ее занулению. Отсюда $\nabla_k \omega_{ij} = 0$. Теорема доказана. \square

Замечание о знаке. Тензор площади отличается от псевдотензора площади лишь знаковым скалярным множителем ξ_D . Поэтому утверждение теоремы 7.2 выполнено и для тензора площади на любой поверхности.

Замечание о размерности. Для тензора (и псевдотензора) объема в евклидовом пространстве \mathbb{E} имеет место аналогичное утверждение: $\nabla \omega = 0$. Доказательство такого факта даже проще, чем доказательство теоремы 7.2. Поле ω в \mathbb{E} имеет константные компоненты в любой декартовой системе координат.

§ 8. Тензор кривизны.

Ковариантные производные в евклидовом пространстве \mathbb{E} сводятся к простому дифференцированию компонент в декартовой системе координат. Допускают ли такое сведение в какой-либо системе координат ковариантные производные на поверхностях? Ответ на этот вопрос связан с рассмотрением

коммутаторов ковариантных производных. Выберем некоторое векторное поле \mathbf{X} и вычислим тензорное поле \mathbf{Y} типа (1, 2) со следующими компонентами:

$$Y_{ij}^k = \nabla_i \nabla_j X^k - \nabla_j \nabla_i X^k. \quad (8.1)$$

Для вычисления компонент поля \mathbf{Y} применим формулу (6.1):

$$\begin{aligned} \nabla_i \nabla_j X^k &= \frac{\partial(\nabla_j X^k)}{\partial u^i} + \sum_{q=1}^2 \Gamma_{iq}^k \nabla_j X^q - \sum_{q=1}^2 \Gamma_{ij}^q \nabla_q X^k, \\ \nabla_j \nabla_i X^k &= \frac{\partial(\nabla_i X^k)}{\partial u^j} + \sum_{q=1}^2 \Gamma_{jq}^k \nabla_i X^q - \sum_{q=1}^2 \Gamma_{ji}^q \nabla_q X^k. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Вычтем второе соотношение (8.2) из первого. При этом последние слагаемые сократятся ввиду симметричности Γ_{ij}^k :

$$\begin{aligned} Y_{ij}^k &= \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\frac{\partial X^k}{\partial u^j} + \sum_{r=1}^2 \Gamma_{jr}^k X^r \right) - \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\frac{\partial X^k}{\partial u^i} + \sum_{r=1}^2 \Gamma_{ir}^k X^r \right) + \\ &+ \sum_{q=1}^2 \Gamma_{iq}^k \left(\frac{\partial X^q}{\partial u^j} + \sum_{r=1}^2 \Gamma_{jr}^q X^r \right) - \sum_{q=1}^2 \Gamma_{jq}^k \left(\frac{\partial X^q}{\partial u^i} + \sum_{r=1}^2 \Gamma_{ir}^q X^r \right). \end{aligned}$$

После раскрытия скобок и некоторых сокращений получаем:

$$Y_{ij}^k = \sum_{r=1}^2 \left(\frac{\partial \Gamma_{jr}^k}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{ir}^k}{\partial u^j} + \sum_{q=1}^2 (\Gamma_{iq}^k \Gamma_{jr}^q - \Gamma_{jq}^k \Gamma_{ir}^q) \right) X^r. \quad (8.3)$$

Важно отметить, что формула (8.3) не содержит производных компонент поля \mathbf{X} — они сократились. Обозначим:

$$R_{rij}^k = \frac{\partial \Gamma_{jr}^k}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{ir}^k}{\partial u^j} + \sum_{q=1}^2 \Gamma_{iq}^k \Gamma_{jr}^q - \sum_{q=1}^2 \Gamma_{jq}^k \Gamma_{ir}^q. \quad (8.4)$$

Формулу (8.3) для компонент поля (8.1) можно записать так:

$$(\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i) X^k = \sum_{r=1}^2 R_{rij}^k X^r. \quad (8.5)$$

Заменяем векторное поле \mathbf{X} ковекторным полем. Проведем аналогичные выкладки, в этом случае получаем:

$$(\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i) X_k = - \sum_{r=1}^2 R_{kij}^r X_r. \quad (8.6)$$

Формулы (8.5) и (8.6) нетрудно обобщить и на случай произвольного тензорного поля \mathbf{X} типа (r, s) :

$$\begin{aligned} (\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i) X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} &= \sum_{m=1}^r \sum_{v_m=1}^2 R_{v_m i j}^{i_m} X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots v_m \dots i_r} - \\ &- \sum_{n=1}^s \sum_{w_n=1}^2 R_{j_n i j}^{w_n} X_{j_1 \dots w_n \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Сравнение (8.5), (8.6) и (8.7) показывает, что во все эти формулы входят величины R_{rij}^k из (8.4).

ТЕОРЕМА 8.1. *Величины R_{rij}^k , определяемые формулой (8.4), задают тензор типа $(1, 3)$, который называется тензором кривизны или тензором Римана.*

Теорема 8.1 допускает прямое доказательство на основе формулы (5.3). Однако, мы приведем другое доказательство.

ЛЕММА 8.1. *Пусть \mathbf{R} — некоторый геометрический объект, задаваемый в координатах четырехиндексным массивом чисел R_{rij}^k . Если свертка \mathbf{R} с произвольным вектором \mathbf{X} :*

$$Y_{ij}^k = \sum_{q=1}^2 R_{qij}^k X^q \quad (8.8)$$

есть тензор типа $(1, 2)$, то сам геометрический объект \mathbf{R} есть тензор типа $(1, 3)$.

Док-во леммы. Пусть u^1, u^2 и \tilde{u}^1, \tilde{u}^2 — две криволинейные системы координат на поверхности. Фиксируем некоторое значение индекса r (равное 1 или 2). Пользуясь произвольностью вектора \mathbf{X} , выберем этот вектор таким, чтобы в системе координат u^1, u^2 его r -ая координата была равна единице, а остальные координаты были бы нулями. Тогда для компонент тензора Y_{ij}^k в этой системе координат получаем:

$$Y_{ij}^k = \sum_{q=1}^2 R_{qij}^k X^q = R_{rij}^k. \quad (8.9)$$

Найдем компоненты вектора \mathbf{X} в другой системе координат

$$\tilde{X}^m = \sum_{q=1}^2 T_q^m X^q = T_r^m,$$

после чего вычислим компоненты тензора \mathbf{Y} во второй системе координат, пользуясь формулой (8.8):

$$\tilde{Y}_{pq}^n = \sum_{m=1}^2 \tilde{R}_{mpq}^n \tilde{X}^m = \sum_{m=1}^2 \tilde{R}_{mpq}^n T_r^m. \quad (8.10)$$

После этого остается лишь связать величины Y_{ij}^k из (8.9) и величины \tilde{Y}_{pq}^n из (8.10), пользуясь тем, что это компоненты тензора \mathbf{Y} в двух разных системах координат u^1, u^2 и \tilde{u}^1, \tilde{u}^2 :

$$Y_{ij}^k = \sum_{n=1}^2 \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 S_n^k T_i^p T_j^q \tilde{Y}_{pq}^n. \quad (8.11)$$

Подстановка (8.9) и (8.10) в формулу (8.11) дает:

$$R_{rij}^k = \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 S_n^k T_r^m T_i^p T_j^q \tilde{R}_{mpq}^n.$$

Полученная формула есть в точности правило преобразования компонент тензорного поля типа (1, 3) при замене системы координат. Лемма доказана. \square

Теорема 8.1 является немедленным следствием леммы 8.1. Действительно, левая часть в формуле (8.6) определяет тензор типа (1, 2) при произвольном выборе векторного поля \mathbf{X} , а в правой части стоит свертка \mathbf{R} с \mathbf{X} .

Компоненты тензора кривизны, определяемые формулой (8.4), нумеруются одним верхним и тремя нижними индексами. При опускании верхнего индекса при помощи метрического тензора это индекс принято записывать первым:

$$R_{qrij} = \sum_{k=1}^2 R_{rij}^k g_{kq}. \quad (8.12)$$

Тензор типа (0, 4) с компонентами (8.12) обозначается той же буквой \mathbf{R} . Еще один тензор получается из (8.4) поднятием первого нижнего индекса:

$$R_{ij}^{kq} = \sum_{r=1}^2 R_{rij}^k g^{rq}. \quad (8.13)$$

Поднятый нижний индекс принято записывать вторым верхним индексом. Тензоры типа (0, 4) и (2, 2) обозначаются той же буквой \mathbf{R} . Они также называются тензорами кривизны.

ТЕОРЕМА 8.2. *Компоненты тензора кривизны \mathbf{R} , определяемые компонентами связности (7.5) по формуле (8.4), удовлетворяют следующим соотношениям:*

- (1) $R_{rij}^k = -R_{rji}^k$;
- (2) $R_{qrij} = -R_{rqij}$;
- (3) $R_{qrij} = R_{ijqr}$;
- (4) $R_{rij}^k + R_{ijr}^k + R_{jri}^k = 0$.

ДОК-ВО. Первое соотношение вытекает непосредственно из формулы (8.4). При перестановке индексов i и j выражение в правой части (8.4) меняет знак. Отсюда немедленно вытекает свойство (1) кососимметричности компонент тензора кривизны по последней паре индексов.

Для доказательства второго соотношения применим формулу (8.7) к метрическому тензору:

$$(\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i) g_{qr} = \sum_{k=1}^2 (R_{qij}^k g_{kr} + R_{rij}^k g_{qk}).$$

С учетом (8.12) это соотношение можно переписать так:

$$(\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i) g_{qr} = R_{rqij} + R_{qrij}. \quad (8.14)$$

Но в силу условия согласованности метрики и связности ковариантные производные метрического тензора равны нулю (см. формулу (7.1)). Поэтому левая часть (8.14) равна нулю, что доказывает пункт (2) теоремы.

Пропустим на время третий пункт и докажем четвертый пункт теоремы путем прямого вычисления на базе (8.4). Выпишем соотношение (8.4) три раза, делая циклическую перестановку индексов $i \rightarrow j \rightarrow r \rightarrow i$:

$$R_{rij}^k = \frac{\partial \Gamma_{jr}^k}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{ir}^k}{\partial u^j} + \sum_{q=1}^2 \Gamma_{iq}^k \Gamma_{jr}^q - \sum_{q=1}^2 \Gamma_{jq}^k \Gamma_{ir}^q,$$

$$R_{ijr}^k = \frac{\partial \Gamma_{ri}^k}{\partial u^j} - \frac{\partial \Gamma_{ji}^k}{\partial u^r} + \sum_{q=1}^2 \Gamma_{jq}^k \Gamma_{ri}^q - \sum_{q=1}^2 \Gamma_{rq}^k \Gamma_{ji}^q,$$

$$R_{jri}^k = \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{rj}^k}{\partial u^i} + \sum_{q=1}^2 \Gamma_{rq}^k \Gamma_{ij}^q - \sum_{q=1}^2 \Gamma_{iq}^k \Gamma_{rj}^q.$$

Сложим все выписанные равенства и учтем симметричность символов Кристоффеля по паре нижних индексов. Легко убедиться, что сумма в правой части оказывается равной нулю. Это доказывает четвертый пункт теоремы.

Третий пункт теоремы является следствием первого, второго и четвертого пунктов. В левой части равенства, которое нужно доказать, стоит величина R_{qrij} . Одновременная перестановка индексов $q \leftrightarrow r$ и $i \leftrightarrow j$ не меняет этой величины:

$$R_{qrij} = R_{rqji}, \quad (8.15)$$

что вытекает из первого и второго пунктов теоремы. Применим к каждой из величин в (8.15) четвертый пункт теоремы:

$$R_{qrij} = -R_{qijr} - R_{qjri},$$

$$R_{rqji} = -R_{rjqi} - R_{riqj}. \quad (8.16)$$

Проведем аналогичные действия с величиной R_{ijqr} , стоящей в правой части равенства, которое требуется доказать:

$$R_{ijqr} = R_{jirq}. \quad (8.17)$$

К каждой из величин в (8.17) применим пункт (4) теоремы:

$$R_{ijqr} = -R_{iqrj} - R_{irjq},$$

$$R_{jirq} = -R_{jrqi} - R_{jqir}. \quad (8.18)$$

Сложим равенства (8.16) и вычтем из полученной суммы равенства (8.18). Нетрудно проверить, что в силу пунктов (1) и

(2) сумма в правой части результирующего равенства обращается в ноль. Тогда в силу (8.15) и (8.17) получаем:

$$2 R_{qrij} - 2 R_{ijqr} = 0.$$

После деления на 2 мы приходим к равенству, которое и требовалось доказать. Теорема полностью доказана. \square

Тензор кривизны \mathbf{R} , заданный компонентами (8.4), имеет индексы на двух уровнях. Рассмотрим свертку:

$$R_{rj} = \sum_{k=1}^2 R_{rkj}^k. \quad (8.19)$$

Формулу (8.19) для R_{rj} можно преобразовать к виду:

$$R_{rj} = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 g^{ik} R_{irkj}.$$

Отсюда в силу симметричности g^{ik} и четвертого пункта теоремы 8.2 выводим симметричность R_{rj} :

$$R_{rj} = R_{jr}. \quad (8.20)$$

Симметричный тензор \mathbf{R} типа $(0, 2)$ с компонентами (8.19) называется *тензором Риччи*.

Отметим, что возможны еще две свертки тензора кривизны. Никаких новых тензоров при этом не возникает:

$$\sum_{k=1}^2 R_{krj}^k = 0, \quad \sum_{k=1}^2 R_{rik}^k = -R_{ri}.$$

Но из тензора Риччи можно построить скаляр R по формуле:

$$R = \sum_{r=1}^2 \sum_{j=1}^2 R_{rj} g^{rj}. \quad (8.21)$$

Скаляр $R(u^1, u^2)$, определенный формулой (8.21), называется *скалярной кривизной* поверхности в точке с координатами u^1, u^2 . Скалярная кривизна — это полная свертка тензора кривизны \mathbf{R} с компонентами (8.13):

$$R = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 R_{ij}^{ij}. \quad (8.22)$$

Формула (8.22) легко выводится из (8.21). Всекие другие способы свертывания тензора кривизны не приводят к каким-то другим скалярам, существенно отличным от (8.21).

Переход от компонент тензора кривизны R_{ij}^{kr} к скалярной кривизне R — это потеря информации. Шестнадцать величин мы заменяем одной. Однако, в силу теоремы 8.2 в двумерном случае никакой потери информации не происходит. Действительно, вследствие теоремы 8.2 компоненты тензора кривизны R_{ij}^{kr} кососимметричны по верхней паре индексов и по нижней паре индексов. При совпадении $k = r$ или $i = j$ они зануляются. Поэтому единственные ненулевые компоненты — это R_{12}^{12} , R_{12}^{21} , R_{21}^{12} и R_{21}^{21} , причем $R_{12}^{12} = R_{21}^{21} = -R_{12}^{21} = -R_{21}^{12}$. Из формулы (8.22) в силу сказанного получаем:

$$R = R_{12}^{12} + R_{21}^{21} = 2 R_{12}^{12}.$$

Рассмотрим тензор \mathbf{D} со следующими компонентами:

$$D_{ij}^{kr} = \frac{R}{2} (\delta_i^k \delta_j^r - \delta_j^k \delta_i^r).$$

Тензор \mathbf{D} также кососимметричен по верхней и нижней парам индексов и $D_{12}^{12} = R_{12}^{12}$. Отсюда вытекает совпадение тензоров $\mathbf{D} = \mathbf{R}$. Запишем это в компонентах:

$$R_{ij}^{kr} = \frac{R}{2} (\delta_i^k \delta_j^r - \delta_j^k \delta_i^r). \quad (8.23)$$

Опуская верхний индекс r , из формулы (8.23) получаем:

$$R_{rij}^k = \frac{R}{2} (\delta_i^k g_{rj} - \delta_j^k g_{ri}). \quad (8.24)$$

Формула (8.24) определяет компоненты тензора кривизны на произвольной поверхности. Для тензора Риччи это дает:

$$R_{ij} = \frac{R}{2} g_{ij}. \quad (8.25)$$

Тензор Риччи произвольной поверхности пропорционален метрическому тензору.

Замечание. Тензор кривизны, построенный по симметричной связности (7.5), обладает еще одним (пятым) свойством, которое выражается в следующем равенстве:

$$\nabla_k R_{rij}^q + \nabla_i R_{rjk}^q + \nabla_j R_{rki}^q = 0. \quad (8.26)$$

Соотношение (8.23) известно как *тождество Бьянки*. Однако для поверхностей (в размерности 2) оно становится тривиальным следствием первого пункта теоремы 8.2. Поэтому его вывод мы здесь не приводим.

§ 9. Уравнения Гаусса и Петерсона-Кодацци.

Рассмотрим вновь деривационные формулы Вайнгартена (4.11). Их можно трактовать как систему из девяти векторных уравнений относительно трех вектор-функций $\mathbf{E}_1(u^1, u^2)$,

$\mathbf{E}_2(u^1, u^2)$ и $\mathbf{n}(u^1, u^2)$. Число уравнений превосходит число функций. Про такие системы говорят, что они *переопределены*. Переопределенные системы уравнений содержат элемент избыточности. Из них обычно можно вывести новые уравнения, не входящие в исходную систему. Такие уравнения называются *дифференциальными следствиями* или *условиями совместности* исходных уравнений.

В качестве примера рассмотрим систему из двух уравнений относительно функции $f = f(x, y)$ следующего вида:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = b(x, y). \quad (9.1)$$

Продифференцируем первое уравнение (9.1) по y , а второе — по x , после чего вычтем одно из другого:

$$\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x} = 0. \quad (9.2)$$

Уравнение (9.2) — это условие совместности системы уравнений (9.1). Оно является необходимым условием существования функции $f(x, y)$, удовлетворяющей уравнениям (9.1).

Аналогичным образом можно вывести условия совместности для системы уравнений Вайнгартена (4.11). Запишем первое из уравнений (4.11) в форме:

$$\frac{\partial \mathbf{E}_k}{\partial u^j} = \sum_{q=1}^2 \Gamma_{jk}^q \cdot \mathbf{E}_q + b_{jk} \cdot \mathbf{n}. \quad (9.3)$$

Продифференцируем соотношение (9.3) по переменной u^i и вычислим возникающие при этом производные $\partial \mathbf{E}_k / \partial u^i$ и

$\partial \mathbf{n} / \partial u^i$ согласно дериационным формулам (4.11):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}_k}{\partial u^i \partial u^j} &= \left(\frac{\partial b_{jk}}{\partial u^i} + \sum_{q=1}^2 \Gamma_{jk}^q b_{iq} \right) \cdot \mathbf{n} + \\ &+ \sum_{q=1}^2 \left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^q}{\partial u^i} + \sum_{s=1}^2 \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^q - b_{jk} b_i^q \right) \cdot \mathbf{E}_q. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Поменяем местами индексы i и j в формуле (9.4). Значение второй смешанной производной не зависит от порядка дифференцирования, поэтому значение левой части при такой перестановке индексов не изменится. Вычтем полученное соотношение из (9.4). Это дает:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^2 \left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^q}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^q}{\partial u^j} + \sum_{s=1}^2 \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^q - \sum_{s=1}^2 \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^q \right) \cdot \mathbf{E}_q + \\ &+ (b_{ik} b_j^q - b_{jk} b_i^q) \cdot \mathbf{E}_q + \\ &+ \left(\frac{\partial b_{jk}}{\partial u^i} + \sum_{q=1}^2 \Gamma_{jk}^q b_{iq} - \frac{\partial b_{ik}}{\partial u^j} - \sum_{q=1}^2 \Gamma_{ik}^q b_{jq} \right) \cdot \mathbf{n} = 0. \end{aligned}$$

Вектора \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 и \mathbf{n} , составляющие подвижный репер, линейно независимы. Поэтому полученное соотношение можно разбить на два отдельных равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{jk}^q}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^q}{\partial u^j} + \sum_{s=1}^2 \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^q - \sum_{s=1}^2 \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^q &= b_{jk} b_i^q - b_{ik} b_j^q, \\ \frac{\partial b_{jk}}{\partial u^i} - \sum_{q=1}^2 \Gamma_{ik}^q b_{jq} &= \frac{\partial b_{ik}}{\partial u^j} - \sum_{q=1}^2 \Gamma_{jk}^q b_{iq}. \end{aligned}$$

Заметим, что левая часть первого из этих соотношений — это выражение для компонент тензора кривизны (см. (8.4)). Это позволяет переписать его так:

$$R_{kij}^q = b_{jk} b_i^q - b_{ik} b_j^q. \quad (9.5)$$

Второе соотношение также можно упростить, переписав так:

$$\nabla_i b_{jk} = \nabla_j b_{ik}. \quad (9.6)$$

Этот факт легко проверить непосредственно, преобразовав (9.6) обратно к исходному виду.

Уравнения (9.5) и (9.6) — это дифференциальные следствия деривационных формул Вайнгартена (4.11). Первое из них известно как *уравнение Гаусса*, а второе — как *уравнение Петерсона-Кодацци*.

Тензорное уравнение Гаусса (9.5) содержит 16 отдельных равенств. Однако, в силу соотношения (8.24) не все они независимы. Для упрощения (9.5) произведем в нем поднятие нижнего индекса k . Это дает:

$$\frac{R}{2} (\delta_i^q \delta_j^k - \delta_j^q \delta_i^k) = b_i^q b_j^k - b_j^q b_i^k. \quad (9.7)$$

Выражение в правой части (9.7) кососимметрично по верхней и по нижней парам индексов. Каждый из индексов в (9.7) пробегает только два значения, поэтому правую часть уравнения (9.7) можно преобразовать к виду:

$$b_i^q b_j^k - b_j^q b_i^k = B (\delta_i^q \delta_j^k - \delta_j^q \delta_i^k). \quad (9.8)$$

Подставив $q = 1$, $k = 2$, $i = 1$ и $j = 2$ в формулу (9.8), для величины B в (9.8) получаем:

$$B = b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2 = \det(b_i^k) = K,$$

где K — гауссова кривизна поверхности (см. формулу (5.12)). Приведенные рассуждения показывают, что уравнение Гаусса (9.5) эквивалентно ровно одному скалярному уравнению

$$R = 2K, \quad (9.9)$$

которое связывает скалярную и гауссову кривизну. Это уравнение также называется *уравнением Гаусса*.

КРИВЫЕ НА ПОВЕРХНОСТЯХ.**§ 1. Параметрическое уравнение кривой на поверхности.**

Пусть $\mathbf{r}(t)$ — векторно-параметрическое уравнение дифференцируемой кривой, все точки которой лежат на некоторой дифференцируемой поверхности. Пусть фрагмент D этой поверхности, содержащий точки кривой, картирован, то есть на нем введены криволинейные координаты u^1, u^2 . Это означает, что имеется биективное отображение $\mathbf{u} : D \rightarrow U$, переводящее точки кривой в некоторую область $U \subset \mathbb{R}^2$. Кривая в карте U уже изображается не тремя, а двумя функциями параметра t :

$$\begin{cases} u^1 = u^1(t), \\ u^2 = u^2(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

(ср. с формулами (1.14) из четвертой главы). Обратное отображение \mathbf{u}^{-1} задается вектор-функцией

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2), \quad (1.2)$$

определяющей радиус-векторы точек поверхности. Поэтому

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(u^1(t), u^2(t)). \quad (1.3)$$

Дифференцирование (1.3) по t определяет вектор τ :

$$\tau(t) = \sum_{i=1}^2 \dot{u}^i \cdot \mathbf{E}_i(u^1(t), u^2(t)). \quad (1.4)$$

Это касательный вектор к кривой (ср. с формулами (1.15) из четвертой главы). Формула (1.4) показывает, что вектор τ лежит в касательной плоскости к поверхности. Это проявление того, что сама кривая целиком лежит на поверхности.

При замене криволинейной системы координат на поверхности производные \dot{u}^i преобразуются как компоненты тензора типа $(1, 0)$. Они определяют внутреннее (двумерное) представление вектора τ в карте. Формула (1.4) позволяет переходить от внутреннего к внешнему (трехмерному) представлению этого вектора. **Наша основная цель** в этой главе — описать трехмерную геометрию кривых на поверхности в терминах ее двумерного представления в карте.

Важным объектом в теории кривых является интеграл длины, см. формулу (2.3) в первой главе. Подстановка (1.4) в эту формулу дает:

$$L = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j} dt. \quad (1.5)$$

Подинтегральное выражение в (1.5) — это длина вектора τ во внутреннем представлении. Если $s = s(t)$ — натуральный параметр, то, обозначив $du^i = \dot{u}^i dt$, мы можем записать:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 g_{ij} du^i du^j. \quad (1.6)$$

Формула (1.6) оправдывает название «первая квадратичная форма» для метрического тензора: квадрат дифференциала

длины ds^2 есть квадратичная функция от дифференциалов координатных функций в карте. Если $t = s$ есть натуральная параметризация кривой, то имеет место соотношение

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j = 1, \quad (1.7)$$

которое просто выражает факт единичности длины касательного вектора кривой τ в натуральной параметризации (см. § 2 из первой главы).

§ 2. Геодезическая и нормальная кривизна кривой.

Пусть $t = s$ — натуральный параметр для параметрической кривой, заданной уравнениями (1.1) в криволинейных координатах на некоторой поверхности. Продифференцируем касательный вектор $\tau(s)$ такой кривой (1.4) по параметру s . Производная левой части соотношения (1.4) определяется формулами Френе (3.8) из первой главы:

$$k \cdot \mathbf{n}_{\text{кр}} = \sum_{k=1}^2 \ddot{u}^k \cdot \mathbf{E}_k + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \dot{u}^i \cdot \frac{\partial \mathbf{E}_i}{\partial u^j} \cdot \dot{u}^j. \quad (2.1)$$

Через $\mathbf{n}_{\text{кр}}$ мы обозначили единичный вектор нормали к кривой, чтобы отличать его единичного вектора нормали к поверхности \mathbf{n} . Для вычисления $\partial \mathbf{E}_i / \partial u^j$ применим деривационные формулы Вайнгартена (4.11) из главы IV. Это дает:

$$\begin{aligned} k \cdot \mathbf{n}_{\text{кр}} = & \sum_{k=1}^2 \left(\ddot{u}^k + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Gamma_{ji}^k \dot{u}^i \dot{u}^j \right) \cdot \mathbf{E}_k + \\ & + \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 b_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j \right) \cdot \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Обозначим через $k_{\text{норм}}$ коэффициент перед вектором \mathbf{n} в формуле (2.2). Эта величина называется *нормальной кривизной*:

$$k_{\text{норм}} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 b_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j. \quad (2.3)$$

В отличие от кривизны k , которая неотрицательна, нормальная кривизна кривой (2.3) может быть как положительной, так и отрицательной. Исходя из (2.3), перепишем само соотношение (2.2) в следующем виде:

$$k \cdot \mathbf{n}_{\text{кр}} - k_{\text{норм}} \cdot \mathbf{n} = \sum_{k=1}^2 \left(\ddot{u}^k + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Gamma_{ji}^k \dot{u}^i \dot{u}^j \right) \cdot \mathbf{E}_k. \quad (2.4)$$

Вектор в правой части (2.4) есть линейная комбинация векторов \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 , образующих базис в касательной плоскости к поверхности. Поэтому этот вектор лежит в касательной плоскости. Его длина называется *геодезической кривизной*:

$$k_{\text{геод}} = \left| \sum_{k=1}^2 \left(\ddot{u}^k + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Gamma_{ji}^k \dot{u}^i \dot{u}^j \right) \cdot \mathbf{E}_k \right|. \quad (2.5)$$

В силу формулы (2.5) геодезическая кривизна кривой всегда неотрицательна. Если $k_{\text{геод}} \neq 0$, с учетом обозначения (2.5) можно определить единичный вектор $\mathbf{n}_{\text{вн}}$ и переписать формулу (2.4) в следующем виде:

$$k \cdot \mathbf{n}_{\text{кр}} - k_{\text{норм}} \cdot \mathbf{n} = k_{\text{геод}} \cdot \mathbf{n}_{\text{вн}}. \quad (2.6)$$

Единичный вектор $\mathbf{n}_{\text{вн}}$ в формуле (2.6) называется *вектором внутренней нормали* кривой на поверхности.

В силу (2.6) вектор $\mathbf{n}_{\text{вн}}$ есть линейная комбинация векторов $\mathbf{n}_{\text{кр}}$ и \mathbf{n} , которые перпендикулярны единичному вектору $\boldsymbol{\tau}$, лежащему в касательной плоскости. Значит, $\mathbf{n}_{\text{вн}} \perp \boldsymbol{\tau}$. С другой

стороны, как линейная комбинация векторов \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 вектор $\mathbf{n}_{\text{вн}}$ сам лежит в касательной плоскости. Это определяет его с точностью до знака:

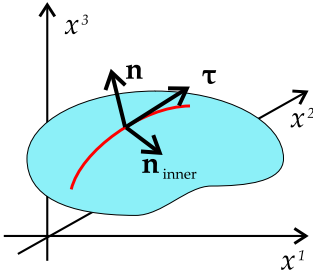


Рис. 2.1

$$\mathbf{n}_{\text{вн}} = \pm[\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}]. \quad (2.7)$$

Соотношение (2.7) позволяет доопределить вектор $\mathbf{n}_{\text{вн}}$ и в тех точках кривой, где геодезическая кривизна обращается в ноль.

Перенесем $k_{\text{норм}} \cdot \mathbf{n}$ в правую часть (2.6). Тогда получится

$$k \cdot \mathbf{n}_{\text{кр}} = k_{\text{геод}} \cdot \mathbf{n}_{\text{вн}} + k_{\text{норм}} \cdot \mathbf{n}. \quad (2.8)$$

Соотношение (2.8) можно трактовать, как разложение вектора $k \cdot \mathbf{n}_{\text{кр}}$ на две взаимно перпендикулярные компоненты. Отсюда

$$k^2 = (k_{\text{геод}})^2 + (k_{\text{норм}})^2. \quad (2.9)$$

Формула (2.3) определяет величину нормальной кривизны в натуральной параметризации $t = s$. Перепишем ее так:

$$k_{\text{норм}} = \frac{\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 b_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j}{\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j}. \quad (2.10)$$

В натуральной параметризации (2.10) совпадает с (2.3) по причине (1.7). При переходе к произвольной параметризации все производные \dot{u}^i умножаются на один и тот же множитель:

$$\frac{du^i}{dt} = \frac{du^i}{ds} \frac{ds}{dt}. \quad (2.11)$$

Но правая часть (2.10) нечувствительна к такому изменению \dot{u}^i , поэтому (2.10) определяет нормальную кривизну кривой в произвольной параметризации.

Формула (2.10) показывает, что нормальная кривизна — это очень грубая характеристика кривой. Она определяется лишь направлением ее касательного вектора $\boldsymbol{\tau}$ в касательной плоскости. Компоненты матриц g_{ij} и b_{ij} характеризуют не кривую, а точку поверхности, через которую эта кривая проходит.

Пусть \mathbf{a} — некоторый вектор, касательный к поверхности. В криволинейной системе координат u^1, u^2 он задается двумя числами a^1, a^2 — коэффициентами его разложения по векторам \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 . Рассмотрим значение второй квадратичной формы поверхности на этом векторе:

$$\mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 b_{ij} a^i a^j. \quad (2.12)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Направление, задаваемое ненулевым вектором \mathbf{a} в касательной плоскости, называется *асимптотическим направлением*, если значение второй квадратичной формы (2.12) на таком векторе равно нулю.

Отметим, что асимптотические направления существуют лишь в тех точках поверхности, где вторая квадратичная форма знакопеременна либо вырождена. В первом случае гауссова кривизна отрицательна: $K < 0$, а во втором она равна нулю: $K = 0$. В точках, где $K > 0$, асимптотических направлений не существует.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Кривая на поверхности, касательный вектор $\boldsymbol{\tau}$ которой во всех точках лежит в асимптотическом направлении, называется *асимптотической линией*.

В силу формулы (2.12) уравнение асимптотической линии

имеет следующий вид:

$$\mathbf{b}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 b_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j = 0. \quad (2.13)$$

Сравнение (2.13) с (2.10) показывает, что асимптотические линии — это линии с нулевой нормальной кривизной: $k_{\text{норм}} = 0$. На поверхностях отрицательной гауссовой кривизны $K < 0$ в каждой точке имеется два несовпадающих асимптотических направления. Поэтому на таких поверхностях имеется два семейства асимптотических линий, которые определяют *асимптотическую сеть* на таких поверхностях. На всякой поверхности отрицательной гауссовой кривизны существует система криволинейных координат u^1, u^2 , координатная сеть которой является асимптотической сетью. Доказывать этот факт мы здесь не будем.

По аналогии с асимптотическими линиями определяются *линии кривизны*. Это кривые на поверхности, касательный вектор которых в каждой точке лежит в главном направлении (см. формулы (5.14) и (5.15) в § 5 четвертой главы). Линии кривизны существуют на произвольных поверхностях, ограничений на гауссову кривизну здесь не возникает.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. *Геодезической линией* на поверхности называется кривая, геодезическая кривизна которой тождественно равна нулю: $k_{\text{геод}} = 0$.

Из формулы Френе $\dot{\boldsymbol{\tau}} = k \cdot \mathbf{n}_{\text{кр}}$ и из соотношения (2.8) для геодезических линий выводим:

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = k_{\text{норм}} \cdot \mathbf{n}. \quad (2.14)$$

Иными словами, производная единичного касательного вектора на геодезической линии направлена вдоль нормали к

поверхности. Это внешнее описание геодезических линий. Внутреннее описание получим из формулы (2.5):

$$\ddot{u}^k + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Gamma_{ji}^k \dot{u}^i \dot{u}^j = 0. \quad (2.15)$$

Уравнения (2.15) — это дифференциальные уравнения геодезических линий в натуральной параметризации. Переход от натурального параметра к произвольному может быть осуществлен на базе формулы (2.11).

§ 3. Экстремальное свойство геодезических линий.

Сравним уравнения геодезических линий (2.15) с уравнениями прямых в криволинейных координатах (8.18), выведенными в третьей главе. Эти уравнения имеют сходное строение. Они отличаются лишь диапазоном изменения индексов: 2 вместо 3. Поэтому геодезические линии — это естественные аналоги прямых во внутренней геометрии на поверхностях. Следующая теорема усиливает эту аналогию.

ТЕОРЕМА 3.1. *Геодезическая линия, соединяющая две заданные точки A и B на поверхности, имеет экстремальную длину в классе кривых, соединяющих эти две точки.*

Известно, что в евклидовом пространстве \mathbb{E} наикратчайший путь из точки A в точку B — это отрезок прямой линии, соединяющий эти точки. Теорема 3.1 содержит близкое утверждение для геодезических линий на поверхности. Вспомним, что вещественные числовые функции могут иметь локальные максимумы и минимумы — они называются *экстремумами*. К ним добавляют точки *условных экстремумов* (например, точка $x = 0$ для функции $y = x^3$). Все такие точки объединяет общее свойство: линейная часть приращения функции в такой точке равна нулю: $f(x_0 + h) = f(x_0) + O(h^2)$.

В случае геодезической линии, соединяющей точки A и B на поверхности, мы должны слегка деформировать (проварьировать) эту линию так, чтобы при этом она осталась линией на поверхности, соединяющей заданные точки A и B . Деформированная кривая уже может не быть геодезической линией. Ее длина будет отлична от длины исходной линии. Условие *экстремальности длины* в формулировке теоремы 3.1 означает, что линейная часть в приращении длины равна нулю.

Уточним способ деформирования кривой. Пусть для простоты точки A и B и вся геодезическая линия, соединяющая эти две точки, лежит внутри картированного фрагмента D на поверхности. Тогда эта геодезическая линия задается двумя функциями (1.1). Увеличим на единицу число аргументов в этих функциях и будем считать зависимость от этих аргументов достаточное число раз дифференцируемой:

$$\begin{cases} u^1 = u^1(t, h), \\ u^2 = u^2(t, h). \end{cases} \quad (3.1)$$

При каждом фиксированном h эти функции являются функциями параметра t и, тем самым, определяют кривую на поверхности. Меняя параметр h , мы деформируем кривую, причем в процессе такой деформации точки кривой остаются на поверхности. Дифференцируемость функций (3.1) гарантирует то, что малым изменениям h соответствует малые деформации соответствующей кривой.

Наложим на функции (3.1) ряд ограничений, которые легко выполнить. Пусть длина исходной геодезической линии равна a и пусть параметр t пробегает отрезок $[0, a]$. Положим

$$u^k(0, h) = u^k(0, 0), \quad u^k(a, h) = u^k(a, 0). \quad (3.2)$$

Условие (3.2) означает, что при изменении h начальная и конечная точки кривой A и B остаются на месте.

Для краткости точками условимся обозначать частные производные функций $u^i(t, h)$ по t . Тогда, в частности, величины $\dot{u}^i = \partial u^i / \partial t$ задают внутреннее представление касательных векторов к кривым.

Пусть исходная линия соответствует значению $h = 0$ и пусть при $h = 0$ параметр t совпадает с натуральным параметром на геодезической линии. Тогда функции (3.1) при $h = 0$ удовлетворяют уравнениям (1.7) и (2.15) одновременно. При $h \neq 0$ параметр t уже не обязан быть натуральным параметром на деформированной кривой, а сама такая кривая не обязана быть геодезической линией.

Рассмотрим длину деформированных кривых как функцию параметра h . Она определяется интегралом длины вида (1.5):

$$L(h) = \int_0^a \sqrt{\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j} dt. \quad (3.3)$$

При $h = 0$ имеем $L(0) = a$. Утверждение теоремы 3.1 об экстремальности длины теперь можно сформулировать так: $L(h) = a + O(h^2)$ или, что то же самое:

$$\left. \frac{dL(h)}{dh} \right|_{h=0} = 0. \quad (3.4)$$

Док-во теоремы 3.1. Докажем равенство (3.4) для интеграла длины (3.3) при описанной выше деформации кривой. Обозначим через $\lambda(t, h)$ подкоренное выражение в формуле (3.3). Тогда прямым дифференцированием (3.3) получаем:

$$\frac{dL(h)}{dh} = \int_0^a \frac{\partial \lambda / \partial h}{2\sqrt{\lambda}} dt. \quad (3.5)$$

Вычислим производную, стоящую в числителе дроби в (3.5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial h} &= \frac{\partial}{\partial h} \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j \right) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \frac{\partial u^k}{\partial h} \dot{u}^i \dot{u}^j + \\ &+ \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 g_{ij} \frac{\partial(\dot{u}^i \dot{u}^j)}{\partial \dot{u}^k} \frac{\partial \dot{u}^k}{\partial h} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \frac{\partial u^k}{\partial h} \dot{u}^i \dot{u}^j + \\ &+ \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 g_{ij} \delta_k^i \dot{u}^j \frac{\partial \dot{u}^k}{\partial h} + \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 g_{ij} \dot{u}^i \delta_k^j \frac{\partial \dot{u}^k}{\partial h}. \end{aligned}$$

Наличие символов Кронекера δ_k^i и δ_k^j в полученном выражении позволяет выполнить суммирование по k в последних двух слагаемых. Кроме того, симметричность g_{ij} позволяет соединить эти два слагаемых в одно:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial h} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \frac{\partial u^k}{\partial h} \dot{u}^i \dot{u}^j + 2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 g_{ij} \dot{u}^i \frac{\partial \dot{u}^j}{\partial h}.$$

Подстановка этого выражения в (3.5) приводит к рассмотрению двух типов интегралов:

$$I_1 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \int_0^a \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \frac{\dot{u}^i \dot{u}^j}{2\sqrt{\lambda}} \frac{\partial u^k}{\partial h} dt, \quad (3.6)$$

$$I_2 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_0^a \frac{g_{ik} \dot{u}^i}{\sqrt{\lambda}} \frac{\partial \dot{u}^k}{\partial h} dt. \quad (3.7)$$

Интеграл в (3.7) содержит вторые смешанные частные производные от функций (3.1):

$$\frac{\partial \dot{u}^k}{\partial h} = \frac{\partial^2 u^k}{\partial t \partial h}.$$

Для того, чтобы исключить одновременное дифференцирование по t и h преобразуем интеграл (3.7), применив к нему прием интегрирования по частям:

$$\int_0^a \frac{g_{ik} \dot{u}^i}{\sqrt{\lambda}} \frac{\partial \dot{u}^k}{\partial h} dt = \frac{g_{ik} \dot{u}^i}{\sqrt{\lambda}} \frac{\partial u^k}{\partial h} \Big|_0^a - \int_0^a \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{g_{ik} \dot{u}^i}{\sqrt{\lambda}} \right) \frac{\partial u^k}{\partial h} dt.$$

Продифференцируем равенства (3.2) по h . В результате этого получим, что производные $\partial u^k / \partial h$ обращаются в ноль на концах отрезка интегрирования по t . Поэтому внеинтегральные слагаемые при интегрировании (3.7) по частям зауляются:

$$I_2 = - \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 \int_0^a \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{g_{ik} \dot{u}^i}{\sqrt{\lambda}} \right) \frac{\partial u^k}{\partial h} dt. \quad (3.8)$$

Теперь сложим интегралы I_1 и I_2 из (3.6) и (3.8). Для производной dL/dh в формуле (3.5) это дает:

$$\frac{dL(h)}{dh} = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 \int_0^a \left(\sum_{j=1}^2 \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \frac{\dot{u}^i \dot{u}^j}{2\sqrt{\lambda}} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{g_{ik} \dot{u}^i}{\sqrt{\lambda}} \right) \right) \frac{\partial u^k}{\partial h} dt.$$

В полученном выражении под знаком интеграла единственным вхождением производных по h являются производные $\partial u^k / \partial h$. Для их значений при $h = 0$ введем обозначения

$$\delta u^k = \frac{\partial u^k}{\partial h} \Big|_{h=0}. \quad (3.9)$$

Величины $\delta u^k = \delta u^k(t)$ в (3.9) называются вариациями координат на исходной кривой. Отметим, что при замене криволинейных координат эти величины преобразуются как компоненты вектора (хотя этот факт и не имеет никакого значения для доказательства теоремы).

Подставим $h = 0$ в полученную выше формулу для производной dL/dh . При такой подстановке величина λ в знаменателе дробей становится единицей $\lambda(t, 0) = 1$. Это вытекает из (1.7) в силу того, что параметр t есть натуральный параметр на исходной геодезической линии. Тогда

$$\left. \frac{dL(h)}{dh} \right|_{h=0} = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 \int_0^a \left(\sum_{j=1}^2 \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \frac{\dot{u}^i \dot{u}^j}{2} - \frac{d(g_{ik} \dot{u}^i)}{dt} \right) \delta u^k dt.$$

Поскольку зависимости от h в полученном выражении больше нет, мы заменили частную производную по t на d/dt . Все дальнейшие вычисления в правой части относятся к исходной геодезической линии, на которой t — натуральный параметр.

Внесем суммы по i и k под знак интеграла и вычислим коэффициенты при δu^k , обозначив эти величины через U_k :

$$\begin{aligned} U_k &= \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{j=1}^2 \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \frac{\dot{u}^i \dot{u}^j}{2} - \frac{d(g_{ik} \dot{u}^i)}{dt} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} \right) \dot{u}^i \dot{u}^j - \sum_{i=1}^2 g_{ik} \ddot{u}^i. \end{aligned} \quad (3.10)$$

В силу симметричности $\dot{u}^i \dot{u}^j$ второе слагаемое в скобках в формуле (3.10) можно разбить на два. Это дает:

$$U_k = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \right) \dot{u}^i \dot{u}^j - \sum_{i=1}^2 g_{ik} \ddot{u}^i.$$

Теперь произведем поднятие индекса k в U_k , то есть рассмотрим величины U^q , определяемые формулой:

$$U^q = \sum_{k=1}^2 g^{qk} U_k.$$

Для таких величин из выведенной выше формулы получаем:

$$-U^q = \ddot{u}^q + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \frac{g^{qk}}{2} \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right) \dot{u}^i \dot{u}^j.$$

Сравним эту формулу с формулой (7.5) из четвертой главы, определяющей компоненты связности. Это дает:

$$-U^q = \ddot{u}^q + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Gamma_{ij}^q \dot{u}^i \dot{u}^j. \quad (3.11)$$

Теперь достаточно сравнить (3.11) с уравнением геодезических линий (2.15), чтобы получить $U^q = 0$. Величины U_k получаются из величин U^q опусканием индекса по формуле

$$U_k = \sum_{q=1}^2 g_{kq} U^q.$$

Поэтому величины U_k также равны нулю. Отсюда немедленно вытекает равенство (3.4), которое, как раз, и означает выполнение условия экстремальности для геодезических линий. Теорема доказана. \square

§ 4. Внутренний параллельный перенос на поверхностях.

Уравнения геодезических линий в евклидовом пространстве \mathbb{E} в форме (8.18) были получены в третьей главе при рассмотрении параллельного переноса векторов в криволинейных координатах. Полученное там уравнение параллельного переноса (8.6) может быть перенесено в двумерную ситуацию:

$$\dot{a}^i + \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \Gamma_{jk}^i \dot{u}^j a^k = 0. \quad (4.1)$$

Уравнение (4.1) называется *уравнением внутреннего параллельного переноса* векторов вдоль кривых на поверхностях.

Пусть на некотором фрагменте поверхности определены криволинейные координаты u^1, u^2 и задана параметрическая кривая (1.1). Рассмотрим некоторый касательный вектор \mathbf{a} к поверхности в начальной точке этой кривой при $t = 0$. Вектор \mathbf{a} имеет внутреннее представление: это два числа a^1, a^2 — его компоненты. Поставим задачу Коши для уравнений (4.1), задав следующие начальные данные при $t = 0$:

$$a^1(t) \Big|_{t=0} = a^1, \quad a^2(t) \Big|_{t=0} = a^2. \quad (4.2)$$

Решение задачи Коши (4.2) дает две функции $a^1(t)$ и $a^2(t)$, которые определяют вектора $\mathbf{a}(t)$ во всех точках кривой. Описанную процедуру называют *внутренним параллельным переносением вектора \mathbf{a} вдоль кривой на поверхности*.

Рассмотрим внутреннее параллельное перенесение вектора \mathbf{a} с точки зрения внешней (трехмерной) геометрии пространства \mathbb{E} , в котором находится рассматриваемая поверхность. Связь между внутренним и внешним представлением касательных векторов к поверхности задается формулой:

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^2 a^i \cdot \mathbf{E}_i. \quad (4.3)$$

Продифференцируем равенство (4.3) по t , считая, что a^1 и a^2 зависят от t как решения уравнения (4.1):

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \sum_{i=1}^2 \dot{a}^i \cdot \mathbf{E}_i + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a^i \cdot \frac{\partial \mathbf{E}_i}{\partial u^j} \cdot \dot{u}^j. \quad (4.4)$$

Производные $\partial \mathbf{E}_i / \partial u^j$ вычислим по дериационным формулам Вайнгартена (см. формулы (4.11) в четвертой главе). Тогда

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \sum_{i=1}^2 \left(\dot{a}^i + \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \Gamma_{jk}^i \dot{u}^j a^k \right) \cdot \mathbf{E}_i + \left(\sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 b_{jk} \dot{u}^j a^k \right) \cdot \mathbf{n}.$$

В силу того, что функции $a^i(t)$ удовлетворяют уравнениям (4.1), коэффициенты при векторах \mathbf{E}_i зануляются:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \left(\sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 b_{jk} \dot{u}^j a^k \right) \cdot \mathbf{n}. \quad (4.5)$$

Коэффициент при векторе нормали \mathbf{n} в формуле (4.5) определяется второй квадратичной формой поверхности. Это значение соответствующей симметричной билинейной формы на паре векторов — на векторе \mathbf{a} и касательном векторе $\boldsymbol{\tau}$:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \mathbf{b}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n}. \quad (4.6)$$

Уравнение (4.6) называется *внешним уравнением внутреннего параллельного переноса на поверхностях*.

Операция параллельного переноса может быть обобщена на случай внутренних тензоров произвольного типа (r, s) . Для этой цели была определена операция ковариантного дифференцирования тензорных функций на кривых по параметру t (см. формулу (8.10) из третьей главы). Двумерный вариант этой формулы имеет вид:

$$\begin{aligned} \nabla_t A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} &= \frac{dA_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{dt} + \\ &+ \sum_{m=1}^r \sum_{q=1}^2 \sum_{v_m=1}^2 \Gamma_{qv_m}^{i_m} \dot{u}^q A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots v_m \dots i_r} - \\ &- \sum_{n=1}^s \sum_{q=1}^2 \sum_{w_n=1}^2 \Gamma_{qw_n}^{w_n} \dot{u}^q A_{j_1 \dots w_n \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

В терминах ковариантной производной (4.7) уравнение внутреннего параллельного переноса для поля \mathbf{A} имеет вид:

$$\nabla_t \mathbf{A} = 0. \quad (4.8)$$

Корректность определения внутреннего параллельного переноса уравнением (4.8) вытекает из двумерного аналога теоремы 8.2 из третьей главы.

ТЕОРЕМА 4.1. *Для всякой внутренней тензорнозначной функции $\mathbf{A}(t)$ типа (r, s) , определенной в точках параметрической кривой на некоторой поверхности, величины $B_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \nabla_t A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$, вычисленные по формуле (4.7), определяют тензорнозначную функцию $\mathbf{B}(t) = \nabla_t \mathbf{A}$ того же самого типа (r, s) , что и исходная функция $\mathbf{A}(t)$.*

Доказательство этой теоремы практически дословно повторяет доказательство теоремы 8.2 в третьей главе. Поэтому мы его здесь не приводим.

Ковариантное дифференцирование ∇_t , определяемое формулой (4.7), обладает рядом свойств, сходных со свойствами ковариантного дифференцирования вдоль векторного поля $\nabla_{\mathbf{x}}$ (см. формулу (6.10) и теорему 6.2 в четвертой главе).

ТЕОРЕМА 4.2. *Операция ковариантного дифференцирования тензорнозначных функций по параметру t вдоль кривых на поверхностях обладает следующими свойствами:*

- (1) $\nabla_t(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla_t \mathbf{A} + \nabla_t \mathbf{B}$;
- (2) $\nabla_t(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \nabla_t \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{A} \otimes \nabla_t \mathbf{B}$,
- (3) $\nabla_t C(\mathbf{A}) = C(\nabla_t \mathbf{A})$;

ДОК-ВО. Выберем произвольную криволинейную систему координат на поверхности и проведем доказательство теоремы прямыми вычислениями в координатах. Пусть $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$. Тогда для компонент тензорнозначной функции $\mathbf{C}(t)$ имеем:

$$C_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} + B_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}.$$

Подстановка $C_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ в формулу (4.7) для ковариантной произ-

водной после несложных вычислений дает:

$$\nabla_t C_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \nabla_t A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} + \nabla_t B_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}.$$

Это доказывает соотношение в первом пункте теоремы.

Перейдем к пункту (2). Положим $\mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$. Тогда для компонент тензорного поля \mathbf{C} имеем:

$$C_{j_1 \dots j_{s+q}}^{i_1 \dots i_{r+p}} = A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} B_{j_{s+1} \dots j_{s+q}}^{i_{r+1} \dots i_{r+p}}. \quad (4.9)$$

Подставим величины $C_{j_1 \dots j_{s+q}}^{i_1 \dots i_{r+p}}$ из (4.9) в формулу (4.8) для ковариантной производной. В результате такой подстановки для компонент поля $\nabla_t \mathbf{C}$ выводим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \nabla_t C_{j_1 \dots j_{s+q}}^{i_1 \dots i_{r+p}} &= (dA_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} / dt) B_{j_{s+1} \dots j_{s+q}}^{i_{r+1} \dots i_{r+p}} + \\ &\quad + A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} (dB_{j_{s+1} \dots j_{s+q}}^{i_{r+1} \dots i_{r+p}} / dt) + \\ &\quad + \sum_{m=1}^r \sum_{q=1}^2 \sum_{v_m=1}^2 \Gamma_{v_m}^{i_m} \dot{u}^q A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots v_m \dots i_r} B_{j_{s+1} \dots j_{s+q}}^{i_{r+1} \dots i_{r+p}} + \\ &\quad + \sum_{m=r+1}^{r+p} \sum_{q=1}^2 \sum_{v_m=1}^2 A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \Gamma_{v_m}^{i_m} \dot{u}^q B_{j_{s+1} \dots j_{s+q}}^{i_{r+1} \dots v_m \dots i_{r+p}} - \\ &\quad - \sum_{n=1}^s \sum_{q=1}^2 \sum_{w_n=1}^2 \Gamma_{j_n}^{w_n} \dot{u}^q A_{j_1 \dots w_n \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} B_{j_{s+1} \dots j_{s+q}}^{i_{r+1} \dots i_{r+p}} - \\ &\quad - \sum_{n=s+1}^{s+q} \sum_{q=1}^2 \sum_{w_n=1}^2 A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \Gamma_{j_n}^{w_n} \dot{u}^q B_{j_{s+1} \dots w_n \dots j_{s+q}}^{i_{r+1} \dots i_{r+p}}. \end{aligned}$$

Заметим, что после приведения подобных слагаемых получен-

ную здесь громоздкую формулу можно преобразовать так:

$$\begin{aligned} \nabla_t (A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} B_{j_{s+1} \dots j_{s+q}}^{i_{r+1} \dots i_{r+p}}) &= (\nabla_t A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}) \times \\ &\times B_{j_{s+1} \dots j_{s+q}}^{i_{r+1} \dots i_{r+p}} + A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} (\nabla_t B_{j_{s+1} \dots j_{s+q}}^{i_{r+1} \dots i_{r+p}}). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Теперь нетрудно видеть, что выведенная формула (4.10) доказывает второй пункт теоремы.

Рассмотрим две тензорнозначные функции $\mathbf{A}(t)$ и $\mathbf{B}(t)$, одна из которых есть свертка другой:

$$B_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \sum_{k=1}^2 A_{j_1 \dots j_{q-1} k j_q \dots j_s}^{i_1 \dots i_{p-1} k i_p \dots i_r}. \quad (4.11)$$

Подставим (4.11) в формулу (4.7). Для $\nabla_t B_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ это дает:

$$\begin{aligned} \nabla_t B_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} &= \sum_{k=1}^2 \frac{dA_{j_1 \dots j_{q-1} k j_q \dots j_s}^{i_1 \dots i_{p-1} k i_p \dots i_r}}{dt} + \\ &+ \sum_{m=1}^r \sum_{k=1}^2 \sum_{q=1}^2 \sum_{v_m=1}^2 \Gamma_{q v_m}^{i_m} \dot{u}^q A_{j_1 \dots j_{q-1} k j_q \dots j_s}^{i_1 \dots v_m \dots k \dots i_r} - \\ &- \sum_{n=1}^s \sum_{k=1}^2 \sum_{q=1}^2 \sum_{w_n=1}^2 \Gamma_{q j_n}^{w_n} \dot{u}^q A_{j_1 \dots w_n \dots k \dots j_s}^{i_1 \dots i_{p-1} k i_p \dots i_r}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

В формуле (4.12) индекс v_m может располагаться как левее индекса k , так и правее его. То же самое относится и к w_n . Однако, в ней нет слагаемых, когда v_m или w_n замещают индекс k . Такие слагаемые согласно (4.7) имели бы вид:

$$\sum_{k=1}^2 \sum_{q=1}^2 \sum_{v=1}^2 \Gamma_{q v}^k \dot{u}^q A_{j_1 \dots j_{q-1} k j_q \dots j_s}^{i_1 \dots i_{p-1} v i_p \dots i_r}, \quad (4.13)$$

$$- \sum_{k=1}^2 \sum_{q=1}^2 \sum_{w=1}^2 \Gamma_{q k}^w \dot{u}^q A_{j_1 \dots j_{q-1} w j_q \dots j_s}^{i_1 \dots i_{p-1} k i_p \dots i_r}. \quad (4.14)$$

Нетрудно заметить, что (4.13) и (4.14) отличаются лишь знаком. Для этого достаточно заменить k на v и w на k в формуле (4.14). Одновременное добавление (4.13) и (4.14) к (4.12) не нарушает равенства. Поэтому (4.12) можно переписать так:

$$\nabla_{j_{s+1}} B_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \sum_{k=1}^2 \nabla_{j_{s+1}} A_{j_1 \dots j_{q-1} k j_q \dots j_s}^{i_1 \dots i_{p-1} k i_p \dots i_r}. \quad (4.15)$$

Соотношение (4.15) доказывает третий пункт теоремы, а вместе с ним и всю теорему в целом. \square

При замене параметризации кривой новый параметр \tilde{t} должен быть строго монотонной функцией старого параметра t (подробнее см. § 2 в первой главе). При такой репараметризации кривой производные $\nabla_{\tilde{t}}$ и ∇_t связаны соотношением

$$\nabla_t \mathbf{A} = \frac{d\tilde{t}(t)}{dt} \cdot \nabla_{\tilde{t}} \mathbf{A} \quad (4.16)$$

для любой тензорзначной функции \mathbf{A} на кривой. Это соотношение есть простое следствие формулы (4.7) и правила дифференцирования сложной функции. Оно является аналогом свойства (3) для производной $\nabla_{\mathbf{x}}$ в теореме 6.2 из четвертой главы.

Пусть \mathbf{A} — некоторое тензорное поле типа (r, s) на поверхности. Задание такого поля означает, что в каждой точке поверхности задан тензор типа (r, s) . Выделив из всех точек поверхности только точки, принадлежащие некоторой кривой, из тензорного поля \mathbf{A} мы получим тензорзначную функцию $\mathbf{A}(t)$ на этой кривой. В компонентах это записывается так:

$$A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(t) = A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(u^1(t), u^2(t)). \quad (4.17)$$

Построенная таким способом функция $\mathbf{A}(t)$ называется *сужением тензорного поля \mathbf{A} на кривую*. Специфика сужений

тензорных полей на кривые, выраженное формулой (4.17), проявляется при дифференцировании:

$$\frac{dA_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{dt} = \sum_{q=1}^2 \frac{\partial A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial u^q} \dot{u}^q. \quad (4.18)$$

Подстановка (4.18) в формулу (4.7) позволяет выделить общий множитель u^q при суммировании по q . После выделения такого множителя обнаруживаем:

$$\nabla_t A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \sum_{q=1}^2 \dot{u}^q \nabla_q A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}. \quad (4.19)$$

Формула (4.19) показывает, что ковариантная производная сужения тензорного поля \mathbf{A} на кривую по параметру t на этой кривой есть свертка ковариантного дифференциала $\nabla \mathbf{A}$ с касательным вектором кривой.

Пусть $\nabla \mathbf{A} = 0$. Тогда в силу (4.19) сужение поля \mathbf{A} на любую кривую есть тензорнозначная функция, удовлетворяющая уравнению параллельного переноса (4.8). Значения такого поля \mathbf{A} в различных точках связаны друг с другом параллельным переносом вдоль любой кривой, соединяющей эти точки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Тензорное поле \mathbf{A} называется *автопараллельным* или *ковариантно константным*, если его ковариантный дифференциал равен нулю тождественно: $\nabla \mathbf{A} = 0$.

Некоторые из известных тензорных полей на поверхности имеют тождественно нулевой ковариантный дифференциал: это метрический тензор \mathbf{g} , обратный метрический тензор $\hat{\mathbf{g}}$ и тензор (псевдотензор) площади $\boldsymbol{\tau}$. Автопараллельность этих полей играет важную роль для описания внутреннего параллельного переноса.

Пусть \mathbf{a} и \mathbf{b} — два касательных вектора к поверхности, прикрепленных к начальной точке некоторой кривой. Их скалярное произведение вычисляется по компонентам этих векторов согласно следующей формуле:

$$(\mathbf{a} | \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 g_{ij} a^i b^j.$$

Выполним параллельный перенос векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} вдоль кривой, решив уравнение (4.8) и используя компоненты векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} в качестве начальных данных. Это определяет две векторнозначные функции $\mathbf{a}(t)$ и $\mathbf{b}(t)$ на кривой. Рассмотрим функцию $\psi(t)$, равную их скалярному произведению:

$$\psi(t) = (\mathbf{a}(t) | \mathbf{b}(t)) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 g_{ij}(t) a^i(t) b^j(t). \quad (4.20)$$

Согласно формуле (4.7) ковариантная производная $\nabla_t \psi$ скалярного поля совпадает с обычной производной. Поэтому

$$\frac{d\psi}{dt} = \nabla_t \psi = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (\nabla_t g_{ij} a^i b^j + g_{ij} \nabla_t a^i b^j + g_{ij} a^i \nabla_t b^j).$$

Здесь мы использовали пункты (2) и (3) теоремы 4.2. Но $\nabla_t a^i = 0$ и $\nabla_t b^j = 0$ в силу того, что вектор-функции $\mathbf{a}(t)$ и $\mathbf{b}(t)$ получены в результате параллельного переноса векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} . Кроме того, $\nabla_t g_{ij} = 0$ в силу автопараллельности метрического тензора. Для скалярной функции $\psi(t)$ из (4.20) это дает $d\psi/dt = 0$ и $\psi(t) = (\mathbf{a} | \mathbf{b}) = \text{const}$. В результате приведенных рассуждений мы доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4.3. *Операция внутреннего параллельного переноса векторов вдоль кривых на поверхностях сохраняет скалярное произведение векторов.*

Сохраняя скалярные произведения, операция внутреннего параллельного переноса векторов сохраняет длины векторов и углы между ними. Из автопараллельности метрического тензора \mathbf{g} и обратного метрического тензора $\hat{\mathbf{g}}$ вытекают следующие формулы, аналогичные (7.9) из четвертой главы:

$$\begin{aligned} \nabla_t \left(\sum_{k=1}^2 g_{ik} A^{\dots k \dots} \right) &= \sum_{k=1}^2 g_{ik} \nabla_t A^{\dots k \dots}, \\ \nabla_t \left(\sum_{k=1}^2 g^{ik} A^{\dots k \dots} \right) &= \sum_{k=1}^2 g^{ik} \nabla_t A^{\dots k \dots}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Из формул (4.21), в свою очередь, вытекает следующий факт.

ТЕОРЕМА 4.4. *Операция внутреннего параллельного переноса перестановочна с поднятием и опусканием индексов.*

§ 5. Интегрирование на поверхностях.

Формула Грина.

Рассмотрим пространство \mathbb{R}^2 . Изобразим его в виде координатной плоскости u^1, u^2 . Выберем в координатной плоскости u^1, u^2 односвязную область Ω , ограниченную замкнутым контуром γ . На контуре γ отметим направление обхода (ориентацию) так, чтобы при обходе вокруг области Ω эта область все время оставалась слева. На рисунке такое направление обхода контура изображено стрелкой.

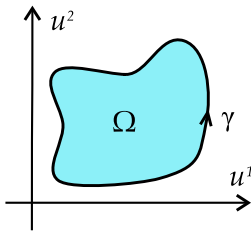


Рис. 5.1

Рассмотрим пару непрерывно дифференцируемых функций на координатной плоскости: $P(u^1, u^2)$ и $Q(u^1, u^2)$. Тогда, при вы-

полнении всех сформулированных выше условий имеет место следующее интегральное равенство:

$$\oint_{\gamma} (P du^1 + Q du^2) = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial u^1} - \frac{\partial P}{\partial u^2} \right) du^1 du^2. \quad (5.1)$$

Равенство (5.1) известно как формула Грина (см. [2]). Равенство (5.1) выполнено на плоскости. Нам же потребуется его обобщение на случай поверхностей в пространстве. При таком обобщении координатная плоскость u^1, u^2 или какая-то ее часть играет лишь роль карты. Реальная же геометрическая область и ограничивающий ее контур располагаются на поверхности. Поэтому интегралы в обеих частях формулы Грина должны быть преобразованы к такому виду, чтобы их можно было легко записать в любой криволинейной системе координат на поверхности, а их значения не зависели бы от конкретного выбора такой системы координат.

Начнем с интеграла в левой части (5.1). Такие интегралы называют *контурными интегралами второго рода*. Переобозначим P через v_1 , а Q — через v_2 . Тогда интеграл в левой части формулы (5.1) запишется так:

$$I = \oint_{\gamma} \sum_{i=1}^2 v_i(u^1, u^2) du^i. \quad (5.2)$$

Для фактического вычисления интеграла (5.2) на контуре γ выбирается параметризация, и он задается в виде параметрической кривой (1.1). Тогда значение интеграла второго рода вычисляется по формуле:

$$I = \pm \int_a^b \left(\sum_{i=1}^2 v_i \dot{u}^i \right) dt. \quad (5.3)$$

Эту формулу, сводящую интеграл второго рода к обычному интегралу по отрезку $[a, b]$ на числовой прямой, можно принять за определение интеграла (5.2). Знак выбирается в соответствии с направлением обхода контура, изображенным на рисунке 5.1. Если $a < b$ и при изменении t от a до b соответствующая точка на контуре перемещается вдоль стрелки, то выбирается знак плюс, в противоположном случае — знак минус. Сделав замену переменных $\tilde{t} = \varphi(t)$ в интеграле (5.3) и выбрав правильный знак после репараметризации, можно убедиться, что величина этого интеграла не зависит от выбора параметризации на контуре.

Теперь сделаем замену криволинейных координат на поверхности. Производные \dot{u}^i в интеграле (5.3) при замене криволинейных координат преобразуются так:

$$\dot{u}^i = \frac{du^i}{dt} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^j} \frac{d\tilde{u}^j}{dt} = \sum_{j=1}^2 S_j^i \dot{\tilde{u}}^j. \quad (5.4)$$

Подстановка соотношений (5.4) в формулу (5.3) приводит к следующему выражению для интеграла I :

$$I = \pm \int_a^b \left(\sum_{j=1}^2 \left(\sum_{i=1}^2 S_j^i v_i \right) \dot{\tilde{u}}^j \right) dt. \quad (5.5)$$

Теперь запишем соотношение (5.3) в координатах \tilde{u}^1, \tilde{u}^2 . Для этого в (5.3) заменим u^i на \tilde{u}^i и v_i на \tilde{v}_i :

$$I = \pm \int_a^b \left(\sum_{i=1}^2 \tilde{v}_i \dot{\tilde{u}}^i \right) dt. \quad (5.6)$$

Сравнение формул (5.5) и (5.6) показывает, что эти две формулы имеют сходную структуру. Для того, чтобы числовые

значения интегралов совпадали всегда (независимо от формы контура γ и от конкретного выбора его параметризации), величины v_i и \tilde{v}_i при замене криволинейных координат на поверхности должны преобразовываться так:

$$\tilde{v}_j = \sum_{i=1}^2 S_j^i v_i, \quad v_i = \sum_{j=1}^2 T_i^j \tilde{v}_j.$$

Это правило преобразования компонент ковекторного поля. Таким образом, контурные интегралы второго рода на поверхностях (5.2) задаются некоторыми ковекторными полями на этой поверхности.

Теперь перейдем к интегралу в правой части формулы Грина (5.1). Отвлекаясь на время от конкретного вида подинтегрального выражения, рассмотрим двукратный интеграл

$$I = \iint_{\Omega} F du^1 du^2. \quad (5.7)$$

Замену криволинейных координат на поверхности можно интерпретировать как замену переменных в интеграле (5.7). Напомним, что замена переменных в кратном интеграле производится по следующему правилу (см. [2])

$$\iint_{\Omega} F du^1 du^2 = \iint_{\tilde{\Omega}} F |\det J| d\tilde{u}^1 d\tilde{u}^2, \quad (5.8)$$

где J — матрица Якоби, определяемая заменой переменных:

$$J = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{array} \right\|. \quad (5.9)$$

Матрица Якоби (5.9) совпадает с матрицей перехода S (см.

формулу (2.7) в четвертой главе). Поэтому правило преобразования подинтегральной функции F при замене криволинейных координат на поверхности должно было бы иметь вид:

$$\tilde{F} = |\det S| F. \quad (5.10)$$

Величина F в интеграле не имеет индексов. Однако, в силу (5.10) эта величина не является ни скаляром, ни псевдоскаляром. Чтобы изменить эту не совсем удобную ситуацию, интеграл по поверхности (5.7) записывают в виде

$$I = \iint_{\Omega} \sqrt{\det \mathbf{g}} f \, du^1 du^2, \quad (5.11)$$

где $\det \mathbf{g}$ — определитель матрицы первой квадратичной формы. В этом случае в формуле (5.11) величина f уже является скаляром. Это вытекает из соотношения $\det \mathbf{g} = (\det T)^2 \det \tilde{\mathbf{g}}$ для преобразования детерминанта матрицы метрического тензора при замене системы координат.

Возвращаясь теперь к интегралу в правой части (5.1), преобразуем его к виду (5.11). Для этого используем введенные выше обозначения $P = v_1$ и $Q = v_2$, помня, что v_1 и v_2 — это компоненты ковекторного поля. Тогда

$$\frac{\partial Q}{\partial u^1} - \frac{\partial P}{\partial u^2} = \frac{\partial v_2}{\partial u^1} - \frac{\partial v_1}{\partial u^2}. \quad (5.12)$$

Правую часть в формуле (5.12) можно представить в виде свертки с компонентами единичной кососимметричной матрицы d^{ij} (см. формулу (3.6) четвертой главы):

$$\frac{\partial v_2}{\partial u^1} - \frac{\partial v_1}{\partial u^2} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 d^{ij} \frac{\partial v_j}{\partial u^i} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sum_{j=1}^2 d^{ij} v_j \right). \quad (5.13)$$

Заметим, что величины d_{ij} с нижними индексами входят в состав тензора площади ω (см. формулу (3.7) в четвертой главе). Произведем поднятие индексов в тензоре площади при помощи обратного метрического тензора:

$$\omega^{ij} = \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 g^{ip} g^{jq} \omega_{pq} = \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \xi_D \sqrt{\det \mathbf{g}} g^{ip} g^{jq} d_{pq}.$$

Использование формулы (3.7) из четвертой главы позволяет вычислить компоненты тензора площади ω^{ij} явно:

$$\omega^{ij} = \xi_D \sqrt{\det \mathbf{g}^{-1}} d^{ij}. \quad (5.14)$$

Теперь применим (5.14) для того, чтобы выразить d^{ij} в формуле (5.13) через компоненты тензора площади:

$$\frac{\partial v_2}{\partial u^1} - \frac{\partial v_1}{\partial u^2} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sum_{j=1}^2 \xi_D \sqrt{\det \mathbf{g}} \omega^{ij} v_j \right).$$

Для упрощения дальнейших выкладок введем обозначения:

$$y^i = \sum_{j=1}^2 \omega^{ij} v_j. \quad (5.15)$$

С учетом таких обозначений формула (5.13) может быть преобразована к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_2}{\partial u^1} - \frac{\partial v_1}{\partial u^2} &= \sum_{i=1}^2 \xi_D \frac{\partial(\sqrt{\det \mathbf{g}} y^i)}{\partial u^i} = \\ &= \xi_D \sqrt{\det \mathbf{g}} \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial y^i}{\partial u^i} + \frac{1}{2} \frac{\partial(\ln \det \mathbf{g})}{\partial u^i} y^i \right). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Логарифмическая производная детерминанта матрицы метрического тензора вычисляется при помощи леммы 7.1 из четвертой главы. Однако, здесь нет необходимости повторять выкладки, ибо подобная производная уже посчитана, см. формулу (7.12) и доказательство теоремы 7.2 в четвертой главе. Из приведенных там выкладок извлекаем:

$$\frac{\partial(\ln \det \mathbf{g})}{\partial u^i} = \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 g^{pq} \frac{\partial g_{pq}}{\partial u^i} = \sum_{q=1}^2 2 \Gamma_{iq}^q. \quad (5.17)$$

С учетом (5.17) формула (5.16) преобразуется так:

$$\frac{\partial v_2}{\partial u^1} - \frac{\partial v_1}{\partial u^2} = \xi_D \sqrt{\det \mathbf{g}} \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial y^i}{\partial u^i} + \sum_{q=1}^2 \Gamma_{qi}^q y^i \right).$$

В полученной формуле легко узнается свертка ковариантной производной векторного поля \mathbf{y} :

$$\frac{\partial v_2}{\partial u^1} - \frac{\partial v_1}{\partial u^2} = \xi_D \sqrt{\det \mathbf{g}} \sum_{i=1}^2 \nabla_i y^i. \quad (5.18)$$

Использование формулы (5.18), а также учет введенного обозначения (5.15) и условия автопараллельности тензора площади $\nabla_q \omega^{ij} = 0$ позволяет записать формулу Грина так:

$$\oint_{\gamma} \sum_{i=1}^2 v_i du^i = \xi_D \iint_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \omega^{ij} \nabla_i v_j \sqrt{\det \mathbf{g}} du^1 du^2. \quad (5.19)$$

Особого комментария требует знаковый множитель ξ_D в формуле (5.19). Сформулированное вначале условие того, что при обходе контура γ область Ω должна оставаться слева, не

выдерживает произвольной замены координат u^1, u^2 на \tilde{u}^1, \tilde{u}^2 . Действительно, если положить $\tilde{u}^1 = -u^1$ и $\tilde{u}^2 = u^2$, то переход к таким координатам приведет к зеркальному отражению области Ω и контура γ , изображенных на рисунке 5.1. Поэтому направление обхода должно быть задано жестко на самом геометрическом контуре γ , лежащем на поверхности, а не на его образе в карте. Тогда множитель ξ_D в (5.19) можно убрать.

Задание направления обхода геометрического контура на поверхности фиксирует способ выбора вектора нормали на этой поверхности: нормаль должна быть выбрана так, чтобы при наблюдении с конца вектора \mathbf{n} при обходе контура γ в заданном направлении область Ω оставалась слева. Выбор нормали \mathbf{n} задает ориентацию на поверхности и определяет поле ориентации ξ_D .

§ 6. Теорема Гаусса-Бонне.

Рассмотрим вновь процесс внутреннего параллельного перенесения касательных векторов вдоль кривых на поверхностях. Уравнение (4.6) показывает, что с внешней (трехмерной) точки зрения этот параллельный перенос существенно отличается от обычного: переносимые касательные вектора к поверхности не остаются параллельными одному и тому же направлению в пространстве, они меняются. Однако, сохраняется их длина, и, если мы одновременно переносим несколько векторов по одной кривой, то сохраняются углы между этими векторами (см. теорему 4.3).

Из приведенного описания ясно, что в процессе параллельного перенесения одновременно с перемещением их точки прикрепления вдоль кривой происходит поворот этих векторов в касательной плоскости вокруг вектора нормали. Возникает вопрос — как измерить угол такого поворота? Решением этого вопроса мы и будем сейчас заниматься.

Пусть на поверхности выделена ориентация. Это означает,

что задано поле ориентации ξ_D , определяющее тензор площади ω (см. формулу (3.10) из четвертой главы). Мы уже знаем, что задание ξ_D определяет выбор одного из двух возможных векторов нормали \mathbf{n} в каждой точке поверхности (см. формулу (4.3) из четвертой главы).

ТЕОРЕМА 6.1. *Внутренне тензорное поле Θ типа (1, 1) со следующими компонентами:*

$$\theta_j^i = \sum_{k=1}^2 \omega_{jk} g^{ki}, \quad (6.1)$$

есть операторное поле, задающее поворот в касательной плоскости на угол $\pi/2 = 90^\circ$ против часовой стрелки вокруг вектора нормали \mathbf{n} .

ДОК-ВО. Пусть \mathbf{a} — некоторый касательный вектор к поверхности и пусть \mathbf{n} — вектор нормали к поверхности в точке прикрепления вектора \mathbf{a} . Тогда, для построения вектора $\mathbf{b} = \Theta(\mathbf{a})$, полученного из \mathbf{a} поворотом против часовой стрелки на угол $\pi/2 = 90^\circ$ вокруг вектора \mathbf{n} , можно использовать следующее векторное произведение:

$$\mathbf{b} = \Theta(\mathbf{a}) = [\mathbf{n}, \mathbf{a}]. \quad (6.2)$$

Подставим в формулу (6.2) выражение для вектора нормали \mathbf{n} , выписанное в формуле (4.3) из четвертой главы. А для вектора \mathbf{a} воспользуемся его разложением по базису $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$:

$$\mathbf{a} = a^1 \cdot \mathbf{E}_1 + a^2 \cdot \mathbf{E}_2. \quad (6.3)$$

Тогда для вектора \mathbf{b} в формуле (6.2) получаем:

$$\mathbf{b} = \sum_{j=1}^2 \xi_D \cdot \frac{[[\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2], \mathbf{E}_j]}{||[\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2]||} \cdot a^j. \quad (6.4)$$

Для вычисления знаменателя в формуле (6.4) применим известную формулу из аналитической геометрии (см. [4]):

$$|[\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2]|^2 = \det \begin{vmatrix} (\mathbf{E}_1 | \mathbf{E}_1) & (\mathbf{E}_1 | \mathbf{E}_2) \\ (\mathbf{E}_2 | \mathbf{E}_1) & (\mathbf{E}_2 | \mathbf{E}_2) \end{vmatrix} = \det \mathbf{g}.$$

Для преобразования же числителя в (6.4) используем не менее известную формулу для двойного векторного произведения:

$$[[\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2], \mathbf{E}_j] = \mathbf{E}_2 \cdot (\mathbf{E}_1 | \mathbf{E}_j) - \mathbf{E}_1 \cdot (\mathbf{E}_j | \mathbf{E}_2).$$

Учет этих двух формул позволяет записать (6.4) так:

$$\mathbf{b} = \sum_{j=1}^2 \xi_D \cdot \frac{g_{1j} \cdot \mathbf{E}_2 - g_{2j} \cdot \mathbf{E}_1}{\sqrt{\det \mathbf{g}}} \cdot a^j. \quad (6.5)$$

Использование компонент тензора площади (5.14) позволяет переписать (6.5) в еще более компактной форме:

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \omega^{ki} g_{kj} a^j \right) \cdot \mathbf{E}_i.$$

Отсюда уже легко извлекается формула (6.1) для компонент матрицы линейного оператора Θ , связывающего вектора \mathbf{b} и \mathbf{a} . Теорема доказана. \square

Операторное поле Θ получается в результате свертки произведения полей ω и \mathbf{g} . Из автопараллельности последних вытекает автопараллельность поля Θ , то есть $\nabla \Theta = 0$.

Используем автопараллельности Θ в следующей ситуации: выберем некоторую кривую γ и осуществим параллельный перенос некоторого единичного вектора \mathbf{a} вдоль такой кривой. Это определяет векторнозначную функцию $\mathbf{a}(t)$ на кривой, удовлетворяющую уравнению параллельного переноса:

$\nabla_t \mathbf{a} = 0$ (см. формулу (4.8)). Векторную функцию $\mathbf{b}(t)$ на кривой определим следующим образом:

$$\mathbf{b}(t) = \Theta(\mathbf{a}(t)). \quad (6.6)$$

Тогда $\nabla_t(\mathbf{b}) = \nabla_t\Theta(\mathbf{a}) + \Theta(\nabla_t\mathbf{a}) = 0$. То есть функция (6.6) также удовлетворяет уравнению параллельного переноса. Это вытекает из автопараллельности поля Θ и пунктов (2) и (3) в теореме 4.2. Таким образом, вектор-функции $\mathbf{a}(t)$ и $\mathbf{b}(t)$ задают в каждой точке кривой пару взаимно перпендикулярных единичных векторов. Имеют место следующие соотношения:

$$\Theta(\mathbf{a}) = \mathbf{b}, \quad \Theta(\mathbf{b}) = -\mathbf{a}. \quad (6.7)$$

Вектора $\mathbf{a}(t)$ и $\mathbf{b}(t)$ получаются параллельным переносом векторов $\mathbf{a}(0)$ и $\mathbf{b}(0)$ вдоль кривой из ее начальной точки.

Теперь рассмотрим некоторое касательное векторное поле \mathbf{x} на поверхности. Если вектора поля $\mathbf{x}(u^1, u^2)$ не обращаются в ноль ни в одной точке, то их можно отнормировать на единицу, заменив \mathbf{x} на $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$. Поэтому будем считать поле \mathbf{x} полем единичных векторов $|\mathbf{x}| = 1$. В точках кривой γ такое поле можно разложить по векторам \mathbf{a} и \mathbf{b}

$$\mathbf{x} = \cos(\varphi) \cdot \mathbf{a} + \sin(\varphi) \cdot \mathbf{b}. \quad (6.8)$$

Функция $\varphi(t)$ определяет угол между вектором \mathbf{a} и вектором поля \mathbf{x} , отсчитываемый от \mathbf{a} к \mathbf{x} в направлении против часовой стрелки. Изменение угла φ при перемещении по кривой описывает поворот векторов в процессе параллельного перенесения вдоль кривой.

Продифференцируем соотношение (6.8) ковариантным образом по t , учитывая при этом, что \mathbf{a} и \mathbf{b} удовлетворяют уравнению параллельного переноса:

$$\nabla_t \mathbf{x} = (-\sin(\varphi) \cdot \mathbf{a} + \cos(\varphi) \cdot \mathbf{b}) \cdot \dot{\varphi}. \quad (6.9)$$

Здесь мы учли, что ковариантная производная ∇_t для скаляра совпадает с обычной производной по t . В частности, $\nabla_t \varphi = \dot{\varphi}$.

Применим к обеим частям разложения (6.8) линейный оператор Θ и учтем при этом соотношения (6.7):

$$\Theta(\mathbf{x}) = \cos(\varphi) \cdot \mathbf{b} - \sin(\varphi) \cdot \mathbf{a}. \quad (6.10)$$

Теперь умножим скалярно вектора $\Theta(\mathbf{x})$ из (6.10) и $\nabla_t \mathbf{x}$ из (6.9). При этом учтем ортогональность векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} и единичность их длины. Это дает:

$$(\Theta(\mathbf{x}) | \nabla_t \mathbf{x}) = (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) \dot{\varphi} = \dot{\varphi}. \quad (6.11)$$

Запишем полученное равенство (6.11) в компонентах поля \mathbf{x} . Вектор-функция $\mathbf{x}(t)$ на кривой является сужением векторного поля \mathbf{x} на кривую, поэтому производная $\nabla_t \mathbf{x}$ есть свертка ковариантного дифференциала $\nabla \mathbf{x}$ с касательным вектором к кривой (см. формулу (4.19)). Поэтому

$$\dot{\varphi} = \sum_{q=1}^2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (x^i \omega_{ij} \nabla_q x^j) \dot{u}^q. \quad (6.12)$$

Здесь при выводе (6.12) из (6.11) мы использовали формулу (6.1) для компонент поля Θ .

Обсудим вопрос о роли поля \mathbf{x} в изложенной конструкции. Векторное поле \mathbf{x} выбрано в качестве маркера, относительно которого измеряется угол поворота вектора \mathbf{a} при параллельном переносе. Такой способ измерения относителен. Изменив выбор поля \mathbf{x} мы меняем и величину угла φ . С этим приходится мириться, ибо касательные плоскости к поверхности в разных ее точках не параллельны и на них нет выделенного абсолютного направления, относительно которого можно было бы отсчитывать углы.

Однако, имеется одна возможность исключить неоднозначность, связанную с выбором поля \mathbf{x} . Рассмотрим замкнутый

контур γ . Пусть отрезок $[0, 1]$ есть область изменения параметра t на таком контуре. Тогда вектор $\mathbf{x}(0)$ и вектор $\mathbf{x}(1)$ — это один и тот же вектор в точке с координатами $u^1(0), u^2(0)$:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(1) = \mathbf{x}(u^1(0), u^2(0)).$$

В отличие от $\mathbf{x}(t)$, функция $\mathbf{a}(t)$ не является сужением векторного поля на кривую γ . Поэтому вектора $\mathbf{a}(0)$ и $\mathbf{a}(1)$ могут и не совпасть. Это важное отличие внутреннего параллельного переноса на поверхностях от параллельного переноса в евклидовом пространстве \mathbb{E} .

В случае замкнутого контура γ разность $\varphi(1) - \varphi(0)$ характеризует угол, на который поворачивается вектор \mathbf{a} в результате его параллельного перенесения вдоль контура. Заметим отсчет угла от \mathbf{x} к \mathbf{a} противоположен отсчету от \mathbf{a} к \mathbf{x} в формуле (6.8). Поэтому, считая положительным угол, отсчитанный от \mathbf{x} против часовой стрелки, мы должны считать приращением угла φ при обходе контура величину

$$\Delta\varphi = \varphi(0) - \varphi(1) = - \int_0^1 \dot{\varphi} dt.$$

Подставим сюда величину производной $\dot{\varphi}$, найденную в (6.12), и для приращения угла получим интегральную формулу:

$$\Delta\varphi = - \int_0^1 \left(\sum_{q=1}^2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (x^i \omega_{ij} \nabla_q x^j) \dot{u}^q \right) dt. \quad (6.13)$$

Сравнение формулы (6.13) с (5.3) позволяет записать ее в виде контурного интеграла второго рода:

$$\Delta\varphi = - \oint_{\gamma} \sum_{q=1}^2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (x^i \omega_{ij} \nabla_q x^j) du^q. \quad (6.14)$$

Пусть контур γ ограничивает некоторый односвязный фрагмент поверхности Ω . Тогда для такого фрагмента поверхности можно применить формулу Грина, записанную в виде (5.19):

$$\Delta\varphi = - \iint_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \omega^{ij} \nabla_i (x^p \omega_{pq} \nabla_j x^q) \sqrt{\det \mathbf{g}} \, du^1 du^2.$$

Если направление обхода контура согласовано с ориентацией поверхности, то множитель ξ_D можно убрать:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi = - \iint_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 (x^p \omega^{ij} \omega_{pq} \nabla_i \nabla_j x^q + \\ + \nabla_i x^p \omega^{ij} \omega_{pq} \nabla_j x^q) \sqrt{\det \mathbf{g}} \, du^1 du^2. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Покажем, что вклад от слагаемого $\nabla_i x^p \omega^{ij} \omega_{pq} \nabla_j x^q$ в формуле (6.15) равен нулю. Это обстоятельство является спецификой двумерного случая, когда имеет место соотношение:

$$\omega^{ij} \omega_{pq} = d^{ij} d_{pq} = \delta_p^i \delta_q^j - \delta_q^i \delta_p^j. \quad (6.16)$$

Вывод формулы (6.16) аналогичен выводу формулы (8.23) в четвертой главе. Он основан исключительно на кососимметричности величин d^{ij} и d_{pq} .

Дополним внутреннее векторное поле \mathbf{x} на поверхности еще одним векторным полем $\mathbf{y} = \Theta(\mathbf{x})$. Вектора полей \mathbf{x} и \mathbf{y} образуют пару перпендикулярных единичных векторов в касательной плоскости. Для их компонент выполнены соотношения:

$$\sum_{q=1}^2 x^q x_q = 1, \quad x_i = \sum_{k=1}^2 g_{ik} x^k, \quad y_i = \sum_{k=1}^2 g_{ik} y^k, \quad (6.17)$$

$$\sum_{q=1}^2 \nabla_k x^q x_q = 0, \quad y_q = \sum_{p=1}^2 \omega_{pq} x^p, \quad y^i = \sum_{j=1}^2 \omega^{ji} x_j. \quad (6.18)$$

Первое соотношение (6.17) выражает то, что $|\mathbf{x}| = 1$, остальные определяют ковариантные компоненты x_i и y_i . Первое соотношение (6.18) получается дифференцированием первого соотношения (6.17), второе и третье соотношения (6.18) выражают связь векторов $\mathbf{y} = \Theta(\mathbf{x})$.

Умножим соотношение (6.16) на $\nabla_k x^q x_j x^p$ и просуммируем по q, p и j . При этом учтем (6.17) и (6.18):

$$\nabla_k x^i = \left(\sum_{q=1}^2 y_q \nabla_k x^q \right) y^i = z_k y^i. \quad (6.19)$$

Использование (6.19), то есть подстановка $\nabla_i x^p = z_i y^p$ и $\nabla_j x^q = z_j y^q$ в (6.15), приводит к занулению вклада от второго слагаемого в этой формуле. Последующее применение формулы (6.16) к (6.15) для приращения угла $\Delta\varphi$ дает:

$$\Delta\varphi = - \iint_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 x^i (\nabla_i \nabla_j x^j - \nabla_j \nabla_i x^j) \sqrt{\det \mathbf{g}} du^1 du^2.$$

Применим к полю \mathbf{x} соотношение (8.5) из четвертой главы. Кроме того, учтем формулы (8.24) и (9.9) из четвертой главы:

$$\Delta\varphi = \iint_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (K g_{ij} x^i x^j) \sqrt{\det \mathbf{g}} du^1 du^2.$$

Вспомним, что поле \mathbf{x} с самого начала было выбрано единичным по длине. Поэтому после суммирования по i и j под знаком интеграла остается только гауссова кривизна:

$$\Delta\varphi = \iint_{\Omega} K \sqrt{\det \mathbf{g}} du^1 du^2. \quad (6.20)$$

Теперь рассмотрим фрагмент поверхности, на котором выделена односвязная область Ω , ограниченная кусочно дифференцируемым контуром γ (см. рисунок 6.1). Иными словами, выделим на поверхности многоугольник с криволинейными сторонами.

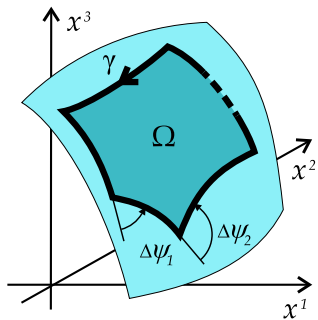


Рис. 6.1

Формула Грина (5.1) выдерживает замену дифференцируемого контура кусочно дифференцируемым, поэтому формула (6.20) остается в силе. Параллельный перенос вектора \mathbf{a} вдоль кусочно дифференцируемого контура выполняется поэтапно. Результат параллельного перенесения по предыдущей стороне криволинейного многоугольника γ является начальным данным для уравнения параллельного переноса на следующей стороне этого многоугольника. Поэтому функция $\varphi(t)$ не испытывает скачков в вершинах многоугольника γ .

Пусть на сторонах многоугольника γ введен натуральный параметр $t = s$, это определяет на них единичный касательный вектор $\boldsymbol{\tau}$. В вершинах многоугольника вектор $\boldsymbol{\tau}$ скачком поворачивается на углы $\Delta\psi_1, \Delta\psi_2, \dots, \Delta\psi_n$ (см. рисунок 6.1). Обозначим через $\psi(t)$ угол между вектором $\boldsymbol{\tau}(t)$ и параллельно переносимым вдоль γ вектором $\mathbf{a}(t)$. Этот угол будем отсчитывать от \mathbf{a} к $\boldsymbol{\tau}$, считая положительным направление против часовой стрелки. Функция $\psi(t)$ — это непрерывно дифференцируемая функция всюду, кроме точек, соответствующих вершинам многоугольника γ . В этих точках она имеет разрывы первого рода со скачками $\Delta\psi_1, \Delta\psi_2, \dots, \Delta\psi_n$.

Найдем производную функции $\psi(t)$ вне точек ее разрыва. Повторяя для $\boldsymbol{\tau}(t)$ рассуждения, связанные с разложениями

(6.8) и (6.9), для такой производной получаем:

$$\dot{\psi} = (\Theta(\boldsymbol{\tau}) \mid \nabla_t \boldsymbol{\tau}). \quad (6.21)$$

Вычислим компоненты вектора $\nabla_t \boldsymbol{\tau}$ во внутреннем представлении на поверхности (т. е. в базисе $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$):

$$\nabla_t \boldsymbol{\tau}^k = \ddot{u}^k + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Gamma_{ji}^k \dot{u}^i \dot{u}^j. \quad (6.22)$$

Помня, что $t = s$ — натуральный параметр на сторонах многоугольника γ , сравним формулу (6.22) с формулой (2.5) для геодезической кривизны и с формулой (2.4). Это дает:

$$\nabla_t \boldsymbol{\tau} = k \cdot \mathbf{n}_{\text{кр}} - k_{\text{норм}} \cdot \mathbf{n} = k_{\text{геод}} \cdot \mathbf{n}_{\text{вн}}. \quad (6.23)$$

Но $\mathbf{n}_{\text{вн}}$ — это единичный вектор в касательной плоскости, перпендикулярный вектору $\boldsymbol{\tau}$. Это же относится и к вектору $\Theta(\boldsymbol{\tau})$ в скалярном произведении (6.21). Значит, вектора $\mathbf{n}_{\text{вн}}$ и $\Theta(\boldsymbol{\tau})$ коллинеарны. Обозначим через $\varepsilon(t)$ знаковый множитель, равный их скалярному произведению:

$$\varepsilon = (\Theta(\boldsymbol{\tau}) \mid \mathbf{n}_{\text{вн}}) = \pm 1. \quad (6.24)$$

Теперь из формул (6.23) и (6.24) получаем:

$$\dot{\psi} = \varepsilon k_{\text{геод}}. \quad (6.25)$$

Найдем приращение функции $\psi(t)$ при обходе по всему контуру. Оно складывается из интеграла от (6.25) и суммы скачков в вершинах многоугольника:

$$\Delta\psi = \oint_{\gamma} \varepsilon k_{\text{геод}} ds + \sum_{i=1}^n \Delta\psi_i. \quad (6.26)$$

Угол $\Delta\varphi$ отсчитывается от \mathbf{x} к \mathbf{a} в направлении против часовой стрелки, а угол $\Delta\psi$ — от \mathbf{a} к $\boldsymbol{\tau}$ в том же направлении. Поэтому сумма $\Delta\varphi + \Delta\psi$ — это полное приращение угла между \mathbf{x} и $\boldsymbol{\tau}$. Важно заметить, что начальное и конечное значения вектора $\boldsymbol{\tau}$ после обхода контура совпадают. Это же относится и к вектору \mathbf{x} . Следовательно, сумма приращений $\Delta\varphi + \Delta\psi$ есть целое кратное угла $2\pi = 360^\circ$:

$$\Delta\varphi + \Delta\psi = 2\pi r. \quad (6.27)$$

Фактическое значение числа r в формуле (6.27) равно единице. Докажем это следующим рассуждением: произведем непрерывную деформацию поверхности на рисунке 6.1 в плоскость, затем контур γ непрерывно деформируем в окружность. При такой деформации левая часть равенства (6.27) должна меняться непрерывным образом, а правая часть этого равенства может изменяться только скачками. Поэтому при описанной непрерывной деформации поверхности и контура обе части равенства (6.27) не изменяются. На окружности, полный угол поворота единичного касательного вектора вычисляется явно, он равен 2π . Отсюда $r = 1$. Учтем это обстоятельство при подстановке (6.20) и (6.26) в формулу (6.27):

$$\iint_{\Omega} K \sqrt{\det \mathbf{g}} \, du^1 du^2 + \oint_{\gamma} \varepsilon k_{\text{геод}} \, ds + \sum_{i=1}^n \Delta\psi_i = 2\pi. \quad (6.28)$$

Формула (6.28) составляет содержание теоремы, которая известна как *теорема Гаусса-Бонне*.

ТЕОРЕМА 6.2. *Сумма внешних углов криволинейного многоугольника на поверхности есть 2π за вычетом двух интегралов: интеграла от гауссовой кривизны по внутренности многоугольника и интеграла от геодезической кривизны сторон (со знаковым множителем ε) по его периметру.*

Интересен случай, когда многоугольник образован геодезическими линиями на поверхности постоянной гауссовой кривизны. Второй интеграл в (6.28) при этом обращается в ноль, а первый легко вычисляется. Для суммы внутренних углов геодезического треугольника в такой ситуации имеем:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi + K S,$$

где $K S$ — произведение гауссовой кривизны поверхности на площадь треугольника.

Философское замечание. Измерив сумму углов достаточно большого треугольника, мы можем судить, является ли наш мир плоским, или же он наделен кривизной. И это не шутка. Идея искривленности пространства прочно утвердилась в современных научных представлениях о строении мира.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Шарипов Р. А. *Курс линейной алгебры и многомерной геометрии*, издание БашГосУниверситета, Уфа, 1996; см. также math.NO/0405323 в электронном архиве <http://arXiv.org> и r-sharipov/r4-b2.htm в GeoCities.
2. Кудрявцев Л. Д. *Курс математического анализа, Т. 1 и Т. 2*, издательство «Высшая школа», Москва, 1985.
3. Кострикин А. И. *Введение в алгебру*, издательство «Наука», Москва, 1977.
4. Беклемишев Д. В. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры*, издательство «Наука», Москва, 1985.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА ¹.

5. Шарипов Р. А. *Классическая электродинамика и теория относительности*, издание БашГосУниверситета, Уфа, 1997; см. также physics/0311011 в электронном архиве <http://arXiv.org> и r-sharipov/r4-b5.htm в GeoCities.
6. Шарипов Р. А. *Быстрое введение в тензорный анализ*, бесплатное интернет-издание math.NO/0403252 в электронном архиве <http://arXiv.org>, 2004; см. также r-sharipov/r4-b6.htm на сайте GeoCities.

¹ Ссылки [5] и [6] добавлены в 2004 году.

Учебное издание

Шарипов Руслан Абдулович
<http://www.geocities.com/r-sharipov>

КУРС ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие

ЛБ № 0081 от 1.04.1993

Подписано в печать 21.11.96. Формат 60×84/16. Бумага типографская №1. Печать офсетная. Компьютерный набор. Усл. печ. л. 11,7. Уч.-изд. л. 10,7. Тираж 100. Заказ 505.

Редакционно-издательский отдел Башкирского университета,
Ротапринт Башкирского университета, 450074, Уфа, ул. Фрунзе, 32.