СПЕЦИАЛЬНЫЙ КУРС ПО МАТЕМАТИКЕ

ШАРИПОВ Р. А.

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Часть 1

Уфа 1995

УДК 517.9
Шарипов Р. А. **Представления конечных групп. Часть 1.** учебное пособие для студентов 3-4 курсов университетов. Уфа. 1995. 75с. — ISBN 5-67855-004-0

Книга служит введением в интенсивно развивающийся раздел математики — теорию представлений групп. В ней изложены ставшие уже классическими результаты из этой теории, касающиеся конечных групп. Книга написана на базе спецкурса, прочитанного автором на математическом факультете в Башкирском Государственном Университете.

Подготовка книги к изданию выполнено методом компьютерной верстки на базе пакета $\mathcal{AMS}$-TEX от Американского Математического Общества. При этом были использованы кириллические шрифты семейства Lh, распространяемые Ассоциацией CyrTUG пользователей кириллического TeX'a.

ISBN 5-87855-004-0

ОГЛАВЛЕНИЕ.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Теория представлений групп — весьма обширный раздел математики. В данной книге изложен очень небольшой начальный фрагмент этой теории, относящийся к представлениям конечных групп. Объем книги примерно соответствует односеместровому курсу лекций.

При изложении материала в книге я стремился сделать его максимально подробным, полным и замкнутым. Чтение книги практически не требует обращения к другой литературе. От читателя требуется лишь знание линейной алгебры и теории групп в объеме стандартного университетского курса. Ссылки на сведения из линейной алгебры даны по моей книге, которая теперь выложена в Интернете и бесплатна для скачивания:

[1] Шарипов Р. А. «Курс линейной алгебры и многомерной геометрии», БашГосУниверситет, Уфа, 1996.

Основной материал книги подготовлен на базе следующих замечательных монографий:

[2] Наймарк М. А. «Теория представлений групп», изд-во Наука, Москва, 1976;

[3] Кириллов А. А. «Элементы теории представлений», изд-во Наука, Москва, 1978.

Вопросы, касающиеся алгебры характеров для представлений конечных групп, не вошли в данную книгу. Они включены в часть 2, которая будет издана отдельно.

Сентябрь, 1995 г. Р. А. Шарипов.

ГЛАВА I

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП

§ 1. Представления групп и их гомоморфизмы.

Известно, что матричные группы устроены в определенном смысле проще абстрактных групп. Закон умножения в них конкретен и при работе с ними можно использовать методы линейной алгебры и анализа. Теория представлений групп произрастает из стремления реализовать абстрактную группу в матричной форме.

Пусть V — некоторое линейное векторное пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Через $\mathrm{End}(V)$ обозначают множество линейных операторов, отображающих V в V. Множество невырожденных операторов из $\mathrm{End}(V)$ обозначается $\mathrm{Aut}(V)$. Нетрудно проверить, что $\mathrm{Aut}(V)$ есть группа. Групповой операцией в ней служит операция композиции (последовательного применения) двух операторов.

Определение 1.1. Представлением f группы G линейном векторном пространстве V называется групповой гомоморфизм $f\colon G \to \mathrm{Aut}(V)$.

Если f — представление группы G в V, то этот факт кратко записывают в виде (f, G, V). Пусть $g \in G$ — некоторый элемент группы, тогда $f(g)$ — невырожденный линейный оператор, действующий в пространстве V. Он называется оператором представления, соответствующим элементу $g \in G$. Результат его применения к вектору $\mathbf{x} \in V$ обозначим через $f(g)\mathbf{x}$. Запись с двумя скобками $f(g)(\mathbf{x})$ также будет использоваться, если она в данном контексте является более понятной. Например, $f(g)(\mathbf{x}+\mathbf{y})$. Операторы представления удовлетворяют следующим очевидным соотношениям:

(1) $f(g_1\,g_2) = f(g_1)\circ f(g_2)$;
(2) $f(1) = 1$;
(3) $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$.

Определение 1.2. Пусть Let (f, G, V) и (h, G, W) — два представления одной и той же группы G. Линейное отображение $A\colon\ V \to W$ называется *гомоморфизмом* представления (f, G, V) в представление (h, G, W), если выполнено следующее условие:

$$A\circ f(g) = h(g)\circ A \quad \text{для всех} \quad g \in G. \tag{1.1}$$

Отображение A в (1.1), осуществляющее гомоморфизм представлений, называют иногда *сплетающим отображением.*

Определение 1.3. Гомоморфизм A представлений, связывающий (f, G, V) и (h, G, W), называют *изоморфизмом*, если он биективен как линейное отображение $A\colon\ V \to W$.

Нетрудно проверить, что отношение изоморфности представлений является отношением эквивалентности. Изоморфные представления называют также эквивалентными, В теории представлений эквивалентные представления принято считать тождественными, ибо все сколь-нибудь существенные свойства таких представлений одинаковы.

Теорема 1.1. *Если (f, G, V) — представление группы G в V и $A:\ V \to W$ — биективное линейное отображение, то A индуцирует однозначно определенное представление группы G в W, которое эквивалентно исходному и для которого A является сплетающим оператором.*

Док-во. Доказательство теоремы тривиально. Определим операторы представления h в W следующим соотношением:

$$h(g) = A\circ f(g)\circ A^{-1}. \tag{1.2}$$

Нетрудно проверить, что формула (1.2) определяет представление группы G в W. Умножая (1.2) на A справа, получаем (1.1). Следовательно, A есть изоморфизм из f в h. Более того, любое представление G в W, для которого A есть изоморфизм, совпадает с h. Это получается домножением (1.1) справа на A^{-1}. $\square$

Из доказанной теоремы заключаем, что при заданном представлении f в V для построения эквивалентного ему представления в W достаточно иметь биекцию из V в W. Однако, на практике задача ставится несколько иначе. В пространствах V и W уже заданы представления f и h. Требуется установить, эквивалентны ли они, и, если да, то требуется найти сплетающий оператор. В такой постановке — это одна из основных задач теории представлений.

§ 2. Конечномерные представления.

Определение 2.1. Представление (f, G, V) называется конечномерным, если конечномерно пространство представления: $\dim V < \infty$.

Всюду далее в этой книге мы рассматриваем только конечномерные представления, хотя многое из того, что мы докажем для этого случая, можно затем перенести или обобщить на случай бесконечномерных представлений.

Заметим, что всякое конечномерное линейное векторное пространство V над полем $\mathbb{C}$ можно биективно отобразить на стандартное арифметическое координатное векторное пространство $\mathbb{C}^n$, где $n = \dim V$. Но $\operatorname{Aut}(\mathbb{C}^n) = \operatorname{GL}(n, \mathbb{C})$. Поэтому всякое конечномерное представление эквивалентно некоторому матричному представлению $f\colon\, G \to \operatorname{GL}(n, \mathbb{C})$. Это вытекает из теоремы 1.1. Несмотря на это, мы будем изучать конечномерные представления в абстрактных векторных пространствах, потому, что получаемые при этом утверждения имеют более элегантный инвариантный вид, а доказательства их порой даже проще, чем для аналогичных матричных формулировок.

§ 3. Инвариантные подпространства. Сужение и факторизация представлений.

Определение 3.1. Пусть (f, G, V) — представление группы G в пространстве V. Подпространство $W \subseteq V$ называется *инвариантным подпространством*, если для любого $g \in G$ и для любого $\mathbf{x} \in W$ результат действия $f(g)$ на $\mathbf{x}$ принадлежит W, то есть $f(g)\mathbf{x} \in W$.

В терминах инвариантных подпространств вводится понятие *неприводимости*, которое является центральным в теории представлений.

Определение 3.2. Представление (f, G, V) группы G называется *неприводимым*, если оно не имеет нетривиальных инвариантных подпространств, отличных от $W = \{0\}$ и от $W = V$. В противном случае представление (f, G, V) называется *приводимым.*

Пусть представление (f, G, V) неприводимо. Рассмотрим некоторый вектор $\mathbf{x} \neq 0$ из V и рассмотрим его орбиту:

$$\mathrm{Orb}_f(\mathbf{x}) = \{\, \mathbf{y} \in V : \ \mathbf{y} = f(g)\mathbf{x} \ \text{ для некоторого } \ g \in G \,\}.$$

Орбита $\mathrm{Orb}_f(\mathbf{x})$ — это некоторое подмножество в V инвариантное относительно действия операторов представления. Но оно, вообще говоря, не является линейным подпространством. Рассмотрим его линейную оболочку

$$W = \langle \mathrm{Orb}_f(\mathbf{x}) \rangle.$$

Подпространство W инвариантно, причем $W \neq \{0\}$, ибо оно содержит ненулевой вектор $\mathbf{x}$. Тогда в силу неприводимости f имеем $W = V$. Это позволяет сформулировать следующий критерий неприводимости представлений.

Теорема 3.1 (**критерий неприводимости**). *Представление (f, G, V) неприводимо тогда я только тогда, когда орбита произвольного ненулевого вектора $\mathbf{x} \in V$ порождает все пространство V.*

Необходимость этого условия была доказана выше. Докажем его достаточность. Пусть $W \subseteq V$ — инвариантное подпространство и пусть $W \neq \{0\}$. Выберем ненулевой вектор $\mathbf{x} \in W$. В силу инвариантности W имеем $\operatorname{Orb}_f(\mathbf{x}) \subseteq W$, откуда $\langle \operatorname{Orb}_f(\mathbf{x}) \rangle \subseteq W$. Но $\langle \operatorname{Orb}_f(\mathbf{x}) \rangle = V$, поэтому $W = V$. Критерий доказан.

Неприводимые представления подобны химическим элементам. Из них нельзя выделить более простых представлений данной группы, а всякое приводимое представление, в определенном смысле, расщепляется на неприводимые. Поэтому в теории представлений решаются две основные задачи:

(1) найти и описать все неприводимые представления данной группы;
(2) указать способ разложения произвольного представления на неприводимые компоненты.

Первая задача аналогична построению таблицы Менделеева в химии, а вторая — химическому анализу веществ.

Рассмотрим некоторое приводимое представление (f, G, V) группы G. Пусть W — инвариантное подпространство и пусть $\{0\} \subsetneq W \subsetneq V$. Обозначим через $\varphi(g)$ сужение оператора $f(g)$ на подпространство W:

$$\varphi(g) = f(g)\Big|_W . \tag{3.1}$$

Для операторов $\varphi(g)$ имеют место следующие соотношения:

$$\varphi(g)\,\varphi(g^{-1}) = (f(g)\,f(g^{-1}))\Big|_W = 1; \tag{3.2}$$

$$\varphi(g_1)\,\varphi(g_2) = (f(g_1)\,f(g_2))\Big|_W = \varphi(g_1\,g_2). \tag{3.3}$$

Из соотношения (3.2) видим, что оператор $\varphi(g)$ обратим и $\varphi(g)^{-1}=\varphi(g^{-1})$. Значит, $\varphi(g)\in\operatorname{Aut}(W)$. Соотношение (3.3), в свою очередь, показывает, что отображение $\varphi\colon\, G\to\operatorname{Aut}(W)$ есть гомоморфизм групп, определяющий представление.

Определение 3.3. Представление (φ,G,W) группы G, получающееся сужением операторов представления f на инвариантное подпространство W согласно (3.1), называется *сужением* представления f на W.

Наличие инвариантного подпространства W позволяет определить фактороператоры, действующие на факторпространстве V/W:

$$\psi(g)=f(g)\Big|_{V/W}. \tag{3.4}$$

Напомним, что действие оператора $\psi(g)$ на класс $\operatorname{Cl}_W(\mathbf{x})$ из V/W определяется так:

$$\psi(g)\operatorname{Cl}_W(\mathbf{x})=\operatorname{Cl}_W(f(g)\mathbf{x}). \tag{3.5}$$

Корректность определения (3.5) проверяется непосредственно (см. [1]). Фактороператоры (3.4) удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}\psi(g)\,\psi(g^{-1})\operatorname{Cl}_W(\mathbf{x})=\operatorname{Cl}_W(f(g)f(g^{-1})\mathbf{x})=\\=\operatorname{Cl}_W(f(g\,g^{-1})\mathbf{x})=\operatorname{Cl}_W(\mathbf{x}),\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}\psi(g_1)\,\psi(g_2)\operatorname{Cl}_W(\mathbf{x})=\operatorname{Cl}_W(f(g_1)f(g_2)\mathbf{x})=\\=\operatorname{Cl}_W(f(g_1\,g_2)\mathbf{x})=\psi(g_1\,g_2)\operatorname{Cl}_W(\mathbf{x}).\end{aligned} \tag{3.7}$$

Из (3.6) и (3.7) видим, что фактороператоры (3.4) удовлетворяют соотношениям, аналогичным (3.2) и (3.3). Они определяют представление $(\psi,G,V/W)$, которое принято называть *факторпредставлением.*

Представления (φ,G,W) и $(\psi,G,V/W)$ порождены представлением f. Каждое из них наследуют часть информации, содержащейся в представлении f. Для того, чтобы понять, какая же часть информации об f удерживается в φ и ψ, рассмотрим матрицы операторов $f(g)$ в некотором специальном базисе. Выберем базис $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_s$ в инвариантном подпространстве W. Затем достроим его до базиса $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_s, \mathbf{e}_{s+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$ в пространстве V. Механизм построения основывается на теореме о дополнении базиса (см. [1]). Матрица оператора $f(g)$ в таком базисе блочно-треугольна:

$$F(g) = \left\| \begin{array}{c|c} \varphi^i_j & u^i_j \\ \hline 0 & \psi^i_j \end{array} \right\|. \tag{3.8}$$

Ее верхний диагональный блок совпадает с матрицей оператора $\varphi(g)$ в базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_s$. Нижний диагональный блок совпадает с матрицей фактороператора $\psi(g)$ в базисе $\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_{n-s}$, где

$$\mathbf{E}_1 = \mathrm{Cl}_W(\mathbf{e}_{s+1}), \quad \mathbf{E}_2 = \mathrm{Cl}_W(\mathbf{e}_{s+2}), \quad \ldots, \quad \mathbf{E}_{n-s} = \mathrm{Cl}_W(\mathbf{e}_n).$$

Из (3.8) видим, что при переходе от представления f к его сужению φ и к факторпредставлению ψ объем потерянной информации определяется правым верхним недиагональным блоком u^i_j.

Несмотря на имеющуюся потерю информации, переход от f к паре представлений φ и ψ можно рассматривать как расщепление f на более простые составные части. Если представления φ и ψ также приводимы, то их можно дробить дальше. Однако, этот процесс конечен, ибо каждый раз мы имеем понижение размерности пространств представлений: $\dim(W) < \dim(V)$ и $\dim(V/W) < \dim(V)$. Процесс завершится после того, как мы в результате дроблений дойдем до неприводимых представлений.

§ 4. Вполне приводимые представления.

Как мы видели выше, процесс измельчения приводимого представления сопряжен с потерей части информации о нем. Однако, существует специальный класс представлений, для которого потери информации не происходит. Это класс *вполне приводимых* представлений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Представление (f, G, V) группы G называется *вполне приводимым* представлением, если любое его инвариантное подпространство W имеет инвариантное прямое дополнение U, т. е. V есть прямая сумма своих инвариантных подпространств: $V = W \oplus U$.

Отметим, что неприводимое представление является тривиальным примером вполне приводимого представления. Здесь $V = V \oplus \{0\}$.

Пусть представление (f, G, V) приводимо и вполне приводимо. Пусть W — инвариантное подпространство для f, а U — его инвариантное дополнение. Тогда имеет место следующие изоморфизмы сужений и факторов:

$$f\Big|_U \cong f\Big|_{V/W}, \qquad\qquad f\Big|_W \cong f\Big|_{V/U}. \tag{4.1}$$

Для доказательства (4.1) вновь рассмотрим базис $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_s$ в U и дополним его базисом $\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_{n-s}$ в U. Положим $\mathbf{e}_{s+1} = \mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{e}_n = \mathbf{h}_{n-s}$. В результате такого объединения базисов из W и U мы получим базис в V. Определим отображение $A\colon U \to V/W$, полагая

$$A\mathbf{x} = \mathrm{Cl}_W(\mathbf{x}) \quad \text{для всех} \quad \mathbf{x} \in U. \tag{4.2}$$

Из (4.2) легко найти его значения на базисных векторах

$$A(\mathbf{h}_1) = \mathbf{E}_1, \quad \ldots, \quad A(\mathbf{h}_{n-s}) = \mathbf{E}_{n-s}. \tag{4.3}$$

Отображение A устанавливает взаимно однозначное соответствие между базисами U и V/W, поэтому оно биективно. Проверим, что оно устанавливает изоморфизм представлений, т. е. проверим соотношение (1.1) для него:

$$A(f(g)\mathbf{h}_i) = \mathrm{Cl}_W(f(g)\mathbf{h}_i) = \psi(g)\,\mathrm{Cl}_W(\mathbf{h}_i) = \psi(g)A(\mathbf{h}_i).$$

Это соотношение доказывает первый изоморфизм в (4.1). Он устанавливается отображением A из (4.2).

Из инвариантности подпространства U имеем $f(g)\mathbf{h}_i \in U$. Это обстоятельство и соотношение (4.3) позволяют выписать вид матрицы оператора $f(g)$:

$$F(g) = \left\| \begin{array}{c|c} \varphi^i_j & 0 \\ \hline 0 & \psi^i_j \end{array} \right\|. \tag{4.4}$$

Матрица (4.4) блочно-диагональна, поэтому никакой потери информации при переходе от f к представлениям φ и ψ для вполне приводимых представлений не происходит. В силу (4.1) представление ψ можно считать сужением f на инвариантное дополнение U. Представления $\varphi, G, W)$ и (ψ, G, U) никак не зацеплены, они действуют на своих пространствах, которые не пересекаются и в сумме дают все пространство V. Эта ситуация описывается следующим определением.

Определение 4.2. Представление (f, G, V) группы G называется *внутренней прямой суммой* двух представлений (φ, G, W) и (ψ, G, W), если $V = W \oplus U$, причем подпространства W и U инвариантны, а сужения f на эти подпространства совпадают с φ и ψ.

Отметим, что расщепление f в прямую сумму $f = \varphi \oplus \psi$ может иметь место и в случае, когда f не является вполне приводимым. Однако, в этом случае такое расщепление является скорее исключением, чем правилом.

Имея пару представлений (φ, G, W) и (ψ, G, U) одной и той же группы G в двух совершенно различных пространствах, мы можем организовать их *внешнюю прямую сумму.* Рассмотрим внешнюю прямую сумму пространств $W \oplus U$. Напомним, что это множество упорядоченных пар $(\mathbf{w}, \mathbf{u})$, где $\mathbf{w} \in W$ и $\mathbf{u} \in U$, с покомпонентным сложением и покомпонентным умножением на числа:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{w}_1, \mathbf{u}_1) + (\mathbf{w}_2, \mathbf{u}_2) = (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2, \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2), \\ &\alpha\,(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = (\alpha\,\mathbf{w}, \alpha\,\mathbf{u}), \quad \text{где} \ \ \alpha \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Пространства W и U во внешней прямой сумме $W \oplus U$ считаются дизъюнктными, даже в том случае, когда они имеют непустое пересечение или просто совпадают. Зададим действие операторов $f(g)$ в $W \oplus U$ следующим образом:

$$f(g)(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = (\varphi(g)\mathbf{w}, \psi(g)\mathbf{u}). \tag{4.5}$$

Представление $(f, G, W \oplus U)$, сконструированное согласно соотношению (4.5), называется *внешней прямой суммой* представлений (φ, G, W) и (ψ, G, W). Оно обозначается $f = \varphi \oplus \psi$. Различия между внешней и внутренней прямой суммой достаточно формальны, а свойства их, в основном, совпадают.

Пусть пространство V представления (f, G, V) разложено в прямую сумму подпространств $V = W \oplus U$ (не обязательно инвариантных). С каждым таким разложением однозначно связаны два согласованных оператора проектирования P и Q. Проектор P — это проектор на подпространство W параллельно подпространству U, а Q — проектор на U параллельно W. Они удовлетворяют соотношениям

$$P^2 = P, \qquad Q^2 = Q, \qquad P + Q = 1, \tag{4.6}$$

причем $W = \operatorname{Im} P$ и $U = \operatorname{Im} Q$. Перечисленные свойства проекторов хорошо известны (см. [1]).

Лемма 4.1. *Подпространство W в разложении $V = W \oplus U$ инвариантно относительно операторов представления $f, G, V)$ тогда и только тогда, когда соответствующий проектор P удовлетворяет соотношению*

$$(P \circ f(g) - f(g) \circ P) \circ P = 0 \ \text{ для всех } \ g \in G. \tag{4.7}$$

Инвариантность обоих подпространств W и U в разложении $V = W \oplus U$ эквивалентна соотношению

$$(P \circ f(g) = f(g) \circ P) \ \text{ для всех } \ g \in G, \tag{4.8}$$

которое означает перестановочность проектора P со всеми операторами представления f.

Пусть $\mathbf{x}$ — некоторый произвольный вектор. Тогда $P\mathbf{x} \in W$. В случае инвариантности подпространства W вектор $\mathbf{y} = f(g)P\mathbf{x}$ также принадлежит W. Для вектора $\mathbf{y} \in W$ имеем $P\mathbf{y} = \mathbf{y}$. Отсюда

$$Pf(g)P\mathbf{x} = f(g)P\mathbf{x} = f(g)P^2\mathbf{x}. \tag{4.9}$$

Сравнив левую и правую часть полученного соотношения (4.9) и учитывая произвольность вектора $\mathbf{x}$, легко выводим соотношение (4.7) из условия леммы.

И наоборот, из соотношения (4.7) и свойства $P^2 = P$ из (4.6) легко выводится соотношение (4.9). Из него получаем, что вектор $f(g)P\mathbf{x}$ принадлежит W при любом выборе вектора $\mathbf{x}$. Положим $\mathbf{x} \in W$ и из $P\mathbf{x} = \mathbf{x}$ для такого вектора $\mathbf{x}$ найдем, что $f(g)\mathbf{x}$ принадлежит W. Инвариантность W установлена. Для доказательства второго утверждения леммы выпишем соотношение (4.7) для проектора Q:

$$(Q \circ f(g) - f(g) \circ Q) \circ Q = 0. \tag{4.10}$$

Из $Q = 1 - P$ выводим $Q \circ f(g) - f(g) \circ Q = f(g) \circ P - P \circ f(g)$. Поэтому соотношение (4.10) переписывается в виде

$$f(g) \circ P - P \circ f(g) + (P \circ f(g) - f(g) \circ P) \circ P = 0.$$

Учет (4.7) позволяет редуцировать его далее к соотношению (4.8), означающему перестановочность операторов P и $f(g)$. Лемма доказана.

Второе утверждение леммы 4.1 может быть обобщено на случай разложения пространства V в прямую сумму нескольких подпространств. Пусть $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_s$. Напомним (см. [1]), что этим разложением однозначно определяется согласованное семейство проекторов $P_1, \ldots, P_s$, для которых выполнены следующие соотношения согласованности:

$$\begin{aligned} &(P_i)^2 = P_i, && P_1 + \ldots + P_s = 1, \\ &P_i \circ P_j = 0 \ \text{ для } \ i \neq j, && P_i \circ P_j = P_j \circ P_i. \end{aligned}$$

При этом $W_i = \operatorname{Im} P_i$. Условие одновременной инвариантности всех подпространств W_i относительно операторов представления (f, G, V) в терминах соответствующих проекторов формулируется в виде следующей леммы, доказательство которой мы оставляем читателю.

Лемма 4.2. *Разложение $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_s$ есть разложение V в прямую сумму инвариантных подпространств представления (f, G, V) тогда и только тогда, когда все соответствующие этому разложению проекторы P_i перестановочны с операторами представления $f(g)$.*

Рассмотрим вполне приводимое конечномерное представление (f, G, V) расщепленное в прямую сумму сужений на инвариантные подпространства $f = \varphi \oplus \psi$. Пусть сужение φ представления f на W приводимо и пусть W_1 — соответствующее нетривиальное инвариантное подпространство: $\{0\} \subsetneq W_1 \subsetneq W$. Тогда подпространство W_1 инвариантно относительно f. Оно имеет инвариантное дополнение U_1. Рассмотрим разложения:

$$V = W \oplus U, \qquad\qquad V = W_1 \oplus U_1. \tag{4.11}$$

Заметим, что $W_1 \subset W$, следовательно,$W + U_1 = V$. Поэтому размерности входящих в (4.11) подпространств связаны соотношением

$$\dim(W) + \dim(U_1) - \dim(V) = \dim(W) - \dim(W_1) > 0.$$

Из него видим, что пересечение $W_2 = W \cap U_1$ отлично от нуля и размерность этого пересечения дается формулой

$$\dim(W \cap U_1) = \dim(W) - \dim(W_1). \tag{4.12}$$

Далее заметим, что $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, ибо $W_2 \subset U_1$. Поэтому в силу (4.12) пространство W раскладывается в прямую сумму

$$W = W_1 \oplus W_2,$$

каждое слагаемое в которой инвариантно относительно f, а значит и относительно φ. Мы доказали следующую важную теорему.

Теорема 4.1. *Сужение вполне приводимого конечномерного представления на инвариантное подпространство вполне приводимо.*

Немедленным следствием теоремы 4.1 является следующая важная теорема о разложении в прямую сумму.

Теорема 4.2. *Всякое конечномерное вполне приводимое представление f раскладывается в прямую сумму неприводимых представлений*

$$f = f_1 \oplus \ldots \oplus f_k, \qquad V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k, \tag{4.13}$$

где каждое f_i есть сужение f на некоторое инвариантное подпространство W_i.

Отметим, что разложение (4.13), вообще говоря, не однозначно. Рассмотрим два разложения f на неприводимые компоненты

$$\begin{aligned} f &= f_1 \oplus \ldots \oplus f_k, & V &= W_1 \oplus \ldots \oplus W_k,\\ f &= \tilde{f}_1 \oplus \ldots \oplus \tilde{f}_k, & V &= \tilde{W}_1 \oplus \ldots \oplus \tilde{W}_k. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Степень различия разложений (4.14) определяется следующей теоремой Жордана-Гельдера.

Теорема 4.3. *Число неприводимых компонент в разложениях (4.14) одинаково: $q = k$, и существует перестановка $\sigma \in S_k$, такая, что $(f_i, G, W_i) \cong (\tilde{f}_{\sigma i}, G, \tilde{W}_{\sigma i})$.*

Разложения (4.14) изоморфны с точностью до перестановки компонент. Однако, еще раз отметим, что изоморфизм не означает совпадения этих разложений.

Доказажем теорему Жордана-Гельдера индукцией по числу компонент k в первом разложении (4.14).

База индукции: $k = 1$, $V = W_1$. Представление $f = f_1$ неприводимо. Поэтому $q = 1 = k$ и $\tilde{W}_1 = V$, $\tilde{f}_1 = f = f_1$. База индукции доказана.

Индукционный переход. Пусть теорема верна для представлений, имеющих по крайней мере одно разложение (4.13) длины $k-1$. Для представления f введем обозначения

$$\begin{aligned} &\tilde{V}_i = \tilde{W}_1 \oplus \ldots \oplus \tilde{W}_i \quad \text{где} \quad i = 1, \ldots, q, \\ &U = W_1 \oplus \ldots \oplus W_{k-1} \quad \text{и} \quad \tilde{U}_i = \tilde{V}_i \cap U. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Все подпространства (4.15) инвариантны относительно f, причем $V = U \oplus W_k$ и имеются две цепочки включений

$$\begin{aligned} &\{0\} \subsetneq \tilde{V}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \tilde{V}_q = V, \\ &\{0\} \subsetneq \tilde{U}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \tilde{U}_q = U. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Пусть $h\colon V \to V/U$ — каноническая проекция на факторпространство. Обозначим через φ факторпредставление в V/U и рассмотрим цепочку инвариантных подпространств для него:

$$\{0\} \subseteq h(\tilde{V}_1) \subseteq \ldots \subseteq h(\tilde{V}_q) = h(V) = V/U \cong W_k.$$

Из изоморфизма $\varphi \cong f_k$ заключаем, что у неприводимо. Следовательно, выписанная выше цепочка имеет вид

$$\{0\} = h(\tilde{V}_1) = \ldots = h(\tilde{V}_s) \subsetneq h(\tilde{V}_{s+1}) = \ldots = h(\tilde{V}_q) = h(V).$$

Отсюда $\tilde{V}_i \subseteq U$ и $\tilde{U}_i = \tilde{V}_i$ при $i \leqslant s$. При $i \geqslant s+1$ используем изоморфизмы $\tilde{V}_i/\tilde{U}_i \cong h(\tilde{V}_i) = h(\tilde{V}_{i+1}) \cong \tilde{V}_{i+1}/\tilde{U}_{i+1}$. Но из $\tilde{V}_i \subsetneq \tilde{V}_i$, следует $\tilde{U}_i \subsetneq \tilde{U}_{i+1}$. Тогда из (4.16) имеем

$$\{0\} \subsetneq \tilde{U}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \tilde{U}_s = \tilde{U}_{s+1} \subsetneq \ldots \subsetneq \tilde{U}_q = U. \tag{4.17}$$

Равенство $\tilde{U}_s = \tilde{U}_{s+1}$ вытекает из неприводимости фактор-представления $\varphi_{s+1} \cong \varphi \cong f_k$ в факторпространстве $\tilde{V}_{s+1}/\tilde{V}_s$ и из включений $\tilde{V}_s = \tilde{U}_s = \tilde{U}_{s+1} \subsetneq \tilde{V}_{s+1}$. Исходя из полной приводимости f, построим инвариантные дополнения $\tilde{W}_{i+1}$ для $\tilde{U}_i$ в $\tilde{U}_{i+1}$, т. е. $\tilde{U}_{i+1} = \tilde{U}_i \oplus \tilde{W}_{i+1}$. Тогда $\tilde{V}_i + \tilde{U}_{i+1} = \tilde{V}_i \oplus \tilde{W}_{i+1}$ есть инвариантное подпространство в $\tilde{V}_{i+1}$, содержащее $\tilde{V}_i$ и не совпадающее с ним. Но факторпредставление в $\tilde{V}_{i+1}/\tilde{V}_i$ изоморфно $\tilde{f}_{i+1}$ и неприводимо. Поэтому $\tilde{V}_i \oplus \tilde{W}_{i+1} = \tilde{V}_{i+1}$ и сужение f на $\tilde{W}_{i+1}$ изоморфно $\tilde{f}_{i+1}$. Из (4.15) и (4.17) имеем

$$\begin{aligned} U &= W_1 \oplus \ldots \oplus W_s \oplus W_{s+1} \oplus \ldots \oplus W_{k-1}, \\ U &= \tilde{W}_1 \oplus \ldots \oplus \tilde{W}_s \oplus \tilde{W}_{s+2} \oplus \ldots \oplus \tilde{W}_q. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Остается применить предположение индукции к (4.18), что дает $k = q$ и определяет σi для $i = 1, \ldots, k-1$. Изоморфность f_k и факторпредставления φ_{s+1} в $\tilde{V}_{s+1}/\tilde{V}_s$ дает $\sigma k = s+1$, ибо $\varphi_{s+1} \cong \tilde{f}_{s+1}$ по построению подпространств (4.15). Теорема Жордана-Гельдера доказана.

В связи с доказанными теоремами 4.1 и 4.2 естественно ввести следующую терминологию.

Определение 4.3. Инвариантное подпространство $W \subseteq V$ назовем *неприводимым подпространством* для представления (f, G, V), если сужение f на W неприводимо.

Следующая теорема дает нам средство проверки полной приводимости представлений.

Теорема 4.4. *Конечномерное представление (f, G, V) является вполне приводимым тогда и только тогда, когда сово-*

купность всех неприводимых подпространств порождает все пространство V.

Док-во. Пусть $\{W_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — множество всех неприводимых подпространств в V. Число их может быть бесконечным и для конечномерного представления. Рассмотрим их сумму:

$$W = \sum_{\alpha\in A} W_\alpha = \Big\langle \bigcup_{\alpha\in A} W_\alpha \Big\rangle.$$

Теорема 4.4 утверждает, что условие $W = V$ необходимо и достаточно для полной приводимости f. Необходимость этого условия вытекает из теоремы 4.2. Докажем достаточность. Пусть $U = U_0$ — инвариантное подпространство для представления f и $\{0\} \neq U_0 \neq V$. Тогда для каждого неприводимого подпространства W_α имеется альтернатива:

$$W_\alpha \subseteq U_0 \ \text{ либо } \ W_\alpha \cap U_0 = \{0\}.$$

При этом найдется хотя бы одно W_{α_1}, для которого выполнено второе условие $W_{\alpha_1} \cap U_0 = \{0\}$. Иначе $W \subseteq U_0$, что противоречит условию $W = V$. Рассмотрим сумму

$$U_1 = U_0 + W_{\alpha_1} = U_0 \oplus W_{\alpha_1}$$

и, если $U_1 \neq V$, повторим рассуждения для U_1. В результате построим новое подпространство

$$U_2 = U_1 \oplus W_{\alpha_2} = U_0 \oplus W_{\alpha_1} \oplus W_{\alpha_2}.$$

Процесс добавления новых прямых слагаемых завершится на некотором шаге, ибо $\dim V < \infty$. В итоге мы получим

$$U_k = U_0 \oplus (W_{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus W_{\alpha_k}) = V.$$

Тогда подпространство $W = W_{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus W_{\alpha_k}$ и будет искомым инвариантным прямым дополнением для $U = U_0$. Теорема доказана. $\square$

§ 5. Лемма Шура и некоторые следствия из нее.

Теорема 4.2, доказанная в предыдущем параграфе, устанавливает разложимость вполне приводимого представления на неприводимые компоненты. В этом параграфе мы займемся изучением самих неприводимых представлений. Центральную роль в этом играет лемма Шура. Мы приведем ее в двух вариантах, причем второй будет усилением первого, но для более специального случая.

Лемма 5.1 (**Лемма Шура**). *Пусть (f, G, V) и (h, G, W) — два неприводимых представления группы G. Всякий гомоморфизм A, связывающий эти представления либо тождественно нулевой, либо является изоморфизмом.*

Доказательству леммы Шура предпошлем следующее утверждение, представляющее самостоятельный интерес.

Теорема 5.1. *Если отображение $A: V \to W$ есть гомоморфизм представлений из (f, G, V) в (h, G, W), то его ядро $Ker A$ инвариантно относительно f, а образ $\operatorname{Im} A$ инвариантен относительно h.*

Док-во. Пусть $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ — вектор из образа. Применим к нему оператор $f(g)$ и воспользуемся соотношением (1.1). Тогда мы получим

$$h(g)\mathbf{y} = h(g)A\mathbf{x} = Af(g)\mathbf{x}.$$

Отсюда видим, что $h(g)\mathbf{y} \in \operatorname{Im} A$, т. е. образ инвариантен. Аналогичным образом доказывается инвариантность ядра. Пусть $\mathbf{x} \in \operatorname{Ker} A$. Применим к $\mathbf{x}$ оператор $f(g)$, после чего подействуем отображением A. Учитывая (1.1), найдем

$$Af(g)\mathbf{x} = h(g)A\mathbf{x} = 0,$$

ибо $A\mathbf{x} = 0$. Значит, $f(g)\mathbf{x} \in \operatorname{Ker} A$. Инвариантность ядра $\operatorname{Ker} A$ доказана. □

Перейдем к доказательству леммы Шура 5.1. Случай $A = 0$ тривиален. Для исключения этого случая потребуем $A \neq 0$. Тогда $\operatorname{Im} A \neq \{0\}$. Согласно только что доказанной теореме 5.1 подпространство $\operatorname{Im} A$ инвариантно относительно представления h. Из неприводимости h получаем $\operatorname{Im} A = W$, что дает сюръективность отображения $A\colon V \to W$.

Ядро $\operatorname{Ker} A$ отображения $A : V \to W$ инвариантно относительно представления f. В силу неприводимости f, если $\operatorname{Ker} A \neq \{0\}$, то $\operatorname{Ker} A = V$. Последнее приводит к тривиальному случаю $A = 0$, который мы исключили. Значит, $\operatorname{Ker} A = \{0\}$. Отображение $A\colon V \to W$ инъективно и сюръективно одновременно. Следовательно, оно является изоморфизмом из (f, G, V) в (h, G, W). Лемма Шура доказана.

Рассмотрим теперь оператор $A\colon V \to V$, который сплетает неприводимое представление (f, G, V) с самим собой. Соотношение (1.1), записанное для этого случая, означает, что A коммутирует со всеми операторами представления $f(g)$. Вторая формулировка леммы Шура, относящаяся к особому случаю $f = g$, имеет следующий вид.

Лемма 5.2 (**Лемма Шура**). *Всякий оператор $A\colon V \to V$, перестановочный со всеми операторами неприводимого конечномерного представления (f, G, V) в линейном векторном пространстве V над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, является скалярным оператором $A = \lambda \cdot 1$, где $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Док-во. Пусть λ —собственное число оператора A и пусть $V_\lambda \neq \{0\}$ — соответствующее собственное подпространство. Если $\mathbf{x} \in V_\lambda$, то $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$. Кроме того, из условия коммутирования A с $f(g)$ получаем

$$Af(g)\mathbf{x} = f(g)A\mathbf{x} = \lambda f(g)\mathbf{x}.$$

Следовательно $f(g)\mathbf{x}$ также принадлежит V_λ и V_λ есть инвариантное подпространство. Из $V_\lambda \neq \{0\}$ и из неприводимости f имеем $V_\lambda = V$. Значит $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ для любого вектора $\mathbf{x} \in V$. Отсюда $A = \lambda \cdot 1$. $\square$

Отметим, что условие конечномерности представления f и условие комплексности векторного пространства V в лемме Шура 5.2 существенны. Без них невозможно утверждать существования собственных векторов и нетривиального собственного подпространства может просто не быть.

Применим лемму Шура для исследования тензорного произведения представлений одного специального вида. Прежде нам потребуется ввести само понятие тензорного произведения представлений.

Пусть (f, g, V) и (h, G, W) — два представления группы G. Определим операторы $\varphi(g)$, действующие на тензорном произведении $V \otimes W$, полагая

$$\varphi(g)(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = (f(g)\mathbf{v} \otimes h(g)\mathbf{w}) \text{ для всех } g \in G. \qquad (5.1)$$

Операторы $\varphi(g)$ задают новое представление группы G. Доказательство этого утверждения и проверку корректности задания операторов $\varphi(g)$ соотношением (5.1) мы оставляем читателю.

Определение 5.1. Представление $(\varphi, G, V \otimes W)$, которое задается операторами (5.1), называется *тензорным произведением* представлений f и h и обозначается $\varphi = f \otimes h$.

Отметим, что конструкция (5.1) легко обобщается на случай большего количества представлений.

Пусть представление f в конструкции (5.1) неприводимо. В качестве второго тензорного сомножителя выберем тривиальное представление i, задаваемое единичными операторами $i(g) = 1$ для всех $g \in G$. При $\dim W > 1$ представление $f \otimes i$ приводимо. Докажем это. Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ — базис в пространстве W. Обозначим через W_k одномерные подпространства, порожденные базисными векторами $\mathbf{e}_k$, и рассмотрим подпространства

$$V \otimes W_k, \quad k = 1, \ldots, m. \qquad (5.2)$$

Подпространства (5.2) инвариантны в $V \otimes W$ относительно действия операторов представления $f \otimes i$. Сужение $f \otimes i$ на $V \otimes W_k$ изоморфно представлению f. Значит подпространства (5.2) неприводимы. Эти неприводимы. Эти факты просты. Они проверяются непосредственно.

Далее заметим, что $V \otimes W = V \otimes W_1 \oplus \ldots \oplus V \otimes W_m$. Пространство $V \otimes W$ есть прямая сумма неприводимых подпространств $V \otimes W_k$. Следовательно, оно порождается этими подпространствами. Остается применить теорему 4.4. В итоге мы доказали следующее утверждение.

Теорема 5.2. *Тензорное произведение $f \otimes i$ конечномерного неприводимого представления f и тривиального конечномерного представления i является вполне приводимым.*

Доказанная выше теорема позволяет описать структуру всех инвариантных подпространств представления $f \otimes i$.

Теорема 5.3. *В предположениях теоремы 5.2 для представлений f и i в комплексных векторных пространствах V и W всякое инвариантное подпространство представления $f \otimes i$ имеет вид $U = V \otimes \tilde{W}$, где $\tilde{W}$ — некоторое подпространство в пространстве W.*

Док-во. Пусть U — некоторое инвариантное подпространство в $V \otimes W$. В силу теоремы 5.2 представление $f \otimes i$ вполне приводимо, поэтому U имеет инвариантное прямое дополнениеhas $\tilde{U}$. Наличие разложения $V \times W = U \oplus \tilde{U}$ позволяет рассмотреть оператор проектирования P на U параллельно подпространству $\tilde{U}$. Из инвариантности U и $\tilde{U}$ вытекает перестановочность оператора P со всеми операторами представления $\varphi = f \times i$. Читатель легко проверит этот факт. Дальнейший ход доказательства требует анализа условия перестановочности операторов P и $\varphi(g)$.

Пусть $A\colon V \times W \to V \times W$ — некоторый оператор, действующий в тензорном произведении $V \times W$. К случаю $A = P$ мы вернемся чуть позже. Результат применения A к вектору

$\mathbf{x} \otimes \mathbf{e}_j$ запишем в виде разложения

$$A(\mathbf{x} \otimes \mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^{m} A_j^k(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{e}_k. \tag{5.3}$$

Здесь, по прежнему, через $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ обозначен некоторый базис в W. Ввиду линейной независимости базисных векторов коэффициенты $A_j^k(\mathbf{x}) \in V$ в разложении (5.3) определены однозначно. Они меняются только при замене базиса, причем закон их изменения аналогичен правилу преобразования компонент тензора. Но для нас это обстоятельство не играет никакой роли, ибо мы ограничимся одним выбранным базисом $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$.

Рассмотрим зависимость вектора $A_j^k(\mathbf{x})$ от $\mathbf{x}$. Нетрудно проверить, что она линейна. Поэтому каждый из коэффициентов $A_j^k(\mathbf{x})$ в (5.3) определяет некоторый линейный оператор $A_j^k\colon V \to V$. Запишем условие перестановочности оператора A и $\varphi(g)$. Его достаточно проверить не векторах вида $\mathbf{x} \otimes \mathbf{e}_i$. На базе соотношения (5.3) находим

$$\begin{aligned} A \circ \varphi(g)(\mathbf{x} \otimes \mathbf{e}_i) &= \sum_{k=1}^{m} A_j^k \circ f(g)(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{e}_k, \\ \varphi(g) \circ A(\mathbf{x} \otimes \mathbf{e}_i) &= \sum_{k=1}^{m} f(g) \circ A_j^k(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{e}_k. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Напомним, что $\varphi = f \otimes i$, где i — тривиальное представление. Из (5.4) легко видеть, что условие перестановочности $A \circ \varphi(g) = \varphi(g) \circ A$ эквивалентно следующим соотношениям:

$$f(g) \circ A_j^k = A_j^k \circ f(g). \tag{5.5}$$

Таким образом, все операторы A_j^k перестановочны с операторами $f(g)$ неприводимого представления f.

Следующий ход состоит в том, чтобы вернуться к оператору проектирования $A = P$ (см. выше) и применить лемму Шура к операторам $A_j^k = P_j^k$. Проектор P коммутирует с $\varphi(g)$, поэтому для него выполнены соотношения (5.5). Применение леммы Шура 5.2 в этом случае дает

$$P_j^k = \lambda_j^k \times 1, \tag{5.6}$$

где λ_j^k — некоторые комплексные числа. Подставив (5.6) в разложение (5.3), для проектора P получаем

$$P(\mathbf{x} \otimes \mathbf{e}_j) = \sum_{k=1}^{m} A_j^k(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{e}_k = \mathbf{x} \otimes \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_j^k \, \mathbf{e}_k \right). \tag{5.7}$$

Внимательное рассмотрение правой части в (5.7) указывает на необходимость введения линейного оператора $Q \colon W \to W$, определенного своими значениями на базисных векторах:

$$Q(\mathbf{e}_j) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_j^k \, \mathbf{e}_k. \tag{5.8}$$

Формула (5.8) позволяет переписать соотношение (5.7) в виде

$$P(\mathbf{x} \otimes \mathbf{e}_j) = \mathbf{x} \otimes Q(\mathbf{e}_j). \tag{5.9}$$

Вспомним, что оператор P является оператором проектирования на одно подпространство параллельно другому тогда и только тогда, когда $P^2 = P$. (см. [1]). Из последнего соотношения на базе (5.9) получаем $Q^2 = Q$. Значит Q также является оператором проектирования. Положим $\tilde{W} = \operatorname{Im} Q \subseteq W$. Тогда для инвариантного подпространства $U \subseteq V \otimes W$ имеем

$$U = \operatorname{Im} P = V \otimes \operatorname{Im} Q = V \otimes \tilde{W}. \tag{5.10}$$

Формулой (5.10) мы описали инвариантные подпространства для $f \otimes i$ и завершили доказательство теоремы 5.3. $\square$

Теорема 5.3 может быть применена для доказательства следующего чрезвычайно полезного факта.

Теорема 5.4. *Пусть f — конечномерное неприводимое представление группы G в комплексном векторном пространстве V. Тогда множество операторов представления $f(g)$ порождает все пространство линейных операторов* $\mathrm{End}(V)$.

Док-во. Каждое представление f в V порождает ассоциированное с ним представление в пространстве линейных операторов $\mathrm{End}(V)$. Действительно, если $A \in \mathrm{End}(V)$, то определим действие $\psi(g)$ на A как композицию операторов:

$$\psi(g)(A) = f(g) \circ A \quad \text{для всех} \quad A \in \mathrm{End}(V). \tag{5.11}$$

Пусть F — линейная оболочка множества операторов представления $f(g)$, т. е.

$$F = \langle \{ f(g) \colon \, g \in G \} \rangle \, .$$

Нетрудно проверить, что подпространство $F \subseteq \mathrm{End}(V)$ инвариантно относительно представления ψ, заданного соотношением (5.11).

Для того, чтобы воспользоваться теоремой 5.3, вспомним, что имеется канонический изоморфизм $V \otimes V^* \cong \mathrm{End}(V)$, где V^* — пространство, сопряженное пространству V (пространство линейных функционалов на V). Он устанавливается отображением $\sigma \colon V \times V^* \to \mathrm{End}(V)$, которое задается так:

$$\sigma(\mathbf{x} \otimes \lambda)\mathbf{y} = \lambda(y)\mathbf{x} \quad \text{для всех} \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \quad \text{и} \quad \lambda \in V^*. \tag{5.12}$$

Доказательство корректности определения (5.12) и проверку того, что σ есть изоморфизм, мы оставляем читателю.

Нетрудно проверить, что канонический изоморфизм о устанавливает изоморфизм представления ψ из (5.11) и представления $f \times i$, где i — тривиальное представление группы G в V^*. Подпространство $F \subseteq \mathrm{End}(V)$ переходит в инвариантное подпространство $U_F \subseteq V \otimes V^*$. Неприводимость f позволяет применить теорему 5.3. Это дает $U_F = V \otimes \tilde{W}$, где $\tilde{W}$ — подпространство в V^*.

Если допустить, что $\tilde{W} \neq V^*$, то найдется вектор $\mathbf{x} \neq 0$ в V, такой, что $\lambda(\mathbf{x}) = 0$ для всех $\lambda \in V^*$. Применительно к пространству F при учете (5.11) и (5.12) это означает, что вектор $\mathbf{x} \neq 0$ лежит в ядре любого оператора $A \in F$. Но операторы $f(g) \in F$ невырождены, их ядра нулевые. Полученное противоречие показывает, что $\tilde{W} = V^*$ и $U_F = V \otimes V^*$. В силу изоморфизма σ отсюда выводим $F = \operatorname{End}(V)$. Теорема 5.4 доказана. $\square$

§ 6. Неприводимые представления прямого произведения групп.

Прямое произведение групп — это простейшая конструкция, позволяющая строить новые группы из уже имеющихся. Напомним, что группа $G_1 \times G_2$ — это множество пар (g_1, g_2) с покомпонентным умножением

$$(g_1, g_2) \cdot (\tilde{g}_1, \tilde{g}_2) = (g_1 \cdot \tilde{g}_1, g_2 \cdot \tilde{g}_2),$$
$$\text{где} \quad g_1, \tilde{g}_1 \in G_1 \quad \text{и} \quad g_2, \tilde{g}_2 \in G_2.$$

Конструкция прямого произведения групп хорошо согласуется с конструкцией тензорного произведения их представлений. Пусть (f_1, G_1, V_1) и (f_2, G_2, V_2) — представления групп G_1 и G_2 соответственно. Определим представление группы $G = G_1 \times G_2$ в пространстве $V_1 \otimes V_2$ соотношением

$$\begin{aligned} f(g)(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) &= f(g_1, g_2)(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = \\ &= (f_1(g_1)\mathbf{x}) \otimes (f_2(g_2)\mathbf{y}). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Проверка корректности определения (6.1) не составляет особого труда.

Определение 6.1. Представление $(f, G_1 \times G_2, V_1 \otimes V_2)$, заданное соотношением (6.1), называется *тензорным произведением* представленийis (f_1, G_1, V_1) и (f_2, G_2, V_2). Оно обозначается $f = f_1 \otimes f_2$.

Отметим, что рассмотренная ранее конструкция тензорного произведения 5.1 вкладывается в конструкцию 6.1. Рассмотрим диагональ в прямом произведении $G \times G$:

$$D = \{(g_1, g_2) \in G \times G\colon\ g_1 = g_2\}.$$

Нетрудно видеть, что $D \cong G$. Сужение представления f из (6.1) на на диагональ D совпадает с представлением φ из (5.1), где $f = f_1$ и $h = f_2$.

Теорема 6.1. *Тензорное произведение $(f, G_1 \times G_2, V_1 \otimes V_2)$ двух конечномерных представлений (f_1, G_1, V_1) и (f_2, G_2, V_2) в комплексных векторных пространствах V_1 и V_2 неприводимо тогда и только тогда, когда неприводимы оба тензорных сомножителя f_1 и f_2.*

Док-во. Начнем с доказательства необходимости сформулированного условия. Пусть $(f, G_1 \times G_2, V_1 \otimes V_2)$ неприводимо. Допустим, что условие неприводимости (f_1, G_1, V_1) и (f_2, G_2, V_2) нарушено. Пусть для определенности приводимо представление (f_2, G_2, V_2). Тогда у f_2 есть нетривиальное инвариантное подпространство $\{0\} \subsetneq W_2 \subsetneq V_2$. Но в этом случае $V_1 \otimes W_2$ есть нетривиальное инвариантное подпространство для $f = f_1 \otimes f_2$, что противоречит предположению о неприводимости f. Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть представления (f_1, G_1, V_1) и (f_2, G_2, V_2) неприводимы. Для доказательства неприводимости $(f, G_1 \times G_2, V_1 \otimes V_2)$ воспользуемся критерием неприводимости в форме теоремы 3.1. Выберем произвольный вектор $\mathbf{u} \neq 0$ из $V_1 \otimes V_2$ и рассмотрим его орбиту. Вектор $\mathbf{u}$ может быть написан в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{y}_1 + \ldots + \mathbf{x}_k \otimes \mathbf{y}_k. \tag{6.2}$$

Вектора $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k$ в (6.2) без ограничения общности можно считать линейно независимыми. Разложение (6.2) не единственно, однако, при фиксированных линейно независимых векторах $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k$ вектора $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ определены однозначно. Очевидно, что не теряя общности, их можно считать ненулевыми.

Воспользуемся теоремой 5.4. Пусть $A\colon V_2 \to V_2$ — линейный оператор, удовлетворяющий следующему условию:

$$A\mathbf{y}_1 = y_1, \;\; A\mathbf{y}_2 = 0, \;\; \ldots, \;\; A\mathbf{y}_k = 0. \tag{6.3}$$

Поскольку $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k$ в (6.3) линейно независимы, такой оператор A существует. Применив теорему 5.4 к представлению f_2, заключаем, что оператор A принадлежит линейной оболочке операторов этого представления, т. е.

$$A = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \, f_2(g_i), \;\; \text{где} \;\; g_i \in G_2.$$

Подействуем оператором $1 \otimes A$ на вектор (6.2). Это дает

$$(1 \otimes A)\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{x}_i \otimes A\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{y}_1. \tag{6.4}$$

С другой стороны, для этой же величины имеем

$$(1 \otimes A)\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \, (1 \otimes f(g_i))\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \, f(e_1, g_i)\mathbf{u}. \tag{6.5}$$

Здесь e_1 — единичный элемент группы G_1. Из сравнения (6.4) и (6.5) видим, что вектор $\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{y}_1$ принадлежит орбите вектора $\mathbf{u}$ из (6.3). Ввиду неприводимости представления f_1 орбита вектора $\mathbf{x}_1$ порождает V_1. По аналогичной причине орбита вектора $\mathbf{y}_1$ порождает V_2. Это значит любые два вектора $\mathbf{x} \in V_1$ и $\mathbf{y} \in V_2$ могут быть получены из $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{y}_1$ в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \sum_{i=1}^{r} \beta_i \, f(g_i)\mathbf{x}_1, \;\; \text{где} \;\; g_i \in G_1; \\ \mathbf{y} &= \sum_{j=1}^{s} \gamma_i \, f(g_j)\mathbf{y}_1, \;\; \text{где} \;\; g_i \in G_2. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Из (6.6) немедленно получаем

$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \beta_i \, \gamma_i \, f(g_i, g_j)(\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{y}_1),$$

где $(g_i, g_j) \in G_1 \times G_2$. Значит произвольный вектор вида $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$ принадлежит орбите вектора $\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{y}_1$ из (6.4), а тот, в свою очередь, принадлежит орбите вектора $\mathbf{u}$ из (6.2). Но вектора вида $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$ порождают все пространство $V_1 \otimes V_2$. В итоге мы доказали, что орбита произвольного ненулевого вектора и порождает все пространство представления $f = f_1 \otimes f_2$. Значит, согласно теореме 3.1 это представление неприводимо. Теорема 6.1 полностью доказана. $\square$

Теорема 6.2. *Всякое конечномерное неприводимое представление φ прямого произведения групп G_1 и G_2 в комплексном пространстве U изоморфно тензорному произведению некоторых двух неприводимых представлений (f_1, G_1, V_1) и (f_2, G_2, V_2) групп G_1 и G_2 соответственно.*

Пусть $\varphi(g_1, g_2)$ — операторы представления φ группы $G_1 \times G_2$ в пространстве U. Тогда операторы вида $\varphi(g_1, e_2)$, где e_2 — единица в группе G_2, задают представление группы G_1. Оно, вообще говоря, приводимо. Пусть $V_1 \subseteq U$ — некоторое неприводимое подпространство в U. Введем обозначение

$$\varphi_1(g_1) = \varphi(g_1, e_2), \text{ где } \ g_1 \in G_1. \tag{6.7}$$

Сужения операторов (6.7) на V_1 задают некоторое неприводимое представление группы G_1. Обозначим их так:

$$f_1(g_1) = \varphi_1(g_1)\Big|_{V_1} = \varphi_1(g_1, e_2)\Big|_{V_1}, \text{ где } \ g_1 \in G_1.$$

По аналогии с (6.7) определим следующие операторы, задающие представление группы G_2 в пространстве U:

$$\varphi_2(g_2) = \varphi(e_1, g_2), \text{ где } \ g_2 \in G_2. \tag{6.8}$$

Обозначим через F_2 линейную оболочку множества операторов (6.8). Это линейное подпространство в пространстве операторов $\operatorname{End}(U)$:

$$F_2 = \langle \{\varphi_2(g_2)\colon\ g_2 \in G_2\} \rangle .$$

Все операторы из F_2 перестановочны со всеми операторами (6.7), ибо операторы $\varphi_2(g_2)$ порождающие F_2 перестановочны с $\varphi_1(g_1)$. Для всякого оператора $A \in F_2$ обозначим через $\tilde{A}$ сужение A на V_1. Операторы $\tilde{A}$ следует рассматривать как элементы пространства $\tilde{F}_2 \subseteq \operatorname{Hom}(V_1, U)$:

$$\tilde{A}\colon\ V_1 \to U.$$

Операторы $A \in F_2$ и $\tilde{A} \in \tilde{F}_2$ заслуживают специального рассмотрения. Определим подпространство $V_A = AV_1 = \tilde{A}V_1 = \operatorname{Im}\tilde{A} \subseteq U$. В силу перестановочности A с операторами (6.7) подпространство V_A инвариантно относительно операторов $\varphi_1(g_1)$. Поэтому на V_A также определено представление группы G_1:

$$f_A(g_1) = \varphi_1(g_1)\Big|_{V_A} = \varphi(g_1, e_2)\Big|_{V_A}, \quad \text{где} \quad g_1 \in G_1.$$

Отображение $\tilde{A}\colon\ V_1 \to V_A$ сплетает представления f_1 и f_A в V_1 и в V_A. Действительно, мы имеем

$$\tilde{A} \circ f_1(g_1) = A \circ \varphi(g_1)\Big|_{V_1} = \varphi(g_1) \circ A\Big|_{V_1} = f_A(g_1) \circ \tilde{A}.$$

Отображение $\tilde{A}\colon\ V_1 \to V_A$ сюръективно по своему определению. Его ядро $\operatorname{Ker}\tilde{A} \subseteq V_1$ инвариантно относительно операторов представления f_1. В силу неприводимости f_1 возникает альтернатива:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Ker}\tilde{A} = V_1 \ \Rightarrow\ \tilde{A} = 0 \ \text{ and } \ V_A = \{0\};\\ &\operatorname{Ker}\tilde{A} = \{0\} \ \Rightarrow\ \tilde{A} \ \text{— изоморфизм и} \ f_1 \cong f_A. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Рассмотрим второй вариант в (6.9). Пусть $W = V_1 \cap V_A$. Операторы $f_1(g_1)$ и $f_A(g_1)$ после сужения на W совпадают. Поэтому $W \subseteq V_1$ инвариантно относительно f_1. Используя неприводимость f_1, мы получаем еще одну альтернативу

$$\begin{aligned} W = V_1 \ &\Rightarrow\ V_A = V_1 \ \text{ и } \ f_A = f_1; \\ W = \{0\} \ &\Rightarrow\ V_A \cap V_1 = \{0\} \ \text{ и } \ f_A \cong f_1. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Объединим (6.9) и (6.10). Изобразим это в форме следующей альтернативы:

$$\begin{aligned} &V_A = \{0\}, \quad f_A = 0, \quad \tilde{A} = 0; \\ &V_A = V_1, \quad f_A = f_1, \quad \tilde{A} = \lambda \cdot 1; \\ &V_A \cap V_1 = \{0\}, \quad f_A \cong f_1, \quad \tilde{A} \ \text{— изоморфизм.} \end{aligned} \tag{6.11}$$

Условие $\tilde{A} = \lambda \cdot 1$ во втором варианте альтернативы (6.11) возникает из леммы Шура 5.2.

Пусть $\mathbf{u}$ — некоторый ненулевой вектор из V_1. Фиксируем его и рассмотрим пространство $V_2 \subseteq U$ полученное из $\mathbf{u}$ при действии операторов $A \in F_2$:

$$V_2 = \{\mathbf{v} \in U\colon\ \mathbf{v} = A\mathbf{u} \ \text{ для некоторого } \ A \in F_2\}. \tag{6.12}$$

Подпространство V_2 инвариантно относительно действия операторов (6.8). Это определяет представление (f_2, G_2, V_2) группы G_2, заданное операторами

$$f_2(g_2) = \varphi_2(g_2)\Big|_{V_2} = \varphi_1(e_1, g_2)\Big|_{V_2}. \tag{6.13}$$

В силу определения (6.12) для любого вектора $\mathbf{y} \in V_2$ найдется отображение $\tilde{A} \in \tilde{F}_2$, такое, что $\mathbf{y} = \tilde{A}\mathbf{u}$. Докажем, что отображение $\tilde{A}$ определяется вектором $\mathbf{y} \in V_2$ однозначно. В соответствии с альтернативой (6.11) рассмотрим три возможных случая.

Если $\mathbf{y} = 0$, то $\operatorname{Ker}\tilde{A} \neq 0$. В силу альтернативы (6.9) единственным отображением $\tilde{A} \in F_2$, удовлетворяющим условию $\mathbf{y} = \tilde{A}\mathbf{u}$, будет нулевое отображение $\tilde{A} = 0$. Это первый случай в альтернативе (6.11).

Если $\mathbf{y} \neq 0$ и $\mathbf{y} \in V_1$, то из $\mathbf{y} = \tilde{A}\mathbf{u}$ вытекает $\mathbf{y} \in V_1 \cap V_A$. Следовательно, пересечение $V_1 \cap V_A$ ненулевое и работает второй вариант альтернативы (6.11). Значит, $\tilde{A} = \lambda \cdot 1$ и $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{u}$. Число λ, связывающее два ненулевых коллинеарных вектора, определяется этими векторами однозначно. Поэтому отображение $\tilde{A} = \lambda \cdot 1$ также однозначно определено.

Наконец, третий случай $\mathbf{y} \notin V_1$. Значит, $V_1 \cap V_A = \{0\}$ и отображение $\tilde{A}\colon V_1 \to V_A$ биективно. Предположим, что условие $\mathbf{y} = \tilde{A}\mathbf{u}$ фиксирует отображение $\tilde{A} \in F_2$ неоднозначно. Рассмотрим два таких отображения $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$. Связанные с ними подпространства V_{A_1} и V_{A_2} совпадают. Действительно, $\mathbf{y} \in V_{A_1} \cap V_{A_2} \neq \{0\}$. Значит $V_{A_1} \cap V_{A_2}$ — нетривиальное инвариантное подпространство для неприводимых представлений $f_{A_1} \cong f_1$ и $f_{A_2} \cong f_1$. Отсюда $V_{A_1} \cap V_{A_2} = V_{A_1} = V_{A_2}$. Используя совпадение $V_{A_1} = V_{A_2}$ и биективность отображений

$$\tilde{A}_1\colon V_1 \to V_{A_1}, \qquad\qquad \tilde{A}_2\colon V_1 \to V_{A_2},$$

обратим одно из них и рассмотрим оператор $\tilde{A}_3 = \tilde{A}_2^{-1} \circ \tilde{A}_1$. Этот оператор невырожден, он действует в пространстве V_1 и осуществляет автоморфизм представления f_1, т. е. он сплетает операторы этого представления:

$$\tilde{A}_3 \circ f_1(g_1) = f_1(g_1) \circ \tilde{A}_3.$$

Используя неприводимость f_1 и применяя лемму Шура 5.2, получим $\tilde{A}_3 = \lambda \cdot 1$. Это дает $\tilde{A}_1 = \lambda\tilde{A}_2$. Теперь из условий $\mathbf{y} = \tilde{A}_1\mathbf{u}$ и $\mathbf{y} = \tilde{A}_2\mathbf{u}$ получаем $\lambda = 1$. Значит, $\tilde{A}_2 = \tilde{A}_1$. Единственность отображения $\tilde{A}$ установлена.

Для отображения $\tilde{A} \in \tilde{F}_2$, которое мы только что определили из условия $\mathbf{y} = \tilde{A}\mathbf{u}$, введем обозначение $\tilde{A} = \tilde{A}(\mathbf{y})$. Зависимость $\tilde{A}$ от $\mathbf{y}$ можно трактовать как отображение

$\tilde{A}\colon V_2 \to \operatorname{Hom}(V_1, U)$. Нетрудно проверить, что такое отображение линейно. Оно удовлетворяет соотношению

$$\tilde{A}(f_2(g_2)\mathbf{y}) = \varphi_2(g_2) \circ \tilde{A}(\mathbf{y}), \tag{6.14}$$

где $f_2(g_2)$ определен согласно (6.13). Докажем соотношение (6.14). Вспомним, что $\tilde{A}(\mathbf{y})$ — это сужение на V_1 некоторого оператора $A_1 \in F_2$ определяемое условием

$$A_1\mathbf{u} = \tilde{A}(\mathbf{y})\mathbf{u} = \mathbf{y}.$$

Но оператор $A_2 = \varphi_2 \circ A_1$ также принадлежит F_2 (см. определение F_2 выше). Оператор A_2 удовлетворяет условию

$$A_2\mathbf{u} = \varphi_2(g_2)A_1\mathbf{u} = \varphi_2(g_2)\mathbf{y} = f_2(g_2)\mathbf{y}.$$

Поэтому сужение A_2 на V_1 совпадает с $\tilde{A}(f_2(g_2)\mathbf{y})$. Равенство (6.14) доказано.

Следующий шаг в доказательстве теоремы 6.2 состоит в применении отображения $\tilde{A}(\mathbf{y})$ к построению изоморфизма представлений $f = f_1 \otimes f_2$ и φ. Но прежде, чем делать это, заметим, что мы не располагаем информацией о неприводимости представления f_2, заданного формулой (6.13). Однако, мы можем перейти к рассмотрению неприводимого представления f_2 в силу следующего рассуждения. Пусть $\tilde{V}_2 \subseteq V_2$ — некоторое неприводимое инвариантное подпространство для представления (6.13). Если $\mathbf{u} \in \tilde{V}_2$, то $\tilde{V}_2 = V_2$. Это вытекает из теоремы 3.1. В случае же $\mathbf{u} \notin \tilde{V}_2$ выберем ненулевой вектор $\tilde{\mathbf{u}}$ и подберем отображение $\tilde{A} \in \tilde{F}_2$, такое, что $\tilde{A}\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}$. Существование и единственность такого отображения $\tilde{A} = \tilde{A}(\tilde{\mathbf{u}})$ мы уже установили. В нашем случае $\tilde{A} \neq 0$. Поэтому из альтернативы (6.11) мы видим, что отображение $\tilde{A}$ биективно и устанавливает изоморфизм представлений $f_1 \cong f_A$. В силу этого изоморфизма представление f_1 можно заменить на f_A, которое также неприводимо. Последнее предпочтительно тем, что соответствующее пространство V_A содержит вектор $\tilde{\mathbf{u}}$. Орбита же вектора $\tilde{\mathbf{u}}$ порождает неприводимое подпространство $\tilde{V}_2$ в пространстве действия представления φ_2. Поэтому мы должны вернуться в начало наших построений и считать, что в качестве V_1 изначально было выбрано то неприводимое подпространство представления φ_1 , которое содержит вектор $\mathbf{u}$, порождающий неприводимое подпространство представления φ_2. Возможность такого выбора была только что продемонстрирована.

Итак, при удачном выборе пространства V_1 представления (f_1, G_1, V_1) и (f_2, G_2, V_2) неприводимы. Рассмотрим их тензорное произведение $f = f_1 \otimes f_2$ и построим отображение $\sigma\colon V_1 \otimes V_2 \to U$ по следующей формуле:

$$\sigma(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = \tilde{A}(\mathbf{y})\mathbf{x}, \text{ где } \mathbf{x} \in V_1, \ \mathbf{y} \in V_2. \tag{6.15}$$

Покажем, что отображение (6.15) является сплетающим для представлений $(f_1 \otimes f_2, G_1 \times G_2, V_1 \otimes V_2)$ и $(\varphi, G_1 \times G_2, U)$. Действительно, мы имеем

$$\begin{gathered}
\varphi(g_1, g_2)\,\sigma(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = \varphi_1(g_1)\varphi_2(g_2)\tilde{A}(\mathbf{y})\mathbf{x} = \\
= \varphi_2(g_2)\tilde{A}(\mathbf{y})\,\varphi_1(g_1)\mathbf{x}, \\
\sigma f(g_1, g_2)(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = \sigma((f_1(g_1)\mathbf{x}) \otimes (f_2(g_2)\mathbf{y})) = \\
= \tilde{A}(f_2(g_2)\mathbf{y})f_1(g_1)\mathbf{x}.
\end{gathered} \tag{6.16}$$

Совпадение значений двух последних выражений в (6.16) вытекает из (6.14). Таким образом, из (6.16) получаем

$$\varphi(g_1, g_2) \circ \sigma = \sigma \circ f(g_1, g_2).$$

Это в точности соотношение сплетения (1.1) для представлений f и φ. Отображение σ осуществляет гомоморфизм этих представлений. Заметим, что

$$\sigma(\mathbf{u} \times \mathbf{u}) = \tilde{A}(\mathbf{u})\mathbf{u} = \mathbf{u} \neq 0.$$

Поэтому $\sigma \neq 0$. Остается использовать неприводимость представлений $f = f_1 \otimes f_2$ and φ. Из леммы Шура 5.1 тогда заключаем, что σ — изоморфизм. Неприводимость f вытекает из неприводимости f_1 и f_2 в силу предыдущей теоремы. Этим доказательство теоремы 6.2 завершено.

§ 7. Унитарные представления.

Определение 7.1. Конечномерное комплексное векторное пространство V, оснащенное симметричной полуторалинейной положительно определенной формой, называется *эрмитовским пространством.*

Напомним, что *полуторалинейная форма* на V — это комплекснозначная числовая функция $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})$ с двумя векторными аргументами $\mathbf{x},\mathbf{y} \in V$, удовлетворяющая условиям

(1) $\quad \varphi(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2,\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}_1,\mathbf{y}) + \varphi(\mathbf{x}_2,\mathbf{y});$
(2) $\quad \varphi(\alpha\,\mathbf{x},\mathbf{y}) = \overline{\alpha}\,\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y});$
(3) $\quad \varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2)\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}_1) + \varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}_2);$
(4) $\quad \varphi(\mathbf{x},\alpha\,\mathbf{y}) = \alpha\,\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}).$

Черта над α во втором условии означает комплексное сопряжение. Условия (1)–(4) обычно дополняют условиями симметричности и положительной определенности:

(5) $\quad \varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \overline{\varphi(\mathbf{y},\mathbf{x})};$
(6) $\quad \varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) > 0$ для всех $\mathbf{x} \neq 0.$

Условие (5) влечет вещественность $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$. Условие (6) усиливает условие (5) требованием положительности $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$. Форма $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})$ называется невырожденной, если из $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$ для всех $\mathbf{y} \in V$ вытекает $\mathbf{x} = 0$. Отметим, что положительная определенность влечет невырожденность.

Симметричная положительно определенная форма, фигурирующая в определении эрмитовского пространства, называется *эрмитовским скалярным произведением.* Для нее фиксируем следующее обозначение:

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \langle\mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle.$$

Пусть $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ — базис в пространстве V. Величины $g_{ij} = \langle \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j \rangle$ составляют матрицу Грама базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$. Они удовлетворяют соотношению $g_{ij} = \overline{g_{ji}}$, которое вытекает из симметричности скалярного произведения.

Базис, матрица Грама которого единична, называется *ортонормированным базисом.* Существование таких базисов вытекает из диагонализуемости любой симметричной полуторалинейной формы.

Определение 7.2. Линейный оператор $A\colon V \to V$ в эрмитовском пространстве V называется *эрмитовским*, если $\langle \mathbf{x} | A\mathbf{y} \rangle = \langle A\mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle$ для всех векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в V.

Имеется стандартная теория эрмитовских операторов в конечномерных пространствах. Приведем без доказательства основные факты этой теории в качестве напоминания.

Теорема 7.1. *Эрмитовские операторы находятся во взаимно однозначном соответствии с симметрическими полуторалинейными формами в эрмитовском пространстве:*

$$\varphi_A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x} | A\mathbf{y} \rangle, \tag{7.1}$$

причем невырожденным операторам соответствуют невырожденные формы.

Определение 7.3. Эрмитовский оператор A называется *положительно определенным*, если соответствующая ему форма φ_A положительно определена.

Теорема 7.2. *Всякий эрмитовский оператор A диагонализуем, причем его собственные числа вещественны, а собственные вектора, отвечающие любым двум несовпадающим собственным числам $\lambda_i \neq \lambda_j$ всегда ортогональны.*

Теорема 7.3. *Оператор A является эрмитовским тогда и только тогда, когда его собственные числа вещественны и он диагонализуется в некотором ортонормированном базисе.*

Доказательство теорем 7.1, 7.2 и 7.3 можно найти во многих стандартных учебниках по линейной алгебре. Нам потребуется еще одна теорема, которая также встречается в литературе, но менее стандартна.

Теорема 7.4. *Пусть оператор A диагонализуем и его собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ вещественны и неотрицательны. Тогда существует однозначно определенный диагонализуемый оператор B с вещественными собственными числами $\mu_i \geqslant 0$, такой, что $B^2 = A$ и оператор B перестановочен с любым оператором C, с которым перестановочен оператор A. Если оператор A эрмитовский, то соответствующий ему оператор B также эрмитовский.*

Оператор B из теоремы 7.4 естественно называть *корнем квадратным* из оператора A. Докажем его существование. Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — базис из собственных векторов оператора A, отвечающих собственным числам $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Определим оператор B его действием на базисные вектора:

$$B\mathbf{e}_i = \sqrt{\lambda_i}\,\mathbf{e}_i, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{7.2}$$

При таком определении оператор B диагоналей в том же базисе, что и A, причем его собственные числа $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ вещественны и неотрицательны.

Рассмотрим вопрос о перестановочности операторов B и C. Перестановочность операторов A и C означает

$$(\lambda_i - \lambda_j)\,C^i_j = 0, \tag{7.3}$$

где C^i_j — матрица оператора C в базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Условие (7.3) эквивалентно занулению $C^i_j = 0$ для всех $\lambda_i \neq \lambda_j$. Но $\lambda_i \neq \lambda_j$ влечет $\mu_i \neq \mu_j$. Поэтому оператор B, заданный соотношениями (7.2) перестановочен с любым оператором C, который перестановочен с A. Если оператор A эрмитовский, то базис $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ можно выбрать ортонормированным. Тогда из теоремы 7.3 получаем, что оператор B также эрмитовский.

Остается доказать единственность оператора B, определяемого перечисленными в теореме 7.4 условиями. Условие $C^i_j = 0$ для всех $\lambda_i \neq \lambda_j$, вытекающее из $A \circ C = C \circ A$, можно сформулировать инвариантным образом.

Утверждение 7.1. *Оператор C перестановочен с диагонализуемым оператором A тогда и только тогда, когда все собственные подпространства оператора A инвариантны относительно оператора C.*

Положим $C = A$ в условиях теоремы 7.4, тогда $B \circ A = A \circ B$. Применим сформулированное утверждение 7.1 к оператору B. Из перестановочности $B \circ A = A \circ B$ в этом случае получим, что все собственные подпространства оператора A инвариантны относительно B. Требование диагонализуемости B теперь означает, что A и B могут быть одновременно диагонализованы в одном и том же базисе. Далее условия $B^2 = A$ и $\mu_i \geqslant 0$ однозначно определяют выбор оператора B в соответствии с соотношением (7.2).

Определение 7.4. Линейное отображение $T: V \to W$ одного эрмитовского пространства в другое называется *изометрией*, если $\langle T\mathbf{x}|T\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle$ для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, т. е. если оно сохраняет скалярное произведение.

В силу невырожденности полуторалинейных форм, определяющих скалярное произведение в V и W всякая изометрия $T\colon V \to W$ инъективна.

Определение 7.5. Линейный оператор $T \in \mathrm{End}(V)$ называется *унитарным оператором*, если он осуществляет изометрию $T\colon V \to V$.

Унитарные операторы невырождены. Их детерминанты и их собственные числа удовлетворяют соотношениям:

$$|\det T| = 1, \qquad\qquad |\lambda| = 1.$$

Унитарные операторы в эрмитовском пространстве V образуют группу $\mathrm{U}(V)$, которая является подгруппой в $\mathrm{Aut}(V)$. Унитарные операторы с единичным детерминантом, в свою очередь, образуют группу $\mathrm{SU}(V) \subsetneq \mathrm{U}(V)$.

Определение 7.6. Представление (f, G, V) группы G в эрмитовском пространстве V называется *унитарным*, если все операторы представления $f(g)$ унитарны.

Унитарные представления образуют важный подкласс в классе общих представлений групп. Это, в первую очередь, связано с тем, что именно такие представления возникают в приложениях теории представлений к квантовой механике. Не последнюю роль играет также следующий полезный факт.

Теорема 7.5. *Всякое унитарное представление* (f, G, V) *вполне приводимо.*

Действительно, пусть $U \subseteq V$ инвариантное подпространство для операторов представления f. Но в случае унитарного оператора $f(g)$ ортогональное дополнение к инвариантному подпространству

$$U_\perp = \{\mathbf{x} \in V\colon\ \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = 0 \ \text{ для всех } \ \mathbf{y} \in U\}$$

также является инвариантным. Пространства U b $U_\perp$ имеют тривиальное пересечение и их прямая сумма совпадает с V. Поэтому $U_\perp$ есть необходимое инвариантное прямое дополнение к U. Полная приводимость f установлена.

Следствие 7.1. *Всякое представление f, эквивалентное некоторому унитарному представлению h, вполне приводимо.*

Пусть $A\colon V \to W$ — сплетающее отображение, которое осуществляет изоморфизм из f в h. Тогда инвариантным прямым дополнением к инвариантному подпространству U будет подпространство $A^{-1}((AU)_\perp)$.

Наряду с понятием эквивалентности, для унитарных представлений вводится понятие *унитарной эквивалентности.*

Определение 7.7. Унитарные представления (f, G, V) и (h, G, W) называются *унитарно эквивалентными*, если существует изометрия $A\colon V \to W$ осуществляющая изоморфизм этих представлений.

Следующая теорема показывает, что, несмотря на различие в определениях, понятия эквивалентности и унитарной эквивалентности совпадают.

Теорема 7.6. *Если два унитарных представления f и h эквивалентны, то они и унитарно эквивалентны.*

Для доказательства этой теоремы нам потребуется следующий вспомогательный факт, который мы сформулируем в виде леммы.

Лемма 7.1. *Пусть $A : V \to W$ — биективное линейное отображение из эрмитовского пространства V в эрмитовское пространство W. Тогда его можно разложить в композицию $A = T \circ B$, где $T\colon V \to W$ — изометрия, а B — эрмитовский положительно определенный оператор в пространстве V.*

Доказательство леммы. Рассмотрим следующую полуторалинейную форму на пространстве V:

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle A\mathbf{x} | A\mathbf{y} \rangle. \tag{7.4}$$

Нетрудно видеть, что форма (7.4) симметрична и положительно определена. Используем теорему 7.1 для того, чтобы определить эрмитовский положительно определенный оператор D в пространстве V. Соответствующая ему форма (7.1) совпадает с (7.4). Это дает

$$\langle \mathbf{x} | D\mathbf{y} \rangle = \langle A\mathbf{x} | A\mathbf{y} \rangle. \tag{7.5}$$

По оператору D в соответствии с теоремой 7.4 построим эрмитовский положительно определенный оператор B, являющийся корнем квадратным из D, т. е. $B^2 = D$. Теперь рассмотрим отображение $T : V \to W$, определив его как композицию $T = A \circ B^{-1}$. Ввиду положительной определенности оператор B невырожден. Поэтому он обратим. Остается показать, что отображение T — изометрия. Действительно, мы имеем

$$\langle T\mathbf{x}|T\mathbf{y}\rangle = \langle A \circ B^{-1}\mathbf{x}|A \circ B^{-1}\mathbf{y}\rangle = \langle B^{-1}\mathbf{x}|D \circ B^{-1}\mathbf{y}\rangle. \tag{7.6}$$

Последнее равенство в цепочке (7.6) обеспечивается соотношением (7.5). Дальнейшие вычисления очевидны:

$$\langle B^{-1}\mathbf{x}|D \circ B^{-1}\mathbf{y}\rangle = \langle B^{-1}\mathbf{x}| \circ B\mathbf{y}\rangle = \langle B \circ B^{-1}\mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle.$$

Соединяя это с (7.6), получаем $\langle T\mathbf{x}|T\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle$ для произвольных двух векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Значит, T — изометрия. Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 7.6. Отображение $A = T \circ B$ в данном случае осуществляет изоморфизм унитарных представлений f и h. Поэтому мы имеем

$$T \circ B \circ f(g) = h(g) \circ T \circ B \quad \text{для всех} \quad g \in G. \tag{7.7}$$

Покажем, что оператор B перестановочен с операторами представления $f(g)$. Для этого установим перестановочность оператора $D = B^2$ с $f(g)$:

$$\langle \mathbf{x}|f(g)B^2\mathbf{y}\rangle = \langle f(g^{-1})\mathbf{x}|BB\mathbf{y}\rangle = \langle Bf(g^{-1})\mathbf{x}|B\mathbf{y}\rangle.$$

Здесь мы сначала воспользовались унитарностью оператора $f(g)$, а затем — эрмитовостью оператора B. Продолжая выкладки, используем изометричность отображения T:

$$\langle Bf(g^{-1})\mathbf{x}|B\mathbf{y}\rangle = \langle Bf(g^{-1})\mathbf{x}|TB\mathbf{y}\rangle = \langle TBf(g^{-1})\mathbf{x}|B\mathbf{y}\rangle.$$

Но $T \circ B \circ f(g^{-1}) = h(g^{-1}) \circ T \circ B$. Это вытекает из (7.7). Пользуясь этим соотношением и учитывая унитарность $h(g)$, получаем следующие равенства:

$$\langle TBf(g^{-1})\mathbf{x}|B\mathbf{y}\rangle = \langle h(g^{-1})TB\mathbf{x}|B\mathbf{y}\rangle = \langle TB\mathbf{x}|h(g)TB\mathbf{y}\rangle.$$

Вновь воспользуемся равенством (7.7) в форме $h(g)\circ T\circ B = T\circ B\circ h(g)$. Затем учтем изометричность отображения T:

$$\langle TB\mathbf{x}|h(g)TB\mathbf{y}\rangle = \langle TB\mathbf{x}|TBf(g)\mathbf{y}\rangle = \langle T^{-1}TB\mathbf{x}|Bf(g)\mathbf{y}\rangle.$$

Завершим цепочку вычислений, используя эрмитовость B:

$$\begin{gathered}\langle T^{-1}TB\mathbf{x}|Bf(g)\mathbf{y}\rangle = \langle B\mathbf{x}|Bf(g)\mathbf{y}\rangle = \\ = \langle \mathbf{x}|BBf(g)\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}|B^2f(g)\mathbf{y}\rangle.\end{gathered}$$

В итоге мы получили $\langle \mathbf{x}|f(g)B^2\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}|B^2f(g)\mathbf{y}\rangle$. В силу произвольности векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из этого получаем требуемую перестановочность операторов $f(g)$ и $D = B^2$. Но положительно определенный эрмитовский оператор B есть корень квадратный из положительно определенного эрмитовского оператора D. Поэтому он коммутирует со всеми операторами, с которыми коммутирует D (см. теорему 7.4). В итоге $f(g)\circ B = B\circ f(g)$. Подставим это в соотношение (7.7) и получим $T\circ f(g)\circ B = h(g)\circ T\circ B$. Остается сократить общий множитель B, что возможно в силу его невырожденности:

$$T\circ f(g) = h(g)\circ T \quad \text{для всех} \quad g\in G. \tag{7.8}$$

Из (7.8) теперь видим, что изометрическое отображение T осу ществляет изоморфизм унитарных представлений f и h. Следовательно эти представления унитарно эквивалентны. Теорема 7.6 доказана. $\square$

ГЛАВА II

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

§ 1. Регулярные представления конечных групп.

Пусть G — конечная группа и пусть $N = |G|$ — число элементов этой группы. Рассмотрим множество комплекснозначных числовых функций на G и обозначим его $L_2(G)$. Ясно, что это множество является комплексным линейным векторным простоанством размерности $\dim(L_2(G)) = N$. Оснастим $L_2(G)$ структурой эрмитовского пространства, задав скалярное произведение двух функций $u(g)$ и $v(g)$ соотношением

$$\langle u|v\rangle = \frac{1}{N}\sum_{g\in G}\overline{u(g)}\,v(g). \tag{1.1}$$

Теперь определим действие группы G на $L_2(G)$, задав линейные операторы $R(g)\colon\, L_2(G) \to L_2(G)$. Положим

$$R(g)v(a) = v(a\,g) \quad \text{для всех} \quad a, g \in G \quad \text{и} \quad v \in L_2(G). \tag{1.2}$$

Операторы $R(g)$ действуют на функции из $L_2(g)$, осуществляя правый сдвиг их аргументов. Нетрудно проверить, что они удовлетворяют соотношению

$$R(g_1) \circ R(g_2) = R(g_1\,g_2).$$

Следовательно, операторы $R(g)$, действующие согласно (1.2), определяют представление группы G в пространстве $L_2(G)$.

Это представление называется *правым регулярным представлением* конечной группы G.

Наряду с правым регулярным представлением определяется также *левое регулярное представление* $(L, G, L_2(G))$ группы G. Соответствующие операторы задаются так:

$$L(g)v(a) = v(g^{-1}\,a) \quad \text{для всех} \quad a, g \in G \quad \text{и} \quad v \in L_2(G). \tag{1.3}$$

Теорема 1.1. *Правое регулярное представление, задаваемое операторами* (1.2), *и левое регулярное представление, задаваемое операторами* (1.3), *унитарны относительно эрмитовской структуры, заданной скалярным произведением* (1.1).

Док-во. Проверим унитарность операторов $R(g)$ и $L(g)$ непосредственным вычислением. Пусть u и v — две произвольные функции из $L_2(G)$. Тогда

$$\begin{aligned}\langle R(g)u|R(g)v\rangle &= \frac{1}{N}\sum_{a\in G}\overline{u(a\,g)}\,v(a\,g) = \\ &= \frac{1}{N}\sum_{b\in G}\overline{u(b)}\,v(b) = \langle u|v\rangle;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle L(g)u|L(g)v\rangle &= \frac{1}{N}\sum_{a\in G}\overline{u(g^{-1}\,a)}\,v(g^{-1}\,a) = \\ &= \frac{1}{N}\sum_{b\in G}\overline{u(b)}\,v(b) = \langle u|v\rangle;\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что правый сдвиг $a \mapsto b = a\,g$ и левый сдвиг $a \mapsto g^{-1}\,a$ суть взаимно однозначные отображения группы G на себя. $\square$

Теорема 1.2. *Правое регулярное представление и левое регулярное представление унитарно эквивалентны.*

Док-во. Для доказательства утверждения теоремы необходимо построить унитарный оператор $A\colon\ L_2(G) \to L_2(G)$, который сплетает представления $(R, G, L_2(G))$ и $(L, G, L_2(G))$. Определим его так:

$$Av(g) = v(g^{-1}) \quad \text{для всех} \quad g \in G \quad \text{и} \quad v \in L_2(G). \tag{1.4}$$

Унитарность оператора A относительно эрмитовской структуры (1.1) проверяется следующими вычислениями:

$$\langle Au|Av\rangle = \frac{1}{N}\sum_{a\in G}\overline{u(a^{-1})}\,v(a^{-1}) = \frac{1}{N}\sum_{b\in G}\overline{u(b)}\,v(b) = \langle u|v\rangle.$$

При выполнении этих вычислений мы воспользовались тем, что операция обращения $a \mapsto b = a^{-1}$ есть взаимно однозначное отображение группы G на себя.

Покажем теперь, что оператор A, заданный соотношением (1.4), сплетает правое и левое регулярные представления. Пусть v — некоторая произвольная функция из $L_2(G)$. Пусть также $u = L(g)v$ и $w = Av$. Тогда

$$\begin{aligned} AL(g)v(a) = Au(a) = u(a^{-1}) = v(g^{-1}\,a^{-1}) = \\ = v((a\,g)^{-1}) = w(a\,g) = R(g)w(a) = R(g)Av(a). \end{aligned}$$

Из этой цепочки вычислений в силу произвольности $v \in L_2(G)$ видим, что $A \circ L(g) = R(g) \circ A$. Теорема доказана. $\square$

§ 2. Инвариантное усреднение на конечной группе.

В предыдущем параграфе мы уже заметили, что идея рассмотрения числовых функций на конечной группе достаточно плодотворна. Конечность группы G позволяет определить операцию инвариантного усреднения для таких функций. Для произвольной функции $v \in L_2(G)$ обозначим через $M[v]$ число, определяемое соотношением:

$$M[v] = \frac{1}{N}\sum_{g\in G} v(g), \quad \text{где} \quad N = |G|. \tag{2.1}$$

Мы использовали символ M для обозначения операции инвариантного усреднения (2.1), ибо она аналогична вычислению математического ожидания в теории вероятностей.

Отметим, что операция инвариантного усреднения (2.1) может быть применена не только к числовым, но и к векторным, операторнозначным и матричнозначным функциям на группе G. Для применимости этой операции необходимо лишь, чтобы область значений функции f лежала в некотором линейном векторном пространстве. При этом результат усреднения $M[v]$ будет элементом этого же векторного пространства. Операция инвариантного усреднения обладает следующими очевидными свойствами линейности:

(1) $M[u+v] = M[u] + M[v]$;

(2) $M[\alpha\, u] = \alpha\, M[u]$, где α — число.

Свойство инвариантности усреднения (2.1) проявляется в виде следующих соотношений:

(3) $M[R(g)u] = M[u]$, инвариантность относительно правых сдвигов;

(4) $M[L(g)u] = M[u]$, инвариантность относительно левых сдвигов;

(5) $M[Au] = M[u]$, инвариантность относительно инверсий.

Доказательство свойств (3)–(5) сводится к проверке следующих соотношений:

$$M[R(g)u] = \frac{1}{N}\sum_{a\in G} u(a\,g) = \frac{1}{N}\sum_{b\in G} u(b) = M[u],$$

$$M[L(g)u] = \frac{1}{N}\sum_{a\in G} u(g^{-1}\,a) = \frac{1}{N}\sum_{b\in G} u(b) = M[u],$$

$$M[Au] = \frac{1}{N}\sum_{a\in G} u(a^{-1}) = \frac{1}{N}\sum_{b\in G} u(b) = M[u].$$

Напомним, что оператор инверсии A в свойстве (5) задан соотношением (1.4).

Если u — векторнозначная функция со значениями из линейного векторного пространства V, то свойства (1)–(5) can be можно дополнить еще одним:

(6) $M[Bu] = BM[u]$, где B — линейное отображение, имеющее V в качестве области определения.

Соотношение (6) выполнено также для операторнозначных функций со значениями из $\operatorname{End}(V)$:

(6) $M[B \circ u] = B \circ M[u]$, где B — линейное отображение с областью определения V.

Для таких функций мы можем записать еще два свойства:

(7) $\operatorname{tr} M[u] = M[\operatorname{tr} u]$;

(8) $M[B \circ u] = B \circ M[u]$, где B — линейное отображение с областью определения V.

Операция инвариантного усреднения играет важную роль в теории представлений конечных групп. В качестве первого примера ее использования докажем следующий факт.

Теорема 2.1. *Всякое конечномерное представление конечной группы эквивалентно некоторому унитарному представлению этой группы.*

Пусть (f, G, V) — некоторое конечномерное представление конечной группы G. Для доказательства теоремы мы, вообще говоря, должны построить унитарное представление (h, G, W) этой же группы в некотором эрмитовском пространстве W и найти линейное отображение $A : V \to W$, являющееся изоморфизмом представлений f и h. Предположим, что это нам удалось. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$A \circ f(g) = h(g) \circ A, \qquad \langle h(g)\mathbf{u} | h(g)\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle.$$

Пространство V не оснащено своим скалярным произведением. Но мы превратим его в эрмитовское пространство, оснастив скалярным произведением по следующему правилу:

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \langle A\mathbf{u} | A\mathbf{v} \rangle. \tag{2.2}$$

Все свойства скалярного произведения для полуторалинейной формы (2.2) проверяются непосредственно. Положительная определенность имеет место в силу того, что A — биективное отображение и $\operatorname{Ker} A = \{0\}$. Представление f оказывается унитарным относительно скалярного произведения (2.2):

$$\begin{gathered}\langle f(g)\mathbf{u}|f(g)\mathbf{v}\rangle = \langle Af(g)\mathbf{u}|Af(g)\mathbf{v}\rangle = \\ = \langle h(g)A\mathbf{u}|h(g)A\mathbf{v}\rangle = \langle A\mathbf{u}|A\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle,\end{gathered}$$

а отображение A устанавливает унитарную эквивалентность представлений f и h. Приведенные рассуждения показывают, что для доказательства теоремы 2.1 нет необходимости строить отдельное унитарное представление (h, G, W) и устанавливать изоморфизм A. Достаточно подобрать подходящее скалярное произведение в V, относительно которого само представление f было бы унитарным.

Пусть $\langle\!\langle f(g)\mathbf{u}|f(g)\mathbf{v}\rangle\!\rangle$ — некоторое произвольное скалярное произведение в V. Его можно определить, например, воспользовавшись разложением векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ в некотором базисе:

$$\langle\!\langle f(g)\mathbf{u}|f(g)\mathbf{v}\rangle\!\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{u^i}\, v^i.$$

Разумеется, операторы $f(g)$ не обязаны быть унитарными относительно такого скалярного произведения. Определим новое скалярное произведение в пространстве V при помощи операции инвариантного усреднения:

$$\langle \mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle = M[\langle\!\langle f(g)\mathbf{u}|f(g)\mathbf{v}\rangle\!\rangle] = \frac{1}{N}\sum_{g\in G}\langle\!\langle f(g)\mathbf{u}|f(g)\mathbf{v}\rangle\!\rangle. \tag{2.3}$$

Нетрудно видеть, что форма (2.3) полуторалинейна и симметрична. Она также положительно определена:

$$\langle \mathbf{u}|\mathbf{u}\rangle = \sum_{g\in G}\frac{\langle\!\langle f(g)\mathbf{u}|f(g)\mathbf{u}\rangle\!\rangle}{N} = \sum_{g\in G}\frac{\|f(g)\mathbf{u}\|^2}{N} > 0 \ \ \forall \ \ \mathbf{u} \neq 0.$$

Унитарность $f(g)$ относительно скалярного произведения (2.3) вытекает из свойства (3) инвариантного усреднения:

$$\langle f(g)\mathbf{u}|f(g)\mathbf{v}\rangle = \sum_{a\in G}\frac{\langle\!\langle f(a)f(g)\mathbf{u}|f(a)f(g)\mathbf{v}\rangle\!\rangle}{N} =$$

$$= \sum_{a\in G}\frac{\langle\!\langle f(a\,g)\mathbf{u}|f(a\,g)\mathbf{v}\rangle\!\rangle}{N} = \sum_{b\in G}\frac{\langle\!\langle f(b)\mathbf{u}|f(b)\mathbf{v}\rangle\!\rangle}{N} = \langle\mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle.$$

В силу сказанного любое конечномерное представление конечной группы может быть сделано унитарным при подходящем выборе скалярного произведения (2.3). Это доказывает теорему 2.1.

В качестве немедленного следствия теоремы 2.1 получаем следующее важное утверждение относительно конечномерных представлений конечных групп.

Теорема 2.2. *Всякое конечномерное представление конечной группы вполне приводимо.*

Доказательство этой теоремы основано на теореме 7.5 из первой главы, согласно которой всякое унитарное представление вполне приводимо. А для конечномерных представлений конечных групп мы доказали их эквивалентность унитарным представлениям.

§ 3. Характеры представлений групп.

Пусть (f, G, V) — некоторое конечномерное представление группы G. С каждым таким представлением связана комплексная числовая функция χ_f на группе G, определяемая как след операторов представления:

$$\chi_f(g) = \operatorname{tr} f(g). \tag{3.1}$$

Числовая функция $\chi_f(g)$ на G , определяемая соотношением (3.1) называется *характером* представления f.

Теорема 3.1. *Характеры конечномерных представлений обладают следующими свойствами:*

(1) *характеры эквивалентных представлений совпадают;*
(2) *характер постоянен на каждом классе сопряженных элементов;*
(3) *если представление f унитарно, то$\chi_f(g^{-1}) = \overline{\chi_f(g)}$;*
(4) *характер прямой суммы представлений равен сумме характеров отдельных прямых слагаемых;*
(5) *характер тензорного произведения представлений равен произведению характеров сомножителей.*

Начнем с доказательства первого пункта теоремы. Пусть представления (f, G, V) и (h, G, W) эквивалентны и пусть $A\colon V \to W$ — соответствующий изоморфизм. Выберем базис $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ в V. Тогда векторы $\tilde{\mathbf{e}}_1 = A\mathbf{e}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{e}}_n = A\mathbf{e}_n$ составляют базис в W. Найдем матрицы операторов $f(g)$ и $h(g)$ в этих базисах. Они определяются соотношениями:

$$f(g)\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{n} F_i^j(g)\,\mathbf{e}_j, \qquad h(g)\tilde{\mathbf{e}}_i = \sum_{j=1}^{n} H_i^j(g)\,\tilde{\mathbf{e}}_j. \tag{3.2}$$

Подставим $\tilde{\mathbf{e}}_i = A\mathbf{e}_i$ и $\tilde{\mathbf{e}}_j = A\mathbf{e}_j$ во второе соотношение (3.2) и учтем соотношение and $A \circ f(g) = h(g) \circ A$. Это дает

$$Af(g)\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{n} H_i^j(g)\,A\mathbf{e}_j. \tag{3.3}$$

Отображение A биективно, поэтому на A в (3.3) можно сократить. После этого сравнение (3.3) с первым соотношением (3.2) дает $H_i^j(g) = F_i^j(g)$, т. е. матрицы операторов $f(g)$ и $h(g)$ совпадают. Значит, $\operatorname{tr} f(g) = \operatorname{tr} h(g)$ и $\chi_f(g) = \chi_h(g)$, что доказывает первый пункт теоремы 3.1.

Пусть два элемента g и $\tilde{g}$ группы G принадлежат одному классу сопряженных элементов. Это означает, что $\tilde{g} = a\,g\,a^{-1}$

для некоторого $a \in G$. Поэтому

$$f(\tilde{g}) = f(a\,g\,a^{-1}) = f(a) \circ f(g) \circ f(a)^{-1}.$$

Остается применить соотношение $\operatorname{tr}(B \circ A \circ B^{-1}) = \operatorname{tr}(A)$, положив $A = f(g)$ и $B = f(a)$ в нем. Второй пункт теоремы 3.1 доказан.

Для доказательства третьего пункта теоремы рассмотрим унитарное представление (f, G, V) и выберем ортонормированный базис V. Условие унитарности представления f можно записать в виде $\langle f(g)\mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}|f(g)^{-1}\mathbf{v}\rangle$. Подстановка $\mathbf{u} = \mathbf{e}_i$, $\mathbf{v} = \mathbf{e}_j$ и учет соотношения (3.2), определяющего матрицу оператора $f(g)$, дает

$$\overline{F^j_i(g)} = F^i_j(g^{-1}). \tag{3.4}$$

Соотношение (3.4) означает, что матрицы $\overline{F(g)}$ и $F(g^{-1})$ отличаются транспонированием. Следы таких матриц совпадают.

Утверждение в пункте (4) теоремы тривиально. Пусть $f = f_1 \oplus f_2$ и $V = V_1 \oplus V_2$. Выберем базис в V, составленный из базисов в подпространствах V_1 и V_2. Матрица оператора $f(g)$ в таком базисе блочно-диагональна, а диагональные блоки совпадают с матрицами операторов $f_1(g)$ и $f_2(g)$. Поэтому $\operatorname{tr} f(g) = \operatorname{tr} f_1(g) + \operatorname{tr} f_2(g)$.

Остается последний пункт теоремы. Пусть $\varphi = f \otimes h$ и $V = U \otimes W$. Выберем базис $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ в пространстве U и базис $\tilde{\mathbf{e}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{e}}_m$ в пространстве W. Матрицы операторов $f(g)$ и $h(g)$ определяются из соотношений

$$f(g)\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{n} F^j_i(g)\,\mathbf{e}_j, \qquad h(g)\tilde{\mathbf{e}}_q = \sum_{p=1}^{n} H^p_q(g)\,\tilde{\mathbf{e}}_p, \tag{3.5}$$

которые аналогичны соотношениям (3.2). Базис пространства $V = U \otimes W$ составим из векторов $\mathbf{E}_{iq} = \mathbf{e}_i \otimes \tilde{\mathbf{e}}_q$. Он нумеруется двумя индексами, поэтому матрица оператора $\varphi(g)$

будет изображаться четырехиндексным массивом чисел. Она определяется из соотношений:

$$\varphi(g)\mathbf{E}_{iq}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\mathit{\Phi}^{jp}_{iq}(g)\,\mathbf{E}_{jp}. \tag{3.6}$$

Действие оператора $\varphi(g)$ на вектор $\mathbf{E}_{iq}=\mathbf{e}_i\otimes\tilde{\mathbf{e}}_q$ определяется формулой (5.1) из первой главы:

$$\varphi(g)(\mathbf{e}_i\otimes\tilde{\mathbf{e}}_q)=(f(g)\mathbf{e}_i)\otimes(h(g)\tilde{\mathbf{e}}_q). \tag{3.7}$$

Соединив соотношение (3.7) с формулами (3.5), находим

$$\varphi(g)\mathbf{E}_{iq}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}F^{j}_{i}(g)\,H^{p}_{q}(g)\,\mathbf{E}_{jp}. \tag{3.8}$$

Теперь из сравнения соотношений (3.6) и (3.8) определим компоненты матрицы оператора $\varphi(g)$:

$$\mathit{\Phi}^{jp}_{iq}(g)=F^{j}_{i}(g)\,H^{p}_{q}(g). \tag{3.9}$$

Остается вычислить след оператора $\varphi(g)$ как след матричного массива (3.9):

$$\operatorname{tr}\varphi(g)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{q=1}^{m}\mathit{\Phi}^{iq}_{iq}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{q=1}^{m}F^{i}_{i}(g)\,H^{q}_{q}(g)=$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n}F^{i}_{i}(g)\right)\left(\sum_{q=1}^{m}H^{q}_{q}(g)\right)=\operatorname{tr}f(g)\,\operatorname{tr}h(g).$$

Полученное соотношение доказывает пункт (5) теоремы 3.1 и этим завершает доказательство всей теоремы.

Заканчивая, этот параграф, надо отметить, что перечисленные здесь свойства характеров имеют место для конечномерных представлений произвольных групп, а не только для конечных.

§ 4. Соотношения ортогональности.

Пусть (f, G, V) и (h, G, W) — пара комплексных конечномерных представлений конечной группы G. Выберем некоторое отображение $B: V \to W$ из линейного пространства $\mathrm{Hom}(V, W)$ и построим с его помощью функцию $\varphi_B(g)$ на G со значениями в пространстве $\mathrm{Hom}(V, W)$. Положим

$$\varphi_B(g) = h(g) \circ B \circ f(g^{-1}).$$

Результатом инвариантного усреднения функции $\varphi_B(g)$ по группе G будет некоторый элемент $C \in \mathrm{Hom}(V, W)$:

$$C = M[\varphi_B(g)] = \frac{1}{N} \sum_{a \in G} h(a) \circ B \circ f(a^{-1}). \tag{4.1}$$

Нетрудно убедиться в том, что отображение $C: V \to W$ есть гомоморфизм представлений из f в h:

$$C \circ f(g) = M[\varphi_B(g)] \circ f(g) = \frac{1}{N} \sum_{a \in G} h(a) \circ B \circ f(a^{-1}) \circ f(g) =$$
$$= \frac{1}{N} \sum_{a \in G} h(a) \circ B \circ f(a^{-1}\,g) = \frac{1}{N} \sum_{b \in G} h(g\,b) \circ B \circ f(b^{-1}) =$$
$$= \frac{1}{N} \sum_{b \in G} h(g) \circ h(b) \circ B \circ f(b^{-1}) = h(g) \circ M[\varphi_B(g)] = h(g) \circ C.$$

Пусть теперь представления (f, G, V) и (h, G, W) неприводимы. В случае, когда они не эквивалентны, воспользовавшись леммой Шура 5.1, получаем $C = 0$.

Рассмотрим случай $f \cong h$. Для каждой пары эквивалентных неприводимых представлений (f, G, V) и (h, G, W) зафиксируем некоторое биективное отображение $A_{fh}: V \to W$, осуществляющее изоморфизм этих представлений. Тогда следующая лемма определит структуру отображения C из (4.1).

Лемма 4.1. *Гомоморфизм $C: V \to W$ двух эквивалентных неприводимых конечномерных комплексных представлений (f, G, V) и (h, G, W) определен однозначно с точностью до числового множителя, т. е. $C = \lambda\, A_{fh}$.*

Док-во. Рассмотрим оператор $A = A_{fh}^{-1} \circ C$, действующий в пространстве V. Будучи композицией двух гомоморфизмов, он осуществляет гомоморфизм представления f в себя. Поэтому $A \circ f(g) = f(g) \circ A$ для всех $f(g)$. Применяя лемму Шура 5.2, получим $A = \lambda \cdot 1$. Отсюда $C = \lambda\, A_{fh}$, что и требовалось доказать. □

Остается найти величину числового множителя λ. Для этого воспользуемся следом оператора A, который является его числовым инвариантом:

$$\lambda = \frac{\operatorname{tr} A}{\operatorname{tr} 1} = \frac{\operatorname{tr} A}{\dim V} = \frac{1}{\dim V}\ \operatorname{tr}(A_{fh}^{-1} \circ C).$$

Подставим в эту формулу выражение (4.1), определяющее отображение C:

$$\lambda = \frac{1}{N\,\dim V} \sum_{a \in G} \operatorname{tr}(A_{fh}^{-1} \circ h(a) \circ B \circ f(a^{-1})) =$$
$$= \frac{1}{N\,\dim V} \sum_{a \in G} \operatorname{tr}(f(a) \circ A_{fh}^{-1} \circ B \circ f(a^{-1})) = \frac{\operatorname{tr}(A_{fh}^{-1} \circ B)}{\dim V}.$$

Здесь мы воспользовались формулой $\operatorname{tr}(F \circ D \circ F^{-1}) = \operatorname{tr}(D)$ для $F = f(a)$ и $D = A_{fh}^{-1} \circ B$. Результат вычисления параметра λ позволяет сформулировать следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Для всяких двух неприводимых конечномерных комплексных представлений (f, G, V) и (h, G, W) конечной группы G выполнено соотношение:*

$$\sum_{a \in G} \frac{h(a) \circ B \circ f(a^{-1})}{N} = \begin{cases} 0 & \text{для } \ f \not\cong h, \\[2ex] \dfrac{\operatorname{tr}(A_{fh}^{-1} \circ B)}{\dim V} & \text{для } \ f \not\cong h, \end{cases} \tag{4.2}$$

которое справедливо при любом выборе линейного отображения $B\colon V \to W$ *из пространства* $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Соотношение (4.2) является базовым соотношением ортогональности в теории представлений конечных групп. Рассмотрим матричную форму записи этого соотношения. Пусть выбраны базисы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ и $\tilde{\mathbf{e}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{e}}_m$ в пространствах V и W соответственно. Задание этих базисов определяет матрицы $F^p_i(a)$ и $H^j_q(a)$ для операторов $f(a)$ и $h(a)$ и матрицу B^q_p для отображения $B \in \mathrm{Hom}(V, W)$. В случае $f \ncong h$ базисы в V и W никак не связаны друг с другом. В случае же $f \cong h$ удобно выбрать произвольным образом один из базисов, а второй определить соотношением

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = A_{fh}\mathbf{e}_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4.3}$$

При таком выборе базисов отображению A_{fh} будет соответствовать единичная матрица, а матрицы операторов $f(a)$ и $h(a)$ совпадут: $F^p_i(a) = H^p_i(a)$. Отображение B выберем таким, чтобы единственным ненулевым элементом в его матрице был элемент $B^q_p = 1$, расположенный на пересечении q-ой строки и p-ого столбца. Тогда соотношение ортогональности (4.2) перепишется в виде

$$\frac{1}{N}\sum_{a\in G} H^j_q(a)\, F^p_i(a^{-1}) = \begin{cases} 0 & \text{for } f \ncong h, \\ \dfrac{\delta^j_i\,\delta^p_q}{n} & \text{for } f \cong h. \end{cases} \tag{4.4}$$

Пусть представления f и h унитарны. Выше мы уже доказали, что любое конечномерное комплексное представление конечной группы можно заменить эквивалентным ему унитарным представлением. При этом, если f и h эквивалентны, то они и унитарно эквивалентны. Поэтому отображение A_{fh} можно считать изометрией, а базисы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ и $\tilde{\mathbf{e}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{e}}_m$

— ортонормированными. Тогда соотношение (4.4) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{1}{N}\sum_{a\in G} H^j_q(a)\,\overline{F^i_p(a)} = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad f \ncong h, \\ \dfrac{\delta^j_i\,\delta^p_q}{n} & \text{для} \quad f \cong h. \end{cases} \tag{4.5}$$

Отметим, что соотношение (4.3) совместимо с ортонормированностью базисов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ и $\tilde{\mathbf{e}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{e}}_m$, ибо A_{fh} — изометрия. При написании (4.5) мы использовали формулу

$$F^p_i(a^{-1}) = \overline{F^i_p(a)}$$

поскольку матрицы унитарных операторов $f(a)$ в ортонормированном базисе унитарны.

Положим $q = j$ и $p = i$ в формуле (4.5) и просуммируем по i и j. В результате этого из (4.5) получим следующее соотношение для характеров неприводимых представлений f и h конечной группы:

$$\frac{1}{N}\sum_{a\in G} \operatorname{tr}(h(a))\,\overline{\operatorname{tr}(f(a))} = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad f \ncong h, \\ 1 & \text{для} \quad f \cong h. \end{cases} \tag{4.6}$$

Унитарность f и h в (4.6) специально требовать не надо, ибо характеры эквивалентных представлений совпадают, а представления f и h эквивалентны унитарным согласно теореме 2.1.

Теорема 4.2. *Характеры неэквивалентных неприводимых конечномерных комплексных представлении конечной группы G ортогональны как элементы пространства $L_2(G)$.*

Соотношение (4.6) служит доказательством теоремы 4.2. Чтобы убедиться в этом, достаточно сравнить его с (1.1). Из конечности $\dim L_2(G) = N \leqslant \infty$ вытекает конечность числа попарно не эквивалентных неприводимых конечномерных комплексных представлений конечной группы G. Это позволяет говорить о *полном наборе* таких представлений.

Определение 4.1. Представления $f_1, \ldots, f_m$ образуют полный набор неэквивалентных неприводимых конечномерных комплексных представлений конечной группы G, если

(1) никакие два из них не эквивалентны друг другу;
(2) любое неприводимое конечномерное комплексное представление группы G эквивалентно одному из представлений $f_1, \ldots, f_m$.

Число m представлений в полном наборе является числовым инвариантом конечной группы G. Оно не превосходит порядка группы $N = |G|$.

Пусть $(f_1, G, V_1), \ldots, (f_m, G, V_m)$ — полный набор неэквивалентных неприводимых представлений. Без ограничения общности мы можем считать эти представления унитарными. Пусть $n_1, \ldots, n_m$ — размерности этих представлений. Выберем в каждом из пространств $V_1, \ldots, V_m$ по ортонормированному базису. Этим определяется семейство матриц с компонентами

$$F_i^j(g, r), \quad r = 1, \ldots, m; \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n_r.$$

Каждая из компонент этих матриц содержит зависимость от $g \in G$, поэтому ее можно рассматривать как функцию из $L_2(G)$. Из (4.5) получаем следующие соотношения ортогональности для этих функций:

$$\frac{1}{N} \sum_{a \in G} F_q^j(a, r) \, \overline{F_p^i(a, s)} = \frac{1}{n_r} \, \delta_{rs} \, \delta_{ij} \, \delta_{pq}. \tag{4.7}$$

Соотношения (4.7) означают, что, рассматриваемые как элементы пространства $L_2(G)$ функции $F_i^j(g, r)$ попарно ортогональны. Оказывается, они не только ортогональны, но и полны в этом пространстве.

Теорема 4.3. *Для произвольного набора $f_1, \ldots, f_m$ неприводимых унитарных представлений конечной группы G*

матричные элементы операторов $f_r(g)$, вычисленные в ортонормированных базисах, составляют полную ортогональную систему функций в пространстве $L_2(G)$.

Док-во. Ортогональность функций $F^i_j(g,r)$ вытекает из соотношения (4.7). Остается доказать их полноту. Для этого рассмотрим правое регулярное представление $(R, G, L_2(G))$. Оно унитарно относительно эрмитовской структуры, задаваемой скалярным произведением (1.1) (см. теорему 1.1). По этой причине правое регулярное представление вполне приводимо и раскладывается в прямую сумму унитарных неприводимых представлений:

$$R = R_1 \oplus \ldots \oplus R_k. \tag{4.8}$$

Разложению (4.8) вполне регулярного представления R соответствует разложение пространства $L_2(G)$ в прямую сумму неприводимых R-инвариантных подпространств

$$L_2(G) = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k.$$

Каждое из неприводимых представлений R_q в (4.8) эквивалентно одному из неприводимых унитарных представлений $(f_{r(q)}, G, V_{r(q)})$ из полное набора. Пользуясь теоремой 7.6 из предыдущей главы, заключаем, что представления R_q и $f_{r(q)}$ унитарно эквивалентны. Это позволяет выбрать в каждом из подпространств $W_q \subseteq L_2(G)$ ортонормированный базис, состоящий из функций

$$\varphi_i(g,q), \quad 1 \leqslant i \leqslant n_{r(q)}, \tag{4.9}$$

такой, что компоненты матриц операторов $R_q(g)$ в этом базисе совпадают с компонентами матриц $F^j_i(g, r(q))$ операторов соответствующего представления $f_{r(q)}$ из полного списка. Запишем это обстоятельство в виде соотношения

$$R_q(g)\varphi_i(q,q) = \sum_{j=1}^{n_{r(q)}} F^j_i(q, r(q))\, \varphi_j(a,q). \tag{4.10}$$

Но оператор $R_q(g)$ есть сужение оператора $R(q)$ из (4.8) на инвариантное подпространство W_q, а $\varphi_i(a,q)$ — элемент этого подпространства. Поэтому

$$R_q(g)\varphi_i(a,q) = R(g)\varphi_i(a,q) = \varphi_i(a\,g,q). \tag{4.11}$$

Подставим (4.11) в (4.10). В полученном выражении положим $a = e$. Величины $\varphi_i(e,q)$ — это некоторые константы, обозначим их $c_{iq} = \varphi_i(e,q)$. В результате получим соотношение

$$\varphi_i(g,q) = \sum_{j=1}^{n_{r(q)}} c_{jq}\, F_i^j(q, r(q)). \tag{4.12}$$

которое представляет собой разложение функции $\varphi_i(g,q)$ по системе функций $F_i^j(q,r(q))$. Но система функций $\varphi_i(g,q)$ из (4.9) составляет базис в $L_2(G)$. Она полна и любой элемент $\varphi(g) \in L_2(G)$ может быть разложен по ней. В силу (4.12) любое разложение $\varphi(g)$ по функциям $\varphi_i(g,q)$ может быть трансформировано в разложение $\varphi(g)$ по $F_i^j(q,r(q))$. Следовательно система функций $F_i^j(q,r(q))$ полна. $\square$

Пусть (φ, G, V) — конечномерное комплексное представление конечной группы. Оно вполне приводимо (см. теорему 2.2) и раскладывается в сумму неприводимых представлений:

$$\varphi = \varphi_1 \oplus \ldots \oplus \varphi_\nu. \tag{4.13}$$

Каждое из неприводимых представлений φ_q в (4.13) эквивалентно одному из представлений $f_{r(q)}$ из полного набора. Обозначим через k_r число неприводимых представлений в разложении (4.13), эквивалентных представлению f_r. Тогда разложение (4.13) изображается в виде

$$\varphi \cong k_1\, f_1 \oplus \ldots \oplus k_m\, f_m. \tag{4.14}$$

Числа k_r в (4.14) называются *кратностями* вхождения неприводимых представлений f_r в представление φ. Соотношение ортогональности (4.6) для характеров позволяет вычислять кратности k_r в (4.14), не вычисляя фактически разложения (4.13) для функции φ:

$$k_r = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} \operatorname{tr} \varphi(g)\, \overline{\operatorname{tr} f_r(g)}. \tag{4.15}$$

Соотношение (4.15) вытекает из следующего разложения для функции $\operatorname{tr} \varphi(g)$:

$$\operatorname{tr} \varphi(g) = k_1 \operatorname{tr} f_1 + \ldots + k_m \operatorname{tr} f_m. \tag{4.16}$$

Формула (4.16), в свою очередь, вытекает из (4.14).

Найдем разложение (4.14) для правого регулярного представления $R(g)$. Соответствующее разложение для левого регулярного представления буде точно таким же, ибо левое и правое регулярные представления эквивалентны. Для вычисления следа оператора $R(g)$ необходимо выбрать базис в $L_2(G)$ и и вычислить матричные элементы этого оператора в выбранном базисе. Доказанная выше теорема 4.3 позволяет использовать в качестве базиса семейство функций $F_i^j(g, r)$, построенное по некоторому полному набору неприводимых представлений. Базисные функции $F_i^j(g, r)$ нумеруются тремя индексами i, j и r, поэтому матрица оператора $R(g)$ в таком базисе будет задана шестииндексным массивом чисел $R_{qi}^{jp}(r, s)$, который определяется так:

$$R(g) F_i^j(a, r) = \sum_{s=1}^{m} \sum_{q=1}^{n_s} \sum_{p=1}^{n_s} R_{qi}^{jp}(r, s)\, F_p^q(a, s). \tag{4.17}$$

След этой матрицы вычисляется по следующей формуле:

$$\operatorname{tr} R(g) = \sum_{r=1}^{m} \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{n_s} R_{ji}^{ji}(r, r). \tag{4.18}$$

Вычислим левую часть равенства (4.17) непосредственно, исходя из соотношения (1.2) , определяющего оператор $R(g)$:

$$R(g)F_i^j(a,r) = F_i^j(a\,g,r) = \sum_{p=1}^{n_r} F_p^j(a,r)\,F_i^p(g,r). \tag{4.19}$$

Здесь при выводе (4.19) мы воспользовались соотношением $f_r(a\,g) = f_r(a)\circ f_r(g)$, переписав его в матричной форме. Сравнивая (4.19) с (4.17), and (4.19), находим

$$R_{qi}^{jp}(r,s) = \delta_{rs}\delta_q^j\,F_i^p(g,r).$$

Остается подставить это (4.18) и просуммировать:

$$\operatorname{tr} R(g) = \sum_{r=1}^{m} n_r\ \operatorname{tr} f_r(g). \tag{4.20}$$

Сравним (4.20) с (4.16). Вытекающий из такого сравнения результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 4.4. *Каждое неприводимое представление f_r из полного набора $f_1, \ldots, f_m$ неприводимых конечномерных комплексных представлений конечной группы G входит в состав ее правого регулярного представления R с кратностью $k_r = n_r = \dim V_r$, равной размерности представления f_r.*

Точно такое же утверждение имеет место и для левого регулярного представления $(L, G, L_2(G))$ группы G. Теорема 4.4 имеет следующее немедленное следствие, которое вытекает из того, что $\dim L_2(G) = |G|$.

Следствие 4.1. *Порядок конечной группы $N = |G|$ равен сумме квадратов размерностей всех ее попарно не эквивалентных неприводимых конечномерных комплексных представлений: $N = (n_1)^2 + \ldots + (n_m)^2$.*

Этот же результат можно получить, посчитав общее число функций, входящих в соотношения (4.7) и образующих полную ортогональную систему функций в $L_2(G)$.

Рассмотрим семейство характеров $\chi_1, \ldots, \chi_m$ неприводимых представлений, образующих полный набор $f_1, \ldots, f_m$. В силу теоремы 4.2 и соотношения (4.6) они ортогональны, но, вообще говоря, не образуют полную систему функций в $L_2(G)$. Из теоремы 3.1 мы знаем, что эти функции постоянны на классах сопряженных элементов в G. Обозначим через $M_2(G)$ множесгво комплексных числовых функций на группе G, постоянных на классах сопряженных элементов. Ясно, что $M_2(G)$ — линейное подпространство в $L_2(G)$. Оно наследует эрмитовское скалярное произведение (1.1) с $L_2(G)$.

Теорема 4.5. *Семейство характеров $\chi_1, \ldots, \chi_m$ представлений $f_1, \ldots, f_m$ полного набора неприводимых конечномерных комплексных представлении конечной группы G образует полную ортонормированную систему функций (базис) в пространстве $M_2(G) \subseteq L_2(G)$*

В силу теоремы 3.1 все характеры $\chi_1, \ldots, \chi_m$ принадлежат $M_2(G)$. Они ортогональны друг другу и нормированы на единицу. Это вытекает из теоремы 4.2. Остается показать полноту этих функций. Пусть $\varphi(g)$ — некоторый произвольный элемент пространства $M_2(G)$. Тогда φ можно разложить по семейству функций $F^j_i(g, r)$ (см. теорему 4.3:

$$\varphi(g) = \sum_{r=1}^{m} \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{j=1}^{n_r} c^i_j(r)\, F^j_i(g, r). \tag{4.21}$$

Осуществим сопряжение $g \mapsto a\, g\, a^{-1}$ в аргументе функции $\varphi(g)$. От этого ее значение не поменяется, ибо $\varphi(g) \in M_2(G)$. Не поменяется оно и после усреднения по всевозможным сопряжениям элементами группы G:

$$\varphi(g) = \frac{1}{N} \sum_{a \in G} \varphi(a\, g\, a^{-1}). \tag{4.22}$$

Подставим разложение (4.21) в (4.22). Это дает

$$\varphi(g)=\sum_{r=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_r}\sum_{j=1}^{n_r}c_j^i(r)\left(\frac{1}{N}\sum_{a\in G}F_i^j(a\,g\,a^{-1},r)\right). \tag{4.23}$$

Обозначим через $\psi_i^j(g,r)$ выражение, стоящее в круглых скобках в правой части (4.23). Для него получаем

$$\psi_i^j(g,r)=\frac{1}{N}\sum_{a\in G}\sum_{p=1}^{n_r}\sum_{q=1}^{n_r}F_p^j(a,r)\,F_q^p(g,r)\,F_i^q(a^{-1},r).$$

Здесь применена формула $f_r(a\,g\,a^{-1})=f_r(a)\circ f_r(g)\circ f_r(a^{-1})$ переписанная в матричной форме. Воспользуемся унитарностью матриц $F_i^j(a,r)$ и применим соотношение (4.7):

$$\psi_i^j(g,r)=\frac{1}{N}\sum_{a\in G}\sum_{p=1}^{n_r}\sum_{q=1}^{n_r}F_p^j(a,r)\,F_q^p(g,r)\,\overline{F_q^i(a,r)}=$$

$$=\frac{1}{n_r}\sum_{p=1}^{n_r}\sum_{q=1}^{n_r}F_q^p(g,r)\,\delta_i^j\,\delta_p^q.$$

Выполнив суммирования в правой части выведенной формулы, для величин $\psi_i^j(g,r)$ окончательно получим

$$\psi_i^j(g,r)=\frac{1}{n_r}\operatorname{tr}f_r(g)\,\delta_i^j=\frac{1}{n_r}\chi_r(g)\,\delta_i^j.$$

Остается подставить полученное выражение в (4.23). В результате такой подстановки находим

$$\varphi(g)=\sum_{r=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n_r}\frac{c_i^i(r)}{n_r}\right)\chi_r(g). \tag{4.24}$$

Из (4.24) явно видно, что любая функция $\varphi(g)\in M_2(G)$ раскладывается по системе функций $\chi_1,\ \ldots\ ,\ \chi_m$.

Очевидным следствием из только-что доказанной теоремы 4.5 является следующая теорема о числе неприводимых представлений конечной группы в полном наборе.

Теорема 4.6. *Число представлений m в полном наборе $f_1, \ldots, f_m$ неприводимых конечномерных комплексных представлений конечной группы G совпадает с числом классов сопряженных элементов в группе G.*

§ 5. Разложение на неприводимые компоненты.

Пусть G — конечная группа. Теорема 4.6 определяет число m неприводимых представлений в полном наборе $f_1, \ldots, f_m$, а теорема 4.4 указывает способ поиска таких представлений. Действительно, каждое из представлений $f_1, \ldots, f_m$ входит в состав правого регулярного представления $(R, G, L_2(G))$, по меньшей мере, один раз. Дело сводится, таким образом, к построению разложения (4.13) для $\varphi = R$. В случае каждой конкретной конечной группы G это может быть осуществлено методами линейной алгебры.

Предположим, что эта часть работы уже выполнена и полный набор неприводимых унитарных представлений группы G уже построен. Тогда, выбрав ортонормированные базисы в пространствах $V_1, \ldots, V_m$ представлений $f_1, \ldots, f_m$, мы можем считать известными матричные элементы $F_i^j(g, r)$ операторов $f_r(g)$. В этих предположениях мы рассмотрим вопрос о разложении любого заданного представления (φ, G, V) на неприводимые компоненты. Определим операторы

$$P_j^i(r) = \frac{n_r}{N} \sum_{a \in G} \overline{F_i^j(a, r)}\, \varphi(a). \tag{5.1}$$

Число этих операторов совпадает с числом функций $F_i^j(a, r)$, но часть из них может быть равна нулю. Их можно трактовать как коэффициенты Фурье разложения операторнозначной функции по ортогональной системе функций в $L_2(G)$. Следующее соотношение соответствует такой трактовке:

$$\varphi(g) = \sum_{r=1}^{m} \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{j=1}^{n_r} F_i^j(a, r)\, P_j^i(r). \tag{5.2}$$

Оно легко выводится из соотношения ортогональности (4.7). На базе этого же соотношения (4.7) выводится целый ряд других соотношений, которым удовлетворяют операторы (5.1). В первую очередь рассмотрим следующие:

$$\varphi(g)\circ P^i_j(r)=\sum_{q=1}^{n_r}F^q_j(g,r)\,P^i_q(r),\tag{5.3}$$

$$P^i_j(r)\circ\varphi(g)=\sum_{q=1}^{n_r}F^i_q(g,r)\,P^q_j(r).\tag{5.4}$$

Докажем соотношение (5.3) непосредственным вычислением. Для преобразования левой части (5.3) воспользуемся формулой (5.1) для оператора $P^i_j(r)$:

$$\begin{aligned}\varphi(g)\circ P^i_j(r)=\frac{n_r}{N}\sum_{a\in G}\overline{F^j_i(a,r)}\,\varphi(g)\circ\varphi(a)=\\ =\frac{n_r}{N}\sum_{a\in G}\overline{F^j_i(a,r)}\,\varphi(g\,a).\end{aligned}$$

Сделав замену $b=g\,a$ при суммировании по группе, получаем

$$\begin{aligned}\varphi(g)\circ P^i_j(r)=\frac{n_r}{N}\sum_{b\in G}\overline{F^j_i(g^{-1}\,b,r)}\,\varphi(b)=\\ =\frac{n_r}{N}\sum_{b\in G}\sum_{q=1}^{n_r}\overline{F^j_q(g^{-1},r)\,F^q_i(b,r)}\,\varphi(b).\end{aligned}$$

Здесь использовалось соотношение $f_r(g^{-1}\,b)=f_r(g^{-1})\circ f_r(b)$ предварительно записанное в матричной форме. Теперь остается использовать соотношение $f_r(g^{-1})=f_r(g)^{-1}$ и унитарность матриц $F(g,r)$. Это дает

$$\begin{aligned}\varphi(g)\circ P^i_j(r)=\sum_{q=1}^{n_r}F^q_j(g,r)\left(\frac{n_r}{N}\sum_{b\in G}\overline{F^q_i(b,r)}\,\varphi(b)\right)=\\ =\sum_{q=1}^{n_r}F^q_j(g,r)\,P^i_q(r).\end{aligned}$$

Сравнив левую и правую части полученной цепочки равенств, видим что соотношение (5.3) доказано. Доказательство соотношения (5.4) аналогично, поэтому мы его не приводим.

Положим $j = i$ в формулах (5.3) и (5.4) и просуммируем эти равенства по i. При этом двойные суммы, которые возникают в правых частях полученных равенств, совпадают. Поэтому результат можно записать в виде

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n_r} \varphi(g)\circ P_i^i(r) = \sum_{i=1}^{n_r} P_i^i(r)\circ\varphi(g) = \\ = \sum_{i=1}^{n_r}\sum_{j=1}^{n_r} F_i^j(g,r)\,P_j^i(r).\end{aligned} \tag{5.5}$$

Правая часть (5.5) отличается от (5.2) отсутствием суммирования по r. Соединив (5.5) и (5.2), получаем

$$\varphi(g) = \sum_{r=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_r} \varphi(g)\circ P_i^i(r) \sum_{r=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_r} P_i^i(r)\circ\varphi(g). \tag{5.6}$$

Соотношение (5.6) делает естественным рассмотрение новых операторов $P(r)$, определенных по следующей формуле:

$$P(r) = \sum_{i=1}^{n_r} P_i^i(r) = \frac{n_r}{N}\sum_{a\in G}\overline{\operatorname{tr} f_r(a)}\,\varphi(a). \tag{5.7}$$

В обозначениях (5.7) соотношение (5.6) переписывается в виде

$$\varphi(g) = \sum_{r=1}^{m} \varphi(g)\circ P(r) \sum_{r=1}^{m} P(r)\circ\varphi(g). \tag{5.8}$$

Полагая $g = e$ в (5.8), получаем разложение единицы (единичного оператора) по операторам (5.7):

$$1 = \sum_{r=1}^{m} P(r). \tag{5.9}$$

Теорема 5.1. *Операторы $P(r) : V \to V$, $r = 1, \ldots, m$, определенные по формуле (5.7) обладают следующим набором свойств:*

(1) *удовлетворяют соотношению $P(r)^2 = P(r)$, в силу чего при $P(r) \neq 0$ являются проекторами на подпространства $V(r) = \operatorname{Im} P(r)$;*
(2) *перестановочны с операторами представления $\varphi(g)$, в силу чего подпространства $V(r)$ инвариантны относительно $\varphi(g)$;*
(3) *удовлетворяют (5.9) и соотношениям $P(r) \circ P(s) = 0$ при $r \neq s$, в силу чего разложение $V = V(1) \oplus \ldots \oplus V(m)$ есть разложение в прямую сумму инвариантных подпространств.*

Соотношение $P(r)^2 = P(r)$ из первого пункта теоремы и соотношение $P(r) \circ P(s) = 0$ для $r \neq s$ из пункта (3) можно объединить в одно общее соотношение:

$$P(r) \circ P(s) = P(r)\, \delta_{rs} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad r \neq s, \\ P(r) & \text{при} \quad r = s. \end{cases} \tag{5.10}$$

Соотношение (5.10) легко выводится из следующего более общего соотношения для операторов $P^i_j(r)$ определенных согласно формуле (5.1) в начале параграфа:

$$P^i_j(r) \circ P^k_q(s) = \delta_{rs}\, \delta^i_q\, P^k_j(r). \tag{5.11}$$

Доказательство соотношения (5.11) удобно получать непосредственным вычислением. Из формулы (5.1) для произведения операторов, стоящих в левой части (5.11) имеем

$$P^i_j(r) \circ P^k_q(s) = \frac{n_r\, n_s}{N^2} \sum_{a \in G} \sum_{b \in G} \overline{F^j_i(a, r)\, F^q_k(b, s)}\, \varphi(a\, b).$$

Положим $c = a\,b$ и выберем c в качестве нового параметра при суммировании по группе G взамен b. Это дает

$$P^i_j(r)\circ P^k_q(s) = \frac{n_r\,n_s}{N^2}\sum_{a\in G}\sum_{c\in G}\overline{F^j_i(a,r)\,F^q_k(a^{-1}\,c,s)}\,\varphi(c) =$$

$$= \frac{n_r\,n_s}{N^2}\sum_{a\in G}\sum_{c\in G}\overline{F^j_i(a,r)}\sum_{p=1}^{n_s}\overline{F^q_p(a^{-1},s)\,F^p_k(c,s)}\,\varphi(c).$$

Дальнейшие преобразования используют унитарность $F(a,s)$:

$$P^i_j(r)\circ P^k_q(s) = \sum_{p=1}^{n_s}\sum_{a\in G}\frac{n_r\,\overline{F^j_i(a,r)}\,F^p_q(a,s)}{N}\sum_{c\in G}\frac{n_s\,\overline{F^p_k(c,s)}\,\varphi(c)}{N}.$$

После чего применяем соотношение ортогональности (4.7) и соотношение (5.1):

$$P^i_j(r)\circ P^k_q(s) = \sum_{p=1}^{n_s}\delta_{rs}\,\delta^p_j\,\delta^i_q\,P^k_p(s) = \delta_{rs}\,\delta^i_q\,P^k_j(r).$$

Сравнивая левую и правую части полученного равенства, убеждаемся в том, что формула (5.11) доказана. Значит доказано и соотношение (5.10).

Соотношение $P(r)^2 = P(r)$, вытекающее из (5.10), в случае ненулевого оператора $P(r)\neq 0$ означает, что $P(r)$ есть оператор проектирования. Он проектирует пространство V на подпространство $V(r) = \operatorname{Im} P(r)$ параллельно подпространству $\operatorname{Ker} P(r)$ (подробнее о проекторах см. [1]). Соотношение

$$P(r)\circ P(s) = 0 = P(s)\circ P(r) \quad \text{для} \quad r\neq s \tag{5.12}$$

означает, что проекторы $P(1),\,\ldots\,,\,P(m)$ перестановочны и $\operatorname{Im} P(r)\subseteq \operatorname{Ker} P(s)$ при $r\neq s$. В силу (5.12) и (5.9) семейство проекторов $P(1), \ldots, P(m)$ является согласованным и полным. Оно определяет разбиение пространства V в прямую сумму подпространств:

$$V = V(1) \oplus \ldots \oplus V(m) = \bigoplus_{r=1}^{m} V(r). \tag{5.13}$$

Пункт (2) теоремы 5.1, утверждающий перестановочность операторов $P(r)$ and $\varphi(g)$, вытекает непосредственно из (5.5). В силу этого, все подпространства в (5.13) являются инвариантными подпространствами представления (φ, G, V).

Матричные элементы $F_i^j(a, r)$ операторов $f_r(a)$ зависят от выбора базисов в пространствах соответствующих представлений. Операторы $P_j^i(r)$, вычисляемые по формуле (5.1), также зависят от выбора этих базисов. Однако, операторы $P(r)$ уже не зависят от этого, ибо следы операторов $f_r(a)$ в формуле (5.7) являются их скалярными инвариантами. В силу сказанного разложение (5.13) также инвариантно и определяется только самой группой G и ее представлением φ. Найдем связь разложений (5.13) и (4.14).

Теорема 5.2. *Сужение представления φ на инвариантное подпространство $V(r) = \operatorname{Im} P(r)$ изоморфно неприводимому представлению f_r, взятому с кратностью k_r, где k_r — один из коэффициентов в разложении* (4.14).

Для доказательства теоремы 5.2 воспользуемся следующим соотношением, левая часть которого совпадает с оператором $P(r)$ для представления $\varphi = f_s$ (см. формулу (5.7)):

$$\frac{n_r}{N} \sum_{a \in G} \sum_{i=1}^{n_r} \overline{F_i^i(a, r)}\, f_s(a) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad s \neq r, \\ 1 & \text{for} \quad s = r. \end{cases} \tag{5.14}$$

Для того, чтобы убедиться в справедливости (5.14) достаточно перейти от операторов $f_s(a)$ к их матрицам $F(a, s)$ и воспользоваться соотношением ортогональности (4.7).

Теперь рассмотрим разложение (4.13). В соответствии с (4.13) пространство V есть прямая сумма неприводимых подпространств $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_\nu$, причем сужение представления φ на каждое такое подпространство изоморфно некоторому неприводимому представлению из полного списка $f_1, \ldots, f_r$:

$$\varphi\Big|_{V_q} \cong f_{r(q)}. \tag{5.15}$$

Подставив (5.15) в формулу (5.7) и учитывая (5.14), находим, что $V(r)$ есть сумма тех подпространств V_q в разложении $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_\nu$, для которых $r(q) = r$. Число таких подпространств равно k_r, а сужение φ на каждое из них изоморфно f_r. Теорема 5.2 доказана.

Согласно теореме 5.2 операторы $P(r)$ дают конструктивный способ построения разложения (4.14). А само такое разложение определено однозначно с точностью до перестановки слагаемых.

Рассмотрим отдельное подпространство $V(r)$, отвечающее компоненте $k_r\, f_r$ в разложении (4.14). В случае $k_r = 0$ подпространство $V(r) = \{0\}$ тривиально. В случае $k_r = 1$ подпространство $V(r)$ неприводимо, оно не требует дальнейшего разложения. Остается случай $k_r > 1$, который требует отдельного рассмотрения. В этом случае подпространство $V(r)$ раскладывается в сумму неприводимых подпространств

$$V(r) = \bigoplus_{q=1}^{k_r} W_q, \quad \text{где} \quad \dim W_q = n_r. \tag{5.16}$$

В отличие от разложения (5.13), разложение (5.16) не является однозначно определенным. Один из способов построения такого разложения связан с использованием операторов $P_i^i(r)$, сумма которых дает $P(r)$ в соответствии с формулой (5.7). Из (5.11) для этих операторов имеем

$$P_i^i(r)^2 = P_i^i(r), \qquad P_i^i(r) \circ P_j^j(r) = 0 \ \text{ при } \ i \neq j. \tag{5.17}$$

Суммирования по i и j в этих формулах нет. Из (5.17) видим, что операторы $P_i^i(r)$, $i = 1, \ldots, n_r$ также образуют полное согласованное семейство проекторов. Они определяют разложение $V(r)$ в прямую сумму более мелких подпространств:

$$V(r) = \bigoplus_{i=1}^{n_r} V_i(r). \tag{5.18}$$

Операторы проектирования $P_i^i(r)$ не коммутируют с $\varphi(g)$. Поэтому подпространства $V_i(i) = \operatorname{Im} P_i^i(r)$ в полученном разложении (5.18) не являются инвариантными для представления φ. Указанную трудность можно преодолеть. Для этого воспользуемся следующими соотношениями, которые легко выводятся из (5.11):

$$P_k^k(r) \circ P_k^i(r) = P_k^i(r), \qquad P_k^i(r) \circ P_i^i(r) = P_k^i(r), \tag{5.19}$$

$$P_i^k(r) \circ P_k^i(r) = P_i^i(r), \qquad P_k^i(r) \circ P_i^k(r) = P_k^k(r). \tag{5.20}$$

Теорема 5.3. *При $i \neq k$ оператор $P_k^i(r)$ осуществляет биективное отображение из $V_i(r)$ в $V_k(r)$.*

Доказательство теоремы 5.3 основано на формулах (5.19) и (5.20). Действительно, пусть $\mathbf{v} \in V_i(r)$ и пусть $\mathbf{u} = P_k^i(r)\mathbf{v}$. Тогда из первого соотношения (5.19) имеем $P_k^k\mathbf{u} = \mathbf{u}$. Следовательно, $\mathbf{u} \in V_k(r)$, т. е. $P_k^i(r)$ отображает $V_i(r)$ в $V_k(r)$. Отображение $P_k^i(r)\colon V_i(r) \to V_k(r)$ биективно, ибо оно обратимо. Согласно (5.20) обратным к нему является отображение $P_i^k(r)\colon V_k(r) \to V_i(r)$.

Немедленным следствием доказанной теоремы 5.3 является совпадение размерностей $\dim V_i(r) = \dim V_k(r)$. Тогда из разложений (5.16) и (5.18) имеем

$$\dim V(r) = k_r\, n_r, \qquad \dim V(r) = n_r \dim V_i(r).$$

Сравнивая эти формулы для размерности $V(r)$, находим

$$\dim V_i(r) = k_r, \quad i = 1, \ldots, n_r.$$

Пространства $V_1, \ldots, V_{n_r}$ связаны отображениями $P^i_k(r)$. Нетрудно проверить, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} & V_j(r) \arrow[dr, bend left, "P^j_k(r)"] & \\ V_i(r) \arrow[ur, bend left, "P^i_j(r)"] \arrow[rr, bend right, "P^i_k(r)"'] & & V_k(r) \end{tikzcd} \tag{5.21}$$

Это вытекает из соотношения $P^j_k(r) \circ P^i_j(r) = P^i_k(r)$, которое выводится из (5.11). Выберем базис $\mathbf{e}^1_1(r), \ldots, \mathbf{e}^1_{k_r}(r)$ в пространстве $V_1(r)$ и перенесем его в пространство $V_(r)$ при помощи отображения $P^1_i(r)$:

$$\mathbf{e}^i_1(r) = P^1_i(r)\mathbf{e}^1_1(r), \ \ldots, \ \mathbf{e}^i_{k_r}(r) = P^1_i(r)\mathbf{e}^1_{k_r}(r).$$

В силу коммутативности диаграммы (5.21) получаем

$$P^i_k \mathbf{e}^i_s(r) = \mathbf{e}^k_s(r), \quad s = 1, \ldots, k_r. \tag{5.22}$$

Вся совокупность векторов $\mathbf{e}^i_s(r)$, $i = 1, \ldots, n_r$, $s = 1, \ldots, k_r$ линейно независима, ибо сумма подпространств в (5.18) прямая. Рассмотрим новые подпространства, определив их как линейные оболочки следующих систем векторов:

$$U_s(r) = \langle \mathbf{e}^1_s(r), \ldots, \mathbf{e}^{n_r}_s(r) \rangle, \quad s = 1, \ldots, k_r. \tag{5.23}$$

В силу (5.22) каждое из подпространств (5.23) инвариантно относительно действия операторов $P^k_i(r)$. Но имеет место и более сильное утверждение.

Теорема 5.4. *Пространство $U_s(r)$ из (5.23) является инвариантным подпространством представления (φ, G, V), причем $U_s(r)$ неприводимо и сужение φ на $U_s(r)$ изоморфно f_r.*

Для доказательства инвариантности $U_s(r)$ относительно φ воспользуемся соотношением (5.3), которое мы доказали в самом начале параграфа. С его помощью выводим

$$\begin{gathered}\varphi(g)\mathbf{e}_s^i(r) = \varphi(g)P_i^1(r)\mathbf{e}_s^1(r) = \\ = \sum_{q=1}^{n_r} F_i^q(g,r)\,P_q^1(r)\mathbf{e}_s^1(r) = \sum_{q=1}^{n_r} F_i^q(g,r)\mathbf{e}_s^q(r).\end{gathered} \tag{5.24}$$

Выписанное соотношение (5.24) не только доказывает инвариантность $U_s(r)$ относительно операторов $\varphi(g)$. Из него видим, что матрица оператора $\varphi(g)$ в базисе $\mathbf{e}_s^1(r), \ldots, \mathbf{e}_s^{n_r}(r)$ совпадает с матрицей оператора $f_r(g)$. Второе утверждение теоремы 5.4 также доказано.

В итоге мы указали конструктивный способ построения разложения пространства V:

$$V = \bigoplus_{r=1}^{m}\bigoplus_{s=1}^{k_r} U_s(r),$$

соответствующего разложению (4.14) представления $\varphi(g)$ на неприводимые компоненты.

КОНТАКТНАЯ ИНФОРМАЦИЯ.

Адркс:

Руслан Шарипов,
Математический факультет
БашГосУниверситета,
ул. Фрунзе 32,
450074 Уфа, Россия

Домашний адрес:

Руслан Шарипов,
ул. Рабочая, дом 5,
450003 Уфа, Россия

Телефоон:

+7-(347)-273-67-18 (рабочий)
+7-(917)-476-93-48 (сотовый)

Электронная почта:

r-sharipov@mail.ru
R_Sharipov@ic.bashedu.ru

Интернет-сайты:

http://www.geocities.com/r-sharipov
http://www.freetextbooks.boom.ru
http://sovlit2.narod.ru

ПРИЛОЖЕНИЕ.

Список публикаций автора за период с 1986-го по 2006-ой годы.

Часть 1. Теория солитонов.

1. Шарипов Р. А., *Конечнозонные аналоги N-мультиплетных решений уравнения КдФ*, Успехи Мат. Наук **41** (1986), № 5, 203–204.
2. Шарипов Р. А., *Солитонные мультиплеты уравнения Кортевега-де Фриза*, Доклады АН СССР **292** (1987), № 6, 1356–1359.
3. Шарипов Р. А., *Мультиплетные решения уравнения Кадомцева-Петвиашвили на конечнозонном фоне*, Успехи Мат. Наук **42** (1987), № 5, 221–222.
4. Bikbaev R. F. & Sharipov R. A., *Magnetization waves in Landau-Lifshits model*, Physics Letters A **134** (1988), № 2, 105-108; see solv-int/9905008.
5. Бикбаев Р. Ф. & Шарипов Р. А., *Асимптотика при $t \to \infty$ решения задачи Коши для уравнения Кортевега-де Фриза в классе потенциалов с конечнозонным поведением при $x \to \pm\infty$*, ТМФ **78** (1989), № 3, 345–356.
6. Шарипов Р. А., *Об интегрировании цепочек Богоявленского*, Мат. заметки **47** (1990), № 1, 157–160.
7. Черданцев И. Ю. & Шарипов Р. А., *Конечнозонные решения уравнения Булло-Додда-Жибера-Шабата*, ТМФ **82** (1990), № 1, 155–160.
8. Cherdantsev I. Yu. & Sharipov R. A., *Solitons on a finite-gap background in Bullough-Dodd-Jiber-Shabat model*, International. Journ. of Modern Physics A **5** (1990), № 5, 3021–3027; see math-ph/0112045.
9. Sharipov R. A. & Yamilov R. I., *Backlund transformations and the construction of the integrable boundary value problem for the equation $u_{xt} = e^u - e^{-2u}$*, «Задачи математической физики и асимптотика их решений», Институт Математики БНЦ УрО АН СССР, Уфа, 1991, Стр. 66–77; см. solv-int/9412001.

10. Шарипов Р. А., *Минимальные торы в пятимерной сфере в* $\mathbb{C}^3$, ТМФ **87** (1991), № 1, 48–56; см. math.DG/0204253.
11. Сафин С. С. & Шарипов Р. А., *Автопреобразование Бэклунда для уравнения* $u_{xt} = e^u - e^{-2u}$, ТМФ **95** (1993), № 1, 146–159.
12. Boldin A. Yu. & Safin S. S. & Sharipov R. A., *On an old paper of Tzitzeika and the inverse scattering method*, Journal of Mathematical Physics **34** (1993), № 12, 5801–5809.
13. Павлов М. В. & Свинолупов С. И. & Шарипов Р. А., *Инвариантный критерий интегрируемости для систем уравнений гидродинамического типа*, «Интегрируемость в динамических системах», Институт Математики УрО РАН, Уфа, 1994, Стр. 27–48; см. Функц. Анализ и Прил. **30** (1996), № 1, 18–29; см. также solv-int/9407003.
14. Ферапонтов Е. В. & Шарипов Р. А., *О законах сохранения первого порядка для систем уравнений гидродинамического типа*, ТМФ **108** (1996), № 1, 109–128.

Часть 2. Геометрия нормального сдвига.

1. Болдин А. Ю. & Шарипов Р. А., *Динамические системы, допускающие нормальный сдвиг*, ТМФ **97** (1993), № 3, 386–395; см. chao-dyn/9403003.
2. Болдин А. Ю. & Шарипов Р. А., *Динамические системы, допускающие нормальный сдвиг*, Доклады РАН **334** (1994), № 2, 165–167.
3. Болдин А. Ю. & Шарипов Р. А., *Многомерные динамические системы, допускающие нормальный сдвиг*, ТМФ **100** (1994), № 2, 264–269; см. patt-sol/9404001.
4. Шарипов Р. А., *Проблема метризуемости для динамических систем, допускающих нормальный сдвиг*, ТМФ **101** (1994), № 1, 85–93; см. solv-int/9404003.
5. Шарипов Р. А., *Динамические системы, допускающие нормальный сдвиг*, Успехи Мат. Наук **49** (1994), № 4, 105; см. solv-int/9404002.
6. Boldin A. Yu. & Dmitrieva V. V. & Safin S. S. & Sharipov R. A., *Dynamical systems accepting the normal shift on an arbitrary Riemannian manifold*, «Dynamical systems accepting the normal shift», Bashkir State University, Ufa, 1994, pp. 4–19; см. также ТМФ **103** (1995), № 2, 256–266 и hep-th/9405021.
7. Boldin A. Yu. & Bronnikov A. A. & Dmitrieva V. V. & Sharipov R. A., *Complete normality conditions for the dynamical systems on Riemannian manifolds*, «Dynamical systems accepting the normal shift», Bashkir State University, 1994, pp. 20–30; см. также ТМФ **103** (1995), № 2, 267–275 и astro-ph/9405049.
8. Sharipov R. A., *Higher dynamical systems accepting the normal shift*,

«Dynamical systems accepting the normal shift», Bashkir State University, 1994, pp. 41–65.

9. Bronnikov A. A. & Sharipov R. A., *Axially symmetric dynamical systems accepting the normal shift in* $\mathbb{R}^n$, «Интегрируемость в динамических системах», Институт Математики УрО РАН, Уфа, 1994, Стр. 62–69.
10. Sharipov R. A., *Metrizability by means of a conformally equivalent metric for the dynamical systems*, «Интегрируемость в динамических системах», Институт Математики УрО РАН, Уфа, 1994, Стр. 80–90; см. также ТМФ **103** (1995), № 2, 276–282.
11. Болдин А. Ю. & Шарипов Р. А., *О решении уравнений нормальности в размерности* $n \geqslant 3$, Алгебра и анализ **10** (1998), № 4, 31–61; см. также solve-int/9610006.
12. Шарипов Р. А., *Динамические системы, допускающие нормальный сдвиг,* Диссертация на соискание ученой степени доктора наук[1] в России, math.DG/0002202, Electronic archive http://arXiv.org, 2000, pp. 1–219.
13. Шарипов Р. А., *Ньютоновский нормальный сдвиг в многомерной римановой геометрии*, Мат. Сборник **192** (2001), № 6, 105–144; см. также math.DG /0006125.
14. Шарипов Р. А., *Ньютоновские динамические системы, допускающие нормальное раздутие точек*, Зап. семинаров ПОМИ **280** (2001), 278–298; см. также math.DG/0008081.
15. Sharipov R. A., *On the solutions of the weak normality equations in multidimensional case*, math.DG/0012110 in Electronic archive http://arxiv.org (2000), 1–16.
16. Sharipov R. A., *First problem of globalization in the theory of dynamical systems admitting the normal shift of hypersurfaces*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences **30** (2002), № 9, 541–557; see also math.DG/0101150.
17. Sharipov R. A., *Second problem of globalization in the theory of dynamical systems admitting the normal shift of hypersurfaces*, math.DG /0102141 in Electronic archive http://arXiv.org (2001), 1–21.
18. Sharipov R. A., *A note on Newtonian, Lagrangian, and Hamiltonian dynamical systems in Riemannian manifolds*, math.DG/0107212 in Electronic archive http://arXiv.org (2001), 1–21.
19. Шарипов Р. А., *Динамические системы, допускающие нормальный сдвиг, и волновые уравнения*, ТМФ **131** (2002), № 2, 244–260; см. также math.DG/0108158.

[1] Текст диссертации был готов к сентябрю 1999-го года. Однако, на настоящий момент — декабрь 2006-го года она не только не защищена, но и не принята к защите. Причины оставляю без комментариев.

20. Sharipov R. A., *Normal shift in general Lagrangian dynamics*, math.DG/0112089 in Electronic archive http://arXiv.org (2001), 1–27.
21. Sharipov R. A, *Comparative analysis for a pair of dynamical systems one of which is Lagrangian*, math.DG/0204161 in Electronic archive http://arxiv.org (2002), 1–40.
22. Sharipov R. A., *On the concept of a normal shift in non-metric geometry*, math.DG/0208029 in Electronic archive http://arXiv.org (2002), 1–47.
23. Sharipov R. A., *V-representation for the normality equations in geometry of generalized Legendre transformation*, math.DG/0210216 in Electronic archive http://arXiv.org (2002), 1–32.
24. Sharipov R. A., *On a subset of the normality equations describing a generalized Legendre transformation*, math.DG/0212059 in Electronic archive (2002), 1–19.

Часть 3. Фкнкции многих комплексных переменных.

1. Sharipov R. A. & Sukhov A. B. On CR-mappings between algebraic Cauchy-Riemann manifolds and the separate algebraicity for holomorphic functions, Trans. of American Math. Society **348** (1996), № 2, 767–780; см. также Доклады РАН **350** (1996), № 4, 453–454.
2. Sharipov R. A. & Tsyganov E. N. On the separate algebraicity along families of algebraic curves, *Preprint of Baskir State University*, Ufa, 1996, pp. 1-7; см. также Мат. Заметки **68** (2000), № 2, 294–302.

Часть 4. Симметрии и инварианты.

1. Dmitrieva V. V. & Sharipov R. A., *On the point transformations for the second order differential equations*, solv-int/9703003 in Electronic archive http://arXiv.org (1997), 1–14.
2. Sharipov R. A., *On the point transformations for the equation $y'' = P+3\,Q\,y'+3\,R\,{y'}^2+S\,{y'}^3$*, solv-int/9706003 in Electronic archive http://arxiv.org (1997), 1–35; см. также Вестник БашГУ **1(I)** (1998), 5–8.
3. Михайлов О. Н. & Шарипов Р. А., *О точечном расширении одного класса дифференциальных уравнений второго порядка*, Дифф. уравнения **36** (2000), № 10, 1331–1335; см. также solv-int/9712001.
4. Sharipov R. A., *Effective procedure of point-classification for the equation $y'' = P+3\,Q\,y'+3\,R\,{y'}^2+S\,{y'}^3$*, math.DG/9802027 in Electronic archive http://arXiv.org (1998), 1–35.
5. Дмитриева В. В. & Гладков А. В. & Шарипов Р. А., *О некоторых уравнениях, сводящихся к уравнениям диффузионного типа*, ТМФ **123** (2000), № 1, 26–37; см. также math.AP/9904080.
6. Dmitrieva V. V. & Neufeld E. G. & Sharipov R. A. & Tsaregorodtsev A. A., *On a point symmetry analysis for generalized diffusion type*

equations, math.AP/9907130 in Electronic archive http://arXiv.org (1999), 1–52.

Часть 5. Общая алгебра.

1. Sharipov R. A, *Orthogonal matrices with rational components in composing tests for High School students*, math.GM/0006230 in Electronic archive http://arXiv.org (2000), 1–10.
2. Sharipov R. A., *On the rational extension of Heisenberg algebra*, math. RA/0009194 in Electronic archive http://arXiv.org (2000), 1–12.
3. Sharipov R. A, *An algorithm for generating orthogonal matrices with rational elements*, cs.MS/0201007 in Electronic archive http://arXiv.org (2002), 1–7.

Часть 6. Физика твердого тела.

1. Lyuksyutov S. F. & Sharipov R. A., *Note on kinematics, dynamics, and thermodynamics of plastic glassy media*, cond-mat/0304190 in Electronic archive http://arXiv.org (2003), 1–19.
2. Lyuksyutov S. F. & Sharipov R. A. & Sigalov G. & Paramonov P. B., *Exact analytical solution for electrostatic field produced by biased atomic force microscope tip dwelling above dielectric-conductor bilayer*, cond-mat/0408247 in Electronic archive http://arXiv.org (2004), 1–6.
3. Lyuksyutov S. F. & Sharipov R. A., *Separation of plastic deformations in polymers based on elements of general nonlinear theory*, cond-mat /0408433 in Electronic archive http://arXiv.org (2004), 1–4.
4. Comer J. & Sharipov R. A., *A note on the kinematics of dislocations in crystals*, math-ph/0410006 in Electronic archive http://arXiv.org (2004), 1–15.
5. Sharipov R. A., *Gauge or not gauge?* cond-mat/0410552 in Electronic archive http://arXiv.org (2004), 1–12.
6. Sharipov R. A., *Burgers space versus real space in the nonlinear theory of dislocations*, cond-mat/0411148 in Electronic archive http://arXiv.org (2004), 1–10.
7. Comer J. & Sharipov R. A., *On the geometry of a dislocated medium*, math-ph/0502007 in Electronic archive http://arXiv.org (2005), 1–17.
8. Sharipov R. A., *A note on the dynamics and thermodynamics of dislocated crystals*, cond-mat/0504180 in Electronic archive http://arXiv.org (2005), 1–18.
9. Lyuksyutov S. F. & Paramonov P. B. & Sharipov R. A. & Sigalov G., *Induced nanoscale deformations in polymers using atomic force microscopy*, Phys. Rev. B **70** (2004), № 174110.

Часть 7. Тензорный анализ.

1. Sharipov R. A., *Tensor functions of tensors and the concept of extended tensor fields*, math/0503332 in Electronic archive http://arXiv.org (2005), 1–43.
2. Sharipov R. A., *Spinor functions of spinors and the concept of extended spinor fields*, math.DG/0511350 in Electronic archive http://arXiv.org (2005), 1–56.
3. Sharipov R. A., *Commutation relationships and curvature spin-tensors for extended spinor connections*, math.DG/0512396 in Electronic archive http://arXiv.org (2005), 1-22.

Часть 8. Частицы и поля.

1. Sharipov R. A., *A note on Dirac spinors in a non-flat space-time of general relativity*, math.DG/0601262 in Electronic archive http://arXiv.org (2006), 1–22.
2. Sharipov R. A., *A note on metric connections for chiral and Dirac spinors*, math.DG/0602359 in Electronic archive http://arXiv.org (2006), 1–40.
3. Sharipov R. A., *On the Dirac equation in a gravitation field and the secondary quantization*, math.DG/0603367 in Electronic archive http://arxiv.org (2006), 1–10.
4. Sharipov R. A., *The electro-weak and color bundles for the Standard Model in a gravitation field*, math.DG/0603611 in Electronic archive http://arXiv.org (2006), 1–8.
5. Sharipov R. A., *A note on connections of the Standard Model in a gravitation field*, math.DG/0604145 in Electronic archive http://arXiv.org (2006), 1–11.
6. Sharipov R. A., *A note on the Standard Model in a gravitation field*, math.DG/0605709 in Electronic archive http://arXiv.org (2006), 1–36.

Часть 9. Учебники.

1. Шарипов Р. А., *Теория представлений конечных групп*, БашНИИ-Строй, Уфа, 1995; см. также math.HO/0612104.
2. Шарипов Р. А., *Курс линейной алгебры и многомерной геометрии*, БашГУ, Уфа, 1996; см. также math.HO/0405323.
3. Шарипов Р. А., *Курс дифференциальной геометрии*, БашГУ, Уфа, 1996; см. также math.HO/0412421.
4. Шарипов Р. А., *Классическая электродинамика и теория относительности*, БашГУ, Уфа, 1996; см. также physics/0311011.
5. Шарипов Р. А., *Основания геометрии для студентов и школьников*, БашГУ, Уфа, 1998.

6. Шарипов Р. А., *Быстрое введение в тензорный анализ*, бесплатный on-line учебник, 2004; см. также math.HO/0403252.