

Marcelo Aguilar
Octavio Alberto Agustín Aquino

Notas de Topología Algebraica

SUNEO
México

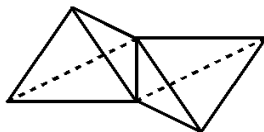
Prefacio

En el siglo XVIII, Euler observó que la siguiente fórmula

$$\chi = v - a + c,$$

donde v es el número de vértices, a es el número de aristas y c es el número de caras, es invariante para cierta clase de poliedros. Por ejemplo, el tetraedro tiene cuatro vértices, seis aristas y cuatro caras, por lo que $\chi = 2$. Puede verse que para un cubo o un octaedro, se obtiene el mismo resultado.

Para el poliedro siguiente, sin embargo



tenemos que $\chi = v - a + c = 6 - 11 + 8 = 3$, lo que quizá indique que este número permite distinguir entre espacios topológicos simples.

En este curso se estudiarán objetos formados por bloques sencillos llamados simplejos, y se tomará la suma alternada del número de n -simplejos y probaremos que se preserva para espacios topológicos homeomorfos. La estrategia será construir un invariante topológico que sea igual a esta suma.

Índice general

1. Introducción homotópica	1
1.1. Lazos y homotopía	1
1.2. El grupo fundamental	2
1.3. Grupos de homotopía de órdenes superiores	3
1.4. Propiedades funtoriales	5
2. Bordismo	11
2.1. Los grupos de bordismo	12
2.2. Bordismo orientado	15
3. Homología simplicial	17
3.1. Generalidades	17
3.2. Homología simplicial	23
3.3. Homología de Čech	28
4. Homología singular	31
4.1. Complejos singulares	31
4.2. Homología singular	33
4.3. Cadenas afines	48
4.4. Escisión	52
5. Complejos CW	73
5.1. Primeras definiciones	73
5.2. Los espacios proyectivos reales y complejos	75
5.3. El teorema de Jordan-Brouwer	83
5.4. Otra descripción de $S^1 \times S^1$	89
5.5. Característica de Euler	91
Bibliografía	97

Introducción homotópica

1.1. Lazos y homotopía

Definición 1.1. Sea X un espacio topológico con un punto distinguido x_0 (que llamaremos punto base). Un lazo basado en x_0 es una función continua $\alpha : I := [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\alpha(0) = x_0$ y $\alpha(1) = x_0$.

Escolio 1.2. Obsérvese que la función $c_{x_0}(y) = x_0$ para todo $y \in [0, 1]$ es un lazo, llamado lazo trivial.

Algo que será importante para definir invariantes topológicos es que un lazo pueda “deformarse” en otro. Tentativamente, podemos definir lo siguiente: sean α y β lazos en X . Decimos que α se puede deformar a β (o que α es homótopo a β) si existe una familia de $\{H_t\}_{t \in I}$ de funciones de I en X tales que $H_0 = \alpha$ y $H_1 = \beta$.

El problema con lo anterior es que existe la posibilidad de que se “rompa” un lazo y que así rodee “hoyos” en el espacio topológico de manera ilícita. Sería bueno topologizar esta familia de tal suerte que sea continua, evitando así situaciones de esta naturaleza. Sin embargo, eso es algo complicado, así que procederemos de un modo algo más sencillo.

Definición 1.3. Sean α y β basados en el punto x_0 . A la función continua

$$H : I \times I \rightarrow X \\ (s, t) \mapsto H_t(s);$$

tal que

1. cada H_t es un lazo basado en x_0 ,
2. se satisface que $H(s, 0) = \alpha(s)$ y $H(s, 1) = \beta(s)$,

la denominaremos una homotopía entre α y β . Cuando existe una homotopía entre los lazos α y β , decimos que los lazos son homótopos.

Ejercicio 1.4. Demostrar que la relación de homotopía en

$$\Omega(X, x_0) = \{\alpha : I \rightarrow X : \alpha \text{ es continua, } \alpha(0) = \alpha(1) = x_0\},$$

es de equivalencia.

Lema 1.5. Sea $f : X \rightarrow Y$, y supongamos que $X = \cup_{i=1}^n X_i$, donde cada X_i es cerrado. Si $f|_{X_i}$ es continua, entonces f es continua.

Demostración. Sea V cerrado en Y . Entonces

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) &= X \cap f^{-1}(V) = (\cup_{i=1}^n X_i) \cap f^{-1}(V) \\ &= \cup_{i=1}^n (X_i \cap f^{-1}(V)) = \cup_{i=1}^n (X_i \cap f_i^{-1}(V)) \end{aligned}$$

y cada $f_i^{-1}(V)$ es cerrado en X_i . Por ser X_i cerrado, $X_i \cap f_i^{-1}(V)$ es cerrado en X . Vemos que $f^{-1}(V)$ es la unión finita de cerrados, por lo cual es cerrado. En consecuencia, f es continua en X .

Solución 1.6. Denotemos por \sim a la relación de homotopía.

1. Todo lazo $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ está relacionado consigo mismo. En efecto,

$$\forall t \in I, H(s, t) = \alpha(s)$$

es una homotopía entre α y α . Luego $\alpha \sim \alpha$.

2. Si $\alpha \sim \beta$, existe una homotopía H tal que $H(s, 0) = \alpha(s)$ y $H(s, 1) = \beta(s)$. Definiendo $H'(s, t) = H(s, 1 - t)$, tenemos que H' es una homotopía tal que $H'(s, 0) = H(s, 1) = \beta$ y $H'(s, 1) = H(s, 0) = \alpha$. Luego $\beta \sim \alpha$.
3. Si $\alpha \sim \beta$ y $\beta \sim \gamma$, entonces $\alpha \sim \gamma$. Por supuesto, si H_1 es una homotopía entre α y β y H_2 es una homotopía entre β y γ , entonces

$$H_3(s, t) = \begin{cases} H_1(s, 2t), & t \in [0, 1/2], \\ H_2(s, 2t - 1), & t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Por el Lema 1.5, es una homotopía tal que $H_3(s, 0) = \alpha$ y $H_3(s, 1) = \gamma$.

Por lo anterior, \sim es una relación de equivalencia.

Al conjunto de las clases de equivalencia $\Omega(X, x_0)/\sim$ lo denotaremos como $\pi_1(X, x_0)$.

1.2. El grupo fundamental

Vamos a dotar a $\pi_1(X, x_0)$ de una operación que lo convierta en un grupo. Para este efecto, definimos $\alpha * \beta \in \Omega(X, x_0)$ a través de

$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \beta(2t - 1), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Ahora, dado $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ definimos $\bar{\alpha}(s) = \alpha(1 - s)$.

Designemos como $[\alpha]$ a la clase de homotopía de $\alpha \in \Omega(X, x_0)/\sim$, y definamos

$$[\alpha][\beta] = [\alpha * \beta].$$

y obsérvese que el neutro de esta operación es $[c_{x_0}]$. Además $[\alpha]^{-1} = [\bar{\alpha}]$. Se puede verificar que ésta operación en $\pi_1(X, x_0)$ lo hace, efectivamente, un grupo. No necesariamente es abeliano. Peor aún, no parece fácil calcularlos de manera efectiva (de hecho, no lo es).

1.3. Grupos de homotopía de órdenes superiores

En 1935, Witold Hurewicz generalizó el grupo fundamental a órdenes mayores a 1. Veamos cuál es la idea.

El q -cubo es el conjunto I^q . Su frontera, ∂I^q , es el conjunto de todas las q -tuplas para las cuales al menos una de las componentes s_j es 0 o 1.

Un q -cubo basado en x_0 en X es una función continua $\alpha : I^q \rightarrow X$ tal que $\alpha(x) = b$ para toda $s \in \partial I^q$. Dos q -cubos α y β basados en x_0 se dicen homótopos si existe una función continua $H : I^q \times I \rightarrow X$ tal que $H(s, 0) = \alpha(s)$, $H(s, 1) = \beta(s)$ y $H(s, t) = x_0$ para todo $s \in \partial I^q$ y todo $t \in I$. Nuevamente la relación de homotopía es de equivalencia. A la clase de todos q -los cubos basados en x_0 homótopos a α es la clase de homotopía de α , y la denotaremos como $[\alpha]$. La colección de tales clases de homotopía se denota como $\pi_q(X, x_0)$.

Otra vez, queremos darle estructura de grupo a $\pi_n(X, x_0)$. Para este propósito, definimos el producto de q -cubos α y β como

$$\alpha * \beta(s_1, \dots, s_q) = \begin{cases} \alpha(2s_1, \dots, s_q), & s_1 \in [0, \frac{1}{2}], \\ \beta(2s_1 - 1, \dots, s_q), & s_1 \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Claramente, $\alpha * \beta$ es nuevamente un q -cubo. También definimos para el q -cubo α el cubo

$$\bar{\alpha}(s_1, \dots, s_n) = \alpha(1 - s_1, \dots, s_n).$$

Así, $\pi_q(X, x_0)$ es un grupo con $[\bar{\alpha}] = [\alpha]^{-1}$. Los grupos que hemos obtenido tienen una propiedad que no tiene el grupo fundamental.

Teorema 1.7. *El grupo $\pi_q(X, x_0)$ es abeliano para $q \geq 2$.*

El grupo $\pi_q(X, x_0)$ puede verse también como el grupo de clases homotopía de mapeos α de la q -esfera S^q en X que satisfacen $\alpha(y) = x_0$ para algún punto fijo (digamos, el polo norte) de la q -esfera. En virtud de que el espacio cociente obtenido de I^q al identificar a ∂I^q a un punto es homeomorfo a la compactificación por un punto de \mathbb{R}^q , tenemos que existe una función α'

$$\begin{array}{ccc} I^q & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \downarrow p & \nearrow \alpha' & \\ I^q/\partial I^q = S^q & & \end{array}$$

conmuta, donde p es la inmersión canónica.

Ejemplo 1.8. Para encontrar un ejemplo de un espacio X para el cual

$$\pi_q(X, x_0) \neq 0,$$

basta encontrar un X y un mapeo $\alpha : S^q \rightarrow X$ tal que α no sea homótopo a la constante. Sorprendentemente, el espacio que sirve es la misma S^q cuando $n \geq 1$! En particular, si $X = S^2$,

$$\pi_q(S^2) = \begin{cases} 0, & q = 1, \\ \mathbb{Z}, & q = 2. \end{cases}$$

¿Será que $\pi_3(S^2) = 0$? Hopf demostró que, de hecho, no es así.

La idea para demostrar lo aseverado en el ejemplo anterior es la siguiente. A cada función $S^n \xrightarrow{f} S^n$ le asociamos un número entero, llamado grado, que sea un isomorfismo de grupos. Para $n = 1$, esto se puede lograr a través de aplicaciones cubrientes.

En el caso general, vemos a S^n como una variedad diferenciable.

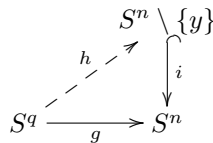
Definición 1.9. Sea $g : M \rightarrow N \in C^\infty$ una función entre las variedades diferenciables M y N , de modo que induce el mapeo lineal $(dg)_x : T_x M \rightarrow T_{g(x)} N$ entre los espacios tangentes de x y $g(x)$, respectivamente. El punto x se dice regular de g si $(dg)_x$ es suprayectiva. Se dice también valor regular de g si la imagen inversa de g está íntegramente formada por puntos regulares.

Se puede probar que una función continua f entre n -esferas es homótopa a otra función g que es diferenciable. Usando el teorema de Sard, vemos que existe un valor regular.

Teorema 1.10 (Sard). La imagen inversa de un valor regular de una función f es una subvariedad del dominio.

Si y es un valor regular, $g^{-1}(y)$ es una subvariedad de dimensión 0. Por lo tanto, es un conjunto discreto, y como S^n es compacto, es incluso finito. A cada punto de $g^{-1}(y)$ le asociamos un signo según $(dg)_X : T_x S^n \rightarrow T_{g(x)=y} S^n$ preserve o no la orientación. Entonces el isomorfismo es $\sum_{i=1}^{|g^{-1}(y)|} \sigma(g^{-1}(y)_i)$.

El mismo argumento funciona para $\pi_q(S^n)$ con $q < n$. En este caso tenemos $g : S^q \rightarrow S^n$, pero la imagen inversa de un valor regular es vacía. Luego g no es suprayectiva. En consecuencia



pero $S^n \setminus \{y\} \cong \mathbb{R}^n$. Dada $S^q \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$, veamos que f es homótopa a la constante. Sea $H : S^q \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada por $H(s, t) = (1-t)f(s)$, que es continua y satisface $H(s, 0) = f(s)$ y $H(s, 1) = 0$. Por todo lo anterior, S^q se retrae a un punto.

Este argumento también es raíz de los invariantes de Hopf. Si $S^3 \xrightarrow{f} S^2$, reemplazamos f por g con g diferenciable. Tomamos ahora un valor regular y su preimagen es una subvariedad compacta de dimensión 1.

Teorema 1.11 (Serre). *Si n es par, $\pi_q(S^n)$ es finito si $q > n$ excepto*

$$\pi_{2n-1}(S^n) \cong \mathbb{Z} \oplus F,$$

donde F es un grupo finito.

El siguiente teorema muestra que la tarea de calcular grupos de homotopía no es sencilla.

Teorema 1.12. *Sea X un complejo CW compacto y conexo. Supongamos que $\pi_1(X) = 0$ y que existe alguna q tal que $\pi_q(X) \neq 0$. Entonces hay una infinidad de dimensiones n tal que $\pi_n(X) \neq 0$.*

1.4. Propiedades funtoriales

Sea $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ una función continua. Definimos

$$\begin{aligned} f_{\#} : \pi_q(X, x_0) &\rightarrow \pi_q(Y, y_0), \\ [\alpha] &\rightarrow [f \circ \alpha]. \end{aligned}$$

Esta definición es correcta. En efecto, si $[\beta] = [\alpha]$ existe una homotopía $H : S^q \times I \rightarrow X$ entre β y α . Tenemos que $H' = f \circ H$ es una homotopía entre $f \circ \alpha$ y $f \circ \beta$, pues $H'(s, 0) = f(H(s, 0)) = f\alpha(s)$, $H'(s, 1) = f(H(s, 1)) = f\beta(s)$ y $H'(x_0, t) = f(H(x_0, t)) = f(x_0) = y_0$ para todo $0 \leq t \leq 1$.

Lema 1.13. *La función $f_{\#}$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Sean $[\alpha][\beta] \in \pi_n(X, x_0)$. Tenemos

$$f_{\#}([\alpha][\beta]) = f_{\#}([\alpha * \beta]) = [f \circ (\alpha * \beta)].$$

Ahora bien

$$f \circ (\alpha * \beta)(s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} f \circ \alpha(2s_1, \dots, s_n), & s_1 \in [0, \frac{1}{2}], \\ f \circ \beta(2s_1 - 1, \dots, s_n), & s_1 \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

pero esto último no es sino

$$[(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)] = [f \circ \alpha][f \circ \beta] = f_{\#}[\alpha]f_{\#}[\beta]$$

Escolio 1.14. Obsérvese que si $\text{id}(X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$, entonces

$$\begin{aligned} \text{id}_\# \pi_n(X, x_0) &\rightarrow \pi_n(X, x_0), \\ [\alpha] &\mapsto [\text{id} \circ \alpha] = [\alpha], \end{aligned}$$

es decir $\text{id}_\# = \text{id}_{\pi_n(X, x_0)}$.

Ejercicio 1.15. Sean $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ y $g : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$. Demostrar que

$$(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#.$$

Solución 1.16. Tenemos

$$(g \circ f)_\# [\alpha] = [(g \circ f) \circ \alpha] = [g \circ (f \circ \alpha)] = g_\# [f \circ \alpha] = (g_\# \circ f_\#) [\alpha].$$

En virtud de lo anterior, tenemos un funtor de la categoría de espacios basados en la categoría de los grupos.

Proposición 1.17. *Los grupos de homotopía son invariantes topológicos.*

Demostración. Queremos probar que si $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ es un homeomorfismo entonces $f_\# : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ es un isomorfismo de grupos.

Como f es un homeomorfismo basado, existe una función continua $g : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ tal que $g \circ f = \text{id}_X$ y $f \circ g = \text{id}_Y$. Por las propiedades del operador $\#$,

$$(f \circ g)_\# = f_\# \circ g_\# = (\text{id}_X)_\# = \text{id}_{\pi_n(X, x_0)}.$$

Por lo tanto $f_\#$ es un isomorfismo de grupos cuyo inverso es $g_\#$.

Escolio 1.18. Cuando probamos que $\pi_q(S^n) = 0$ para $q < n$, para $[f] \in \pi_q(S^n)$, $S^q \xrightarrow{f} S^n$. Tomábamos g diferenciable tal que $[f] = [g]$. Resulta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & S^n \setminus \{*\} & \\ & \nearrow \tilde{g} & \downarrow \\ S^q & \xrightarrow{g} & S^n \end{array}$$

que, al aplicar el funtor π se transforma en

$$\begin{array}{ccc} & \pi_q(S^n \setminus \{*\}) & \\ & \nearrow \tilde{g}_\# & \downarrow i_\# \\ \pi_q(S^q) & \xrightarrow{g_\#} & \pi_q(S^n). \end{array}$$

Como $[\tilde{g}] = [0]$ para toda \tilde{g} , entonces $\pi_q(\mathbb{R}^n) = 0$ para toda q . En particular, $\pi_q(S^n \setminus \{*\})$ para toda q , y por la relación funtorial, $[g] = [0]$ para toda g .

Definición 1.19. Dadas dos funciones continuas $f, g : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ decimos que son homótopas si existe una función continua $H : X \times I \rightarrow Y$ tal que

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= f(x), & H(x, 1) &= g(x), \\ \forall t \in I, & & H(x_0, t) &= y_0. \end{aligned}$$

Ejercicio 1.20. Demostrar que la homotopía es una relación de equivalencia.

Solución 1.21. Primeramente, la función definida por $H(x, t) = f(x)$ y $H(x_0, t) = y_0$ para todo $t \in I$ es una homotopía entre f y f . Si H es una homotopía entre f y g , entonces $H'(x, t) = H(x, 1 - t)$ es una homotopía entre g y f , pues $H'(x, 0) = H(x, 1) = g(x)$ y $H'(x, 1) = H(x, 0) = f(x)$. Finalmente, si H_1 es una homotopía entre f y g y H_2 es una homotopía entre g y h , entonces

$$H_3(x, t) = \begin{cases} H_1(s, 2t), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ H_2(s, 2t - 1), & t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

es una homotopía entre f y h , pues es continua por el Lema 1.5 y $H_3(x, 0) = f(x)$ y $H_3(x, 1) = h(x)$. Luego la homotopía es una relación de equivalencia.

Definición 1.22. La familia de espacios (X, x_0) que son del mismo tipo de homotopía que un punto se denominan *contraíbles*.

Corolario 1.23. Si (X, x_0) es contraíble entonces $\pi_q(X, x_0) = 0$ para todo q .

Ejercicio 1.24. El espacio \mathbb{R}^n es contraíble para todo n .

Solución 1.25. En efecto, si $c(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $i : 0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido como $i(0) = 0$, entonces $c \circ i = \text{id}_0$ e $i \circ c = i$. Así que sólo hay que probar que $i \simeq \text{id}_{\mathbb{R}^n}$. Para ello, definamos $H(s, t) = (1 - t)s$. Tenemos que $H(s, 0) = 0 = c(s)$ y $H(s, 1) = s = \text{id}_{\mathbb{R}^n}(s)$. Claramente, H es continua respecto a ambos parámetros, por lo que es una homotopía entre i e $\text{id}_{\mathbb{R}^n}$.

Definición 1.26. La esfera infinitamente dimensional S^∞ es el subespacio de \mathbb{R}^∞ que consiste en todas las sucesiones $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ que tienen a lo más una cantidad finita de elementos no nulos, tales que

$$\sum_{i=1}^\infty x_i^2 = 1.$$

Ejercicio 1.27. Demostrar que S^∞ es contraíble.

Solución 1.28. Consideremos primero a la función ϕ definida a través de

$$\{x_i\}_{i=1}^\infty \mapsto ((1 - t)x_1 + t, (1 - t)x_2, (1 - t)x_3, \dots).$$

Ahora definimos la homotopía

$$H : S^\infty \times I \rightarrow S^\infty$$

$$(\{x_i\}_{i=1}^\infty, t) \mapsto \frac{\phi(x, t)}{\|\phi(x, t)\|},$$

y claramente $H(x, 0) = \text{id}_{S^\infty}$, mientras que $H(x, 1) = (1, 0, \dots)$.

Definición 1.29. Sea X un espacio topológico. Definimos el cono CX de X como $X \times I / (X \times \{1\})$.

Ejercicio 1.30. Demostrar que CX es contraíble.

Solución 1.31. Consideremos a las funciones $\{[x, 1]\} \xrightarrow{i} CX$ y $CX \xrightarrow{f} \{[x, 1]\}$ dada por $[x, t] \mapsto [x, 1]$. Ya tenemos que $f \circ i = \text{id}_{\{[x, 1]\}}$. Ahora $i \circ f = [x, 1]$ para todo $x \in CX$. La homotopía $H([x, s], t) = [x, t + s(1-t)]$ claramente es continua y satisface $H([x, s], 0) = \text{id}_{CX}$ y $H([x, s], 1) = [x, 1] = i \circ f$.

Proposición 1.32. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua. La función f es homótopa a la constante si, y sólo si, f se extiende a CX .

Demostración. Supongamos que f es homótopa a la constante. Entonces existe una función continua $H : X \times I \rightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = c$. Definimos enseguida

$$\tilde{f} : CX \rightarrow Y$$

$$[x, t] \mapsto H(x, t).$$

Esto está bien definido pues el único punto donde $[x, t]$ tiene más de un representante es cuando $t = 1$, pero en tal caso $H(x, 1) = c$ para todo x . Por hipótesis, \tilde{f} es continua.

Recíprocamente, supongamos que $f : X \rightarrow Y$ se puede extender al cono CX . Entonces existe \tilde{f} tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow i & \nearrow \tilde{f} & \\ CX & & \end{array}$$

conmuta. Definimos entonces $H : X \times I \rightarrow Y$ a través de $H(x, t) = \tilde{f}([x, t])$. Tenemos que $H(x, 0) = \tilde{f}([x, 0]) = \tilde{f}(i(x)) = f(x)$, y además $H(x, 1) = \tilde{f}([x, 1]) = c$, pues $[x, 1]$ consiste en un solo punto en CX para todo x . La hipótesis de extensión hace que H sea continua.

Ejercicio 1.33. Demostrar la Proposición 1.32 para el caso de espacios basados.

Solución 1.34. Supongamos que f es homótopa a la constante. Entonces existe una función continua $H : X \times I \rightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = y_0$ y $H(x_0, t) = y_0$ para todo $t \in I$. Definimos enseguida

$$\begin{aligned} \tilde{f} : C(X, x_0) &\rightarrow Y \\ [x, t] &\mapsto H(x, t). \end{aligned}$$

Esto está bien definido pues el único punto donde $[x, t]$ tiene más de un representante es cuando $t = 1$ o $x = x_0$; en el primer caso $H(x, 1) = c$ para todo x . En el segundo, $[x_0, t]$ también consiste solamente de un punto, y de hecho es el mismo que para el caso de $[x, 1]$. Por hipótesis, \tilde{f} es continua.

Recíprocamente, supongamos que $f : X \rightarrow Y$ se puede extender al cono $C(X, x_0)$. Entonces existe \tilde{f} tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow i & \nearrow \tilde{f} & \\ C(X, x_0) & & \end{array}$$

conmuta. Definimos entonces $H : X \times I \rightarrow Y$ a través de $H(x, t) = \tilde{f}([x, t])$. Tenemos que $H(x, 0) = \tilde{f}([x, 0]) = \tilde{f}(i(x)) = f(x)$, y además $H(x, 1) = \tilde{f}([x, 1]) = c$, pues $[x, 1]$ consiste en un solo punto en CX para todo x . Además, $H(x_0, t) = \tilde{f}([x_0, t]) = c$ para todo $t \in I$, pues $[x_0, t]$ representa también a un solo elemento de $C(X, x_0)$. La hipótesis de extensión hace que H sea continua.

Corolario 1.35. Sea $[\alpha] \in \pi_q(X, x_0)$. Tenemos que $[\alpha] = 0$ si, y sólo si, α se puede extender a la $q + 1$ -bola.

Demostración. Ya que

$$\begin{array}{ccc} S^q & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \downarrow & \nearrow \tilde{\alpha} & \\ D^{q+1} & & \end{array}$$

y puesto que $CS^q \cong D^{q+1}$, el resultado se sigue.

Bordismo

El último corolario del capítulo anterior nos induce a olvidarnos a S^q como espacio a sumergir para obtener invariantes topológicos. Un sustituto natural parecen ser las variedades diferenciables.

Sea M^q una variedad diferenciable compacta con frontera y $f : M^q \rightarrow X$ continua. Podemos preguntarnos ahora si existe una variedad compacta con frontera V^{q+1} y una función $\tilde{f} : V^{q+1} \rightarrow X$ tal que $\partial V^{q+1} \cong M^q$ y $\tilde{f}|_{\partial V^{q+1}} = f$. Ya vimos que esto es así para la variedad S^q .

Sea, pues, M^q una variedad diferenciable compacta, sin frontera, y $f : M^q \rightarrow X$ una función continua. Como caso especial tendríamos que X es una variedad diferenciable de dimensión m , esto es $f : M^n \rightarrow N^m$, o inclusive $M^n \hookrightarrow N^m$.

Definición 2.1. Sea X un espacio topológico y consideremos parejas (M, f) donde M es una variedad diferenciable compacta con frontera de dimensión n y $f : M \rightarrow X$ continua. Decimos que $(M, f) \cong (N, g)$ si existe una variedad diferenciable V^{n+1} compacta y una función continua $H : V^{n+1} \rightarrow X$ tal que $\partial V^{n+1} \cong M \amalg N$ y $H|_M = f$ y $H|_N = g$.

Proposición 2.2. La relación \sim definida es de equivalencia, llamada bordismo.

Demostración. Sea M una variedad compacta y diferenciable con frontera. Tomemos $M \times I$ y definimos $H : M \times I \rightarrow X$ como $H(p, t) = f(p)$ para todo t . Desde luego, H es continua, y $\partial(M \times I) = M \times \{0\} \amalg M \times \{1\}$. Por construcción, $H|_{M \times \{0\}} = f$ y $H|_{M \times \{1\}} = f$. De aquí que $(M, f) \sim (M, f)$.

Supongamos ahora que $(M, f) \sim (N, g)$. Hay una variedad V y una función continua $H : V \rightarrow X$ tal que $\partial V \cong M \amalg N$, $H|_M = f$ y $H|_N = g$. Pero esto también significa que $(N, g) \sim (M, f)$.

Si $(M, f) \sim (N, g)$ y $(N, g) \sim (P, h)$, existen funciones continuas $H : V \rightarrow X$ y $H' : V' \rightarrow X$ tales que $H|_N = g$ y $H'|_N = g$. Usando el teorema del collar, existe un encaje de $N \times [0, 1) \hookrightarrow V$ y también otro $N \times [0, 1) \hookrightarrow V'$, a través de los cuales pueden pegarse V y V' de forma que se obtiene una

variedad diferenciable compacta con $M \amalg N$ como frontera, que llamaremos W . Esta variedad hace ver que $(M, f) \sim (P, h)$.

Definición 2.3. Denotamos por $\eta_n(X)$ al conjunto de clases de equivalencia bajo la relación de bordismo, donde $[M, f]$ denota a la clase de equivalencia de (M, f) .

2.1. Los grupos de bordismo

Podemos dotar a $\eta_n(X)$ con una operación que lo convierta en grupo, de la siguiente manera

$$[M, f] + [N, g] := [M \amalg N, f \amalg g].$$

Estos grupos siempre son abelianos. ¿Quién es el neutro de este grupo? Resulta ser $[S^n, c]$, donde c es la función constante. Esto es así porque, en primer lugar,

$$[S^n, c] = [\emptyset, \emptyset],$$

pues c puede extenderse continuamente como V a la bola B^n según el Corolario, y claramente $\partial B^n = S^n \amalg \emptyset$. Así, $\tilde{c}|_{S^n} = c$, y $\tilde{c}|_{\emptyset} = \emptyset$, precisamente. Es claro ahora que

$$[M, f] + [\emptyset, \emptyset] = [M \amalg \emptyset, f \amalg \emptyset] = [M, f].$$

Más aún: $[M, f] + [M, f] = [\emptyset, \emptyset]$. En efecto f se extiende como una función continua a $M \times I$ trivialmente y $\partial(M \times I) = M \amalg M$ (lo cual ya sabíamos). En otras palabras, $[M, f] = -[M, f]$.

A los grupos $\eta_n(X)$ que hemos obtenido los denominamos grupos de bordismo (no orientado) de X de dimensión n .

Definición 2.4. Sea $\phi : X \rightarrow Y$ continua. Definimos un homomorfismo de grupos $\phi_* : \eta_n(X) \rightarrow \eta_n(Y)$ como $\phi_*([M, f]) = [M, \phi \circ f]$.

Ejercicio 2.5. Demostrar que ϕ_* está bien definido y es un homomorfismo.

Solución 2.6. Supongamos que $[M, f] = [N, g]$. Tenemos que $\phi_*([M, f]) = [M, \phi \circ f]$. Pero $\phi \circ H$ es tal que $\phi \circ H|_M = \phi \circ f$ y $\phi \circ H|_N = \phi \circ g$. Así que $[M, \phi \circ f] = [N, \phi \circ g] = \phi_*([M, g])$.

Por otro lado

$$\begin{aligned} \phi_*([M, f] + [N, g]) &= \phi_*([M \amalg N, f \amalg g]) \\ &= [M \amalg N, \phi \circ (f \amalg g)] \\ &= [M \amalg N, \phi \circ f \amalg \phi \circ g] \\ &= [M, \phi \circ f] + [N, \phi \circ g] \\ &= \phi_*([M, f]) + \phi_*([N, g]), \end{aligned}$$

pues $f \amalg g$ es una función sobre $M \amalg N$ tal que $(f \amalg g)|_M = f$ y $(f \amalg g)|_N = g$, y de aquí que $\phi \circ (f \amalg g)|_M = \phi \circ f$ y $\phi \circ (f \amalg g)|_N = \phi \circ g$. En consecuencia

$$\phi \circ (f \amalg g) = (\phi \circ f) \amalg (\phi \circ g),$$

como se afirmaba. Luego ϕ_* es un homomorfismo.

Proposición 2.7. *Los homomorfismos recién definidos son funtoriales.*

Demostración. Si $\text{id} : X \rightarrow X$, entonces $\text{id}_* : \eta_n(X) \rightarrow \eta_n(X)$, pues $\text{id}_*([M, f]) = [M, \text{id} \circ f] = [M, f]$. Ahora, si tenemos las funciones continuas $\phi : X \rightarrow Y$ y $\psi : Y \rightarrow Z$, entonces

$$\begin{aligned} \psi_* \circ \phi_*([M, f]) &= \psi_*([M, \phi \circ f]) \\ &= [M, \psi \circ (\phi \circ f)] \\ &= [M, (\psi \circ \phi) \circ f] = (\psi \circ \phi)_*([M, f]). \end{aligned}$$

Corolario 2.8. *Los grupos de bordismo son invariantes topológicos.*

Proposición 2.9. *Sean $\phi, \psi : X \rightarrow Y$ tales que $\phi \simeq \psi$. Entonces $\phi_* = \psi_* : \eta_n(X) \rightarrow \eta_n(Y)$.*

Demostración. Sea $[M, f] \in \eta_n(X)$. Tenemos que

$$\begin{array}{ccc} M \times I & \xrightarrow{H'} & Y \\ f \times \text{id} \downarrow & \nearrow H & \\ X \times I & & \end{array}$$

donde H es una homotopía de ϕ a ψ . Por lo tanto para todo $p \in M$,

$$H'|_M = H'(p, 0) = H(f \times \text{id})(p, 0) = H(f(p), 0) = \phi(f(p))$$

y

$$H'|_M = H'(p, 1) = H(f \times \text{id})(p, 1) = H(f(p), 1) = \psi(f(p)),$$

luego $\phi \circ f = \psi \circ f$. Esto implica que $\phi_* = \psi_*$.

Corolario 2.10. *Los grupos $\eta_n(X)$ son invariantes homotópicos.*

Definición 2.11. *Sea (X, A) una pareja de espacios topológicos. Vamos considerar parejas (V, f) donde V^n es una variedad diferenciable compacta con frontera y $f(V, \partial V) \rightarrow (X, A)$. Definimos una relación \sim de la siguiente manera: $(V, f) \sim (W, g)$ si, y sólo si, existe una variedad compacta con frontera Q y una función continua $H : Q \rightarrow X$ que satisface $V, W \subset \partial Q$, $H|_V = f$, $H|_W = g$ y $H(\partial Q \setminus (V \amalg W)) \subset A$.*

Es fácil ver que la relación anterior (que denominamos bordismos de parejas) es de equivalencia.

Definición 2.12. *Al conjunto de clases de bordismos de parejas los denotamos como $\eta_n(X, A)$. Dotado con la unión ajena, es un grupo abeliano.*

Dada una pareja (X, A) existe una sucesión exacta larga inducida por

$$A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{j} (X, A),$$

ya que los grupos $\eta_n(X, A)$ son funtoriales. Esto es, dada $\phi : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ continua, podemos definir $\phi_* : \eta_n(X, A) \rightarrow \eta_n(Y, B)$ como $\phi_*([V, f]) = [V, \phi \circ f]$. Así, resulta la sucesión

$$\cdots \rightarrow \eta_n(A) \xrightarrow{i_*} \eta_n(X) \xrightarrow{j_*} \eta_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} \eta_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \eta_{n-1}(X) \rightarrow \cdots,$$

donde $\partial_n([V, f]) = [\partial V, f|_{\partial V}]$.

Consideremos a $\eta_n := \eta_n(*)$, esto es, el n -ésimo grupo de bordismo de un solo punto. Nos podemos olvidar de las funciones asociadas pues en realidad sólo una es posible: la constante. La colección de estos grupos fueron un anillo graduado de la siguiente manera: dado $[M^n] = \eta_n$ y $[N^m] = \eta_m$, definimos

$$[M][N] = [M \times N] \in \eta_{n+m}.$$

A este anillo lo denotamos como $\eta_* = \{\eta_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Definición 2.13. *La colección $\{\eta_n(X)\}_{n \geq 0}$ es el módulo graduado $\eta_*(X)$ sobre el anillo graduado η_* . Esto es, tenemos una operación*

$$\begin{aligned} \eta_* \times \eta_m(X) &\rightarrow \eta_{n+m}(X) \\ ([M^n], [N^m, f]) &\mapsto [M \times N, f \circ \phi_N], \end{aligned}$$

donde $M \times N \xrightarrow{\pi_N} N \xrightarrow{f} X$.

Análogamente se define el producto para $\eta_*(X, A)$. No hay problema con la definición por que una de las variedades no tiene frontera. Tenemos ahora el nada trivial problema de describir a η_* .

Ejercicio 2.14. Demostrar que $\eta_0 \cong \mathbb{Z}_2$.

Solución 2.15. Tenemos que una variedad 0-dimensional es un punto. Pero cualquier $[*] \in \eta_0$ es su propio inverso. Más aún: cualesquiera variedades 0-dimensionales son frontera de una variedad 1-dimensional, a saber: el intervalo $[0, 1]$. Por lo tanto η_0 consta de sólo dos elementos: $[*]$ y $[\emptyset]$. Dado que $[*] + [*] = [\emptyset]$, se sigue que el isomorfismo entre η_0 y \mathbb{Z}_2 está dado por $[*] \leftrightarrow 1$ y $[\emptyset] \leftrightarrow 0$.

René Thom logró, sin embargo, una descripción bastante completa de η_* .

Teorema 2.16 (R. Thom). *El anillo η_* es isomorfo a un anillo de polinomios sobre \mathbb{Z}_2 con un número infinito de variables, con una variable de dimensión n para cada $n \neq 2^m - 1$, $m \geq 1$.*

Los grupos $\eta_n(X)$ forman una teoría de homología en el sentido de que son una colección de funtores definidos en parejas de espacios topológicos, son invariantes homotópicos, existen sucesiones exactas y poseen excisión. Esto último consiste en lo siguiente: si $U \subset A \subset X$, con $\bar{U} \subset \text{int } A$, entonces $\eta_n(X, A) \cong \eta_n(X \setminus U, A \setminus U)$.

El hecho de que $\eta_n(X)$ sean una teoría de homología, los hace tener propiedades muy buenas para ser calculados. Sin embargo, el anillo $\eta_n(X, A)$ es demasiado “grande”.

2.2. Bordismo orientado

Por lo antes discutido, vamos a definir una teoría de homología similar al bordismo, pero en este caso consideraremos una orientación.

Sea V un espacio vectorial real de dimensión n . Consideremos a la familia de bases de V con la relación de equivalencia siguiente:

$$\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n) \sim (u_1, \dots, u_n) = \mathcal{U} \iff \det A_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} > 0,$$

donde $A_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$ es la matriz de cambio entre las bases \mathcal{V} y \mathcal{U} . A la clase de equivalencia de (v_1, \dots, v_n) la denotaremos como $[v_1, \dots, v_n]$.

Ejercicio 2.17. Demostrar que \sim define solamente dos clases de equivalencia.

Solución 2.18. Sean $\mathcal{U} = \{u_i\}_{i=1}^n, \mathcal{V} = \{v_i\}_{i=1}^n$ y $\mathcal{W} = \{w_i\}_{i=1}^n$ bases de V . Supongamos que $\mathcal{V} \not\sim \mathcal{U}$ y $\mathcal{V} \not\sim \mathcal{W}$. Entonces $A_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} < 0$ y $A_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}} < 0$. Por lo tanto $A_{\mathcal{U}}^{\mathcal{W}} = A_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} A_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}} > 0$, luego $\mathcal{U} \sim \mathcal{W}$. Esto implica que sólo hay dos clases de equivalencia.

Cualquiera de las dos clases de equivalencia inducidas a las que pertenezca una base de V es una orientación. Un espacio vectorial orientado es un espacio vectorial V donde hemos elegido una orientación fija para sus bases.

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n (con o sin frontera). Para todo $x \in X$, $T_x(M)$ es un espacio vectorial real de dimensión n . Una orientación de M en x es una orientación de $T_x(M)$ que denotaremos como μ_x . Una orientación de M es una orientación definida para cada punto x con la siguiente propiedad. Para cada punto $x \in M$, existe una carta (U, ϕ) tal que para cada $x \in U$, se satisface que $(d\phi)_X : T_x(M) \rightarrow \mathbb{R}^n = T_{\phi(x)}\mathbb{R}^n$ preserve la orientación. En otras palabras,

$$[(d\phi)_x(v_1), \dots, (d\phi)_x(v_n)] = [e_1, \dots, e_n],$$

donde (v_1, \dots, v_n) es una base de $T_x(M)$ con orientación μ_x .

Si V es un variedad con frontera que está orientada, entonces la frontera tiene una orientación inducida de la siguiente manera. Sea $x \in \partial V$ y consideremos el espacio tangente $T_x(V)$. Tenemos que $T_x(\partial V)$ es un subespacio de $T_x(V)$ de codimensión 1. Sea \mathcal{B} una base orientada de $T_x(V)$ con las siguientes propiedades: $\pi_V v_1 = 0$ y $\{v_2, \dots, v_n\} \subset T_x(\partial V)$. Así, $\mu_x = [v_2, \dots, v_n]$.

Definición 2.19. Sea (M, f) , donde M es una variedad compacta orientada de dimensión n y $f : M \rightarrow X$ es una función continua. Decimos que $(M, f) \sim (N, g)$ si, y sólo si, existe una variedad orientada V y una función continua $H : V \rightarrow X$ tal que $\partial V \cong M \amalg (-N)$, $H|_M = f$ y $H|_N = g$.

Se prueba que \sim es de equivalencia, y se le denomina bordismo orientado. Se convierte en grupo bajo la unión ajena, de la misma manera que en el caso del bordismo no orientado. Al n -ésimo grupo de bordismo orientado lo denotamos como $\Omega_n(X)$.

El neutro sigue siendo la clase $[S^n, c]$, donde S^n está orientada como la frontera de la bola B^{n+1} que tiene la orientación canónica de \mathbb{R}^{n+1} .

De manera análoga, se definen grupos de bordismo orientado de parejas, $\Omega_n(X, A)$.

Lema 2.20. Tenemos que $-[M, f] = [-M, f]$.

Demostración (Bosquejo). Queremos probar que $[M \amalg (-M), f \amalg f] = [S^n, c]$. Consideremos al cilindro $M \times I$ y $H : M \times I \rightarrow X$. Se comprueba fácilmente que las orientaciones de $(M, 0)$ y de $(M, 1)$ son contrarias.

Ahora bien: $\Omega_n(X, A)$ es una teoría de homología y $\Omega_*(X, A)$ es un anillo graduado sobre el anillo $\Omega_n := \Omega_n(*)$. No debe ser sorpresa que también Thom describió en gran medida este anillo.

Teorema 2.21 (R. Thom).

1. Si $\lambda \nmid n$, Ω_n es un grupo abeliano finito.
2. Si $n = 4k$, Ω_n es un grupo finitamente generado de rango $\pi(k)$, donde π es el número de particiones de k .
3. Una base para la parte libre de Ω_{4k} consta de las clases de los productos

$$\mathbb{C}P^{2j_1} \times \dots \times \mathbb{C}P^{2j_r},$$

con $j_1 + \dots + j_r = k$ y $1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq k$.

Definición 2.22. Al valor de una teoría de homología h en un punto se le llaman los coeficientes de la teoría. Una teoría es ordinaria si $h_n(*) = 0$ para $n \neq 0$. En otro caso, se le dice no ordinaria.

Por lo que hemos visto, tanto el bordismo orientado como el no orientado son teorías no ordinarias.

Homología simplicial

3.1. Generalidades

Definición 3.1. Consideremos a un conjunto finito $\{a_0, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^m$. Decimos que estos puntos son afínmente independientes si el conjunto $\{a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0\}$ es linealmente independiente.

Ejercicio 3.2. El conjunto $\{a_0, \dots, a_n\}$ es afínmente independiente si, y sólo si, dados $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 0$ y $\sum_{i=0}^n \lambda_i a_i = 0$, entonces $\lambda_i = 0$ para todo i .

Solución 3.3. Supongamos que $\{a_0, \dots, a_n\}$ son afínmente independientes y que $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 0$ y $\sum_{i=0}^n \lambda_i a_i = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i (a_i - a_0) &= \sum_{i=0}^n \lambda_i (a_i - a_0) \\ &= \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i - \sum_{i=0}^n \lambda_i a_0 \\ &= \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i + a_0 \sum_{i=0}^n \lambda_i = 0, \end{aligned}$$

lo cual puede ser solamente si $\lambda_i = 0$ para $1 \leq i \leq n$. Sin embargo, $\lambda_0 = -\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$, así que $\lambda_i = 0$ para $0 \leq i \leq n$.

Recíprocamente, supongamos que siempre que $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 0$ y $\sum_{i=0}^n \lambda_i a_i = 0$ entonces $\lambda_i = 0$ para todo i . Cuando

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i (a_i - a_0) = 0,$$

pero $\lambda_j \neq 0$, podemos suponer en particular que $\lambda_j = 1$, dividiendo entre el λ_j original. Así

$$a_j = 1a_j,$$

$$a_j = - \sum_{i \neq j} \lambda_i a_i + (1 + \sum_{i \neq j} \lambda_i) a_0,$$

por lo cual, restando las expresiones, existen β_i tales que

$$0 = \sum_{i=1}^n \beta_i a_i,$$

y obsérvese que la suma de los coeficientes la segunda expresión para a_j es 1. Por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^n \beta_i = 1 + \sum_{i \neq j} \lambda_i - 1 - \sum_{i \neq j} \lambda_i = 0.$$

Definiendo $\beta_0 = 0$, tendremos que $0 = \sum_{i=0}^n \beta_i a_i$ y $\sum_{i=0}^n \beta_i = 0$. Por hipótesis, $\beta_i = 0$ para $0 \leq i \leq n$. Pero eso es contradictorio, porque $\beta_j = 1$. Luego, $\lambda_i = 0$ para $1 \leq i \leq n$, lo que implica que $\{a_i - a_0\}_{i=1}^n$ son linealmente independientes y en particular que $\{a_i\}_{i=0}^n$ son afinmente independientes.

En particular, la definición de independencia afín es independiente de quién es a_0 .

Definición 3.4. Un n -simplejo geométrico en \mathbb{R}^m está definido como

$$\sigma_n := \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i : \{a_i\}_{i=0}^n \text{ es afinmente independiente, } \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

El interior de σ_n es, claramente, lo anteriormente definido pero con $\lambda_i > 0$. Definimos además el baricentro de σ_n como $b_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n a_i$.

Vamos a escribir $\sigma_n = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$ y diremos que n es la dimensión de σ_n . Dado un subconjunto $\{a_{i_1}, \dots, a_{i_q}\}$ de $\{a_0, \dots, a_n\}$ a $\langle a_{i_1}, \dots, a_{i_q} \rangle$ le denominaremos una cara de σ_n .

Ejercicio 3.5. Dado $\sigma_n \subset \mathbb{R}^m$ es cerrado, convexo y compacto.

Solución 3.6. Sea $\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{i,k} a_i\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión convergente de elementos en σ_n . Entonces

$$\|(\lambda_{i,k} - \lambda_{i,j})a_i\| \leq \left\| \sum \lambda_{i,k} a_i - \sum \lambda_{i,j} a_i \right\|,$$

lo que implica que $\{\lambda_{i,k} a_i\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente también. En particular, $\{\lambda_{i,k}\}_{k=1}^{\infty}$ es convergente. Sea λ_i dicho límite, el cual no es negativo pues $\lambda_{i,k} \geq 0$ para cada k . Como

$$1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \lambda_{i,k} = \sum_{i=0}^n \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{i,k} = \sum_{i=0}^n \lambda_i,$$

entonces $\sum_{i=0}^n \lambda_i a_i \in \sigma_n$. Además, para un $\epsilon > 0$ arbitrario existe K tal que $\|\lambda_i a_i - \lambda_{i,K} a_i\| \leq \epsilon/(n+1)$ para cada $0 \leq i \leq n$, y de aquí que

$$\left\| \sum \lambda_i a_i - \sum \lambda_{i,K} a_i \right\| \leq \sum \|\lambda_i a_i - \lambda_{i,K} a_i\| \leq \sum \frac{\epsilon}{n+1} = \epsilon.$$

Así, $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum \lambda_{i,k} a_i = \sum \lambda_i a_i$. Por lo tanto, σ_n es cerrado.

Sean $x = \sum \lambda_i a_i$ y $y = \sum \mu_i a_i$ elementos de σ_n . Entonces, para cada $\beta \in [0, 1]$, se tiene que

$$\beta x + (1 - \beta)y = \sum (\beta \lambda_i + (1 - \beta)\mu_i) a_i$$

pero

$$\sum (\beta \lambda_i + (1 - \beta)\mu_i) = \beta \sum \lambda_i + (1 - \beta) \sum \mu_i = \beta + (1 - \beta) = 1,$$

y además $\beta \lambda_i \geq 0$ lo mismo que $(1 - \beta)\mu_i \geq 0$. Esto implica que $\beta x + (1 - \beta)y \in \sigma_n$, y la convexidad del mismo.

Finalmente, sea $d = \max_i \{\|a_0 - a_i\|\}$. Entonces la bola centrada en a_0 y de radio $d+1$ contiene a todo a_i , y en consecuencia a todos los puntos de σ_n . Esto es por que tal bola es convexa y por lo tanto todas las combinaciones convexas de $\{a_i\}_{i=0}^n$ caen en ella. Siendo σ_n cerrado y acotado en \mathbb{R}^m , es compacto.

Proposición 3.7. Sean $\sigma_n = \langle a_0, \dots, a_n \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\tau_n = \langle b_0, \dots, b_n \rangle \subseteq \mathbb{R}^\ell$ n -simplejos geométricos. Entonces σ_n y τ_n son afínmente homeomorfos.

Demostración. Definamos $f : \sigma_n \rightarrow \tau_n$ como

$$f \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i a_i \right) = \sum_{i=0}^n \lambda_i b_i.$$

La función f es afín en el sentido de que está determinada por los valores de la misma en los vértices. Esto es, enviamos al vértice a_i al vértice b_i . Así, $f(\sum_{i=0}^n \lambda_i a_i) = \sum_{i=0}^n \lambda_i f(a_i)$. La función f es claramente biyectiva. Supongamos por el momento que es continua. Como σ_n es compacto y τ_n es un espacio de Hausdorff, entonces f es cerrada, luego es un homeomorfismo.

Ejercicio 3.8. Verificar que f es continua.

Solución 3.9. Sea $\{\sum_{i=0}^n \lambda_{i,k} a_i\}_{k=1}^\infty \subset \sigma_n$ una sucesión convergente. La solución del problema anterior demuestra que $\{\lambda_{i,k}\}_{k=1}^\infty$ es una sucesión convergente para cada i con límite λ_i y además $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \lambda_{i,k} a_i = \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i$. De aquí que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} f \left(\sum_{i=0}^n \lambda_{i,k} a_i \right) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \lambda_{i,k} f(a_i) \\ &= \sum_{i=0}^n \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{i,k} f(a_i) = \sum_{i=0}^n \lambda_i f(a_i) \\ &= f \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i a_i \right) = f \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \lambda_{i,k} a_i \right), \end{aligned}$$

y por esto f es continua.

Definición 3.10. *Un complejo simplicial finito en \mathbb{R}^m es un conjunto finito U de simplejos geométricos en \mathbb{R}^m que satisfacen lo siguiente.*

1. Cada simplejo σ_n pertenece a K y si τ_m es una cara de σ_n entonces $\tau_m \in K$.
2. Si $\sigma_n, \sigma_m \in K$, entonces o bien $\sigma_n \cap \sigma_m = \emptyset$ o bien $\sigma_n \cap \sigma_m$ es una cara de σ_m y σ_n .

Denotamos por $|K|$ al subespacio topológico de \mathbb{R}^m formado por los puntos que pertenecen a algún simplejo en K .

Ahora definimos una familia de complejos simpliciales finitos, llamados simplejos estándar, que denotamos $\Delta^n \subset \mathbb{R}^n$, como $\Delta^n = \langle e_0, \dots, e_n \rangle$, donde $e_0 = 0$ y $\{e_i\}_{i=1}^n$ es la base canónica. De forma explícita,

$$\Delta^n = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i \leq 1 \right\}.$$

Una definición alternativa (con idéntica notación) es la envolvente convexa de la base canónica. En este caso,

$$\Delta^n = \left\{ (\ell_0, \dots, \ell_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ell_i \geq 0, \sum_{i=0}^n \ell_i = 1 \right\}.$$

Definición 3.11. *Un complejo simplicial K es una familia de subconjuntos finitos no vacíos de un conjunto V_K que denominaremos vértices de K y que satisfacen lo siguiente.*

1. Para cada $v \in V_K$, $\{v\} \in K$.
2. Si $\sigma \in K$ y $\tau \subset \sigma$, entonces $\tau \neq \emptyset$ implica que $\tau \in K$.

Ejemplo 3.12. Sea $V_K = \{v_1, \dots, v_3\}$. Si

$$K = \{\{v_1\}, \{v_3\}, \{v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_1\}, \{v_1, v_2, v_3\}\},$$

es fácil comprobar que K es un simplejo.

Ejemplo 3.13. Un complejo simplicial finito en \mathbb{R}^m determinan un complejo simplicial.

Ejemplo 3.14. Sea X un espacio topológico y $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de subconjuntos de X . Definiremos un complejo simplicial llamado el nervio $N(\mathcal{U})$ de la familia \mathcal{U} . Hacemos $V_{N(\mathcal{U})} = \mathcal{U}$ y

$$\{U_{\alpha_0}, \dots, U_{\alpha_n}\} \in K \iff \bigcap_{i=0}^n U_{\alpha_i} \neq \emptyset.$$

Definición 3.15. Sea X un espacio topológico. La dimensión de cubierta de Lebesgue es el mínimo número natural n tal que cualquier cubierta abierta \mathcal{U} de X tiene un refinamiento V en el cual ningún punto pertenece a más de $n + 1$ abiertos del refinamiento.

Obsérvese que la definición anterior implica que $N(\mathcal{U})$ tiene dimensión de cubierta de Lebesgue menor o igual que n .

Definición 3.16. Sea K un complejo simplicial. Definimos su realización geométrica $|K|$ como

$$|K| := \left\{ \alpha : V_K \rightarrow I : \alpha^{-1}((0, 1]) \in K, \sum_{v \in V_K} \alpha(v) = 1 \right\}.$$

La suma en la definición anterior tiene sentido porque $\alpha(v)$ no es nula solamente en un simplejo, y por lo tanto hay a lo más un conjunto finito de vértices tales que $\alpha(v) \neq 0$.

Definición 3.17. Dotamos a $|K|$ de una métrica a través de

$$d(\alpha, \beta) := \sqrt{\sum_{v \in V_K} (\alpha(v) - \beta(v))^2}.$$

Ejercicio 3.18. Demostrar que d es una métrica.

Solución 3.19. Claramente, $d(\alpha, \alpha) = 0$. Además, si $\sum_{v \in V_K} (\alpha(v) - \beta(v))^2 = 0$, es por que $\alpha(v) - \beta(v) = 0$ para cada $v \in V_K$. De aquí que $\alpha = \beta$. También es evidente que $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} (d(\alpha, \beta) + d(\beta, \gamma))^2 &= (d(\alpha, \beta))^2 + \\ &+ 2\sqrt{\sum_{v \in V_K} (\alpha(v) - \beta(v))^2 \sum_{v \in V_K} (\beta(v) - \gamma(v))^2} + (d(\beta, \gamma))^2, \end{aligned}$$

y por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} (d(\alpha, \beta) + d(\beta, \gamma))^2 &\geq (d(\alpha, \beta))^2 + 2 \sum_{v \in V_K} (\alpha(v) - \beta(v))(\beta(v) - \gamma(v)) \\ &+ (d(\beta, \gamma))^2 \\ &\geq \sum_{v \in V_K} (\alpha(v) - \gamma(v))^2 = (d(\alpha, \gamma))^2, \end{aligned}$$

de donde se sigue que d satisface la desigualdad del triángulo.

Usando esta métrica podemos inducir una topología en $|K|$ y al subespacio topológico resultante lo denotaremos como $|K|_d$.

Definición 3.20. Si $S \in K$, definimos $|S| = \{\alpha \in |K| : \alpha^{-1}((0, 1]) \subset S\}$.

Vamos a ver que $|S|$ es isométrico a un simplejo estándar $\Delta^q \subset \mathbb{R}^{q+1}$. Para esto definimos una función entre $|S|$ y Δ^q (donde $S = \{v_0, \dots, v_q\}$), dada por

$$\begin{aligned}\phi : |S| &\rightarrow \Delta^q, \\ \alpha &\mapsto (\alpha(v_0), \dots, \alpha(v_q)),\end{aligned}$$

cuya inversa es

$$\begin{aligned}\psi : \Delta^q &\rightarrow |S|, \\ (\lambda_0, \dots, \lambda_q) &\mapsto \alpha_{(\lambda_0, \dots, \lambda_q)},\end{aligned}$$

donde

$$\alpha_{(\lambda_0, \dots, \lambda_q)}(v_i) = \begin{cases} \lambda_i & v \in S, \\ 0 & v \notin S. \end{cases}$$

Ejercicio 3.21. Verificar que ϕ es una isometría.

Solución 3.22. En efecto,

$$\begin{aligned}d(\alpha, \beta) &= \sqrt{\sum_{v \in V_K} (\alpha(v) - \beta(v))^2} \\ &= \sqrt{(\phi(\alpha) - \phi(\beta))(\phi(\alpha) - \phi(\beta))^T} \\ &= \|\phi(\alpha) - \phi(\beta)\|_2.\end{aligned}$$

Puesto que $|K| = \cup_{S \in K} |S|$, entonces $|K|$ es una unión de subespacios homeomorfos a complejos simpliciales estándar.

Definición 3.23. Demos a $|K|$ una topología donde cada $|S|$ tiene la topología métrica pero cada subconjunto $A \subset |K|$ es abierto si, y sólo si, $A \cap |S|$ es abierto en cada $|S|$.

Con esta topología, $|K|$ tiene la siguiente propiedad: una función $f : |K| \rightarrow Y$ es continua si, y sólo si, $f|_{|S|}$ es continua para cada $S \in K$. Consideremos ahora a $\text{id} : |K| \rightarrow |K|_d$. Esta función es continua pues $\text{id}|_{|S|} : |S| \rightarrow |S|_d$ es de hecho $\text{id}|_{|S|} : |S|_d \rightarrow |S|_d$ por construcción.

Definición 3.24. Un complejo simplicial K es localmente finito si cada vértice v pertenece sólo a un número finito de simplejos.

Teorema 3.25. Son equivalentes las siguientes afirmaciones.

1. El complejo K es localmente finito.
2. El espacio $|K|$ es localmente compacto.
3. La función $\text{id} : |K| \rightarrow |K|_d$ es un homeomorfismo.
4. El espacio $|K|$ satisface el primer axioma de numerabilidad.

Definición 3.26. Sean K y L complejos simpliciales. Una función $\phi : V_K \rightarrow V_L$ respeta simplejos cuando

$$S = \{v_0, \dots, v_q\} \in K \Rightarrow \{\phi(v_0), \dots, \phi(v_q)\} \in L.$$

En tal caso, decimos que ϕ es una función simplicial de K en L .

Los complejos, junto con las funciones simpliciales forman una categoría. Si $\phi : K \rightarrow L$ es una función simplicial, definimos $|\phi| : |K| \rightarrow |L|$ como sigue

$$(|\phi|\alpha)(w) = \sum_{v \in \phi^{-1}(w)} \alpha(v).$$

Ejercicio 3.27. Ver que ϕ está bien definida y que es continua.

Solución 3.28. Sea $S = \alpha^{-1}((0, 1]) = \{v_i\}_{i=0}^q$. Tenemos que $S = \phi^{-1}(\phi(S))$, por lo que $\sum_{w \in V_L} \sum_{v \in \phi^{-1}(w)} \alpha(v) = 1$ y $T = (|\phi|\alpha)^{-1}((0, 1])$ es un simplejo de L . Elijamos $\epsilon > 0$ arbitrario. Si $d(\alpha, \beta) \leq \epsilon/\sqrt{p}$, donde p es la cardinalidad de T , entonces

$$\begin{aligned} d(|\phi|\alpha, |\phi|\beta) &= \sqrt{\sum_{w \in V_L} \left(\sum_{v \in \phi^{-1}(w)} (\alpha(w) - \beta(w)) \right)^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{w \in T} \epsilon^2/p} = \sqrt{\epsilon^2} = \epsilon, \end{aligned}$$

lo que implica que $|\phi|$ es continua.

Se puede probar que dada $f : |K| \rightarrow |L|$ existe una función simplicial $\phi : K \rightarrow L$ tal que $f \simeq |\phi|$.

Ejemplo 3.29. Las esferas son homeomorfas a la realización de complejos simpliciales. Dada $f : S^q \rightarrow S^n$ continua, tomemos una homotopía de la forma $|\phi|$ donde ϕ es una función simplicial. Obsérvese que ϕ no puede ser suprayectiva.

Definición 3.30. Un espacio X es un poliedro o espacio triangulado si existe un complejo simplicial K y un homeomorfismo $\phi : |K| \rightarrow X$.

Ejemplo 3.31. Toda variedad diferenciable es un poliedro.

3.2. Homología simplicial

Sea R un anillo conmutativo con unidad. Para construir una teoría de homología, la idea es considerar para cada q el R -módulo libre generado por los q -simplejos. Esto es, expresiones de la forma $\sum_{i=1}^m r_i \sigma_i$ con $r_i \in R$ y σ_i q -simplejos de K .

Definición 3.32. Consideremos un q -simplejo $s = \{v_0, \dots, v_q\}$ y a los vértices ordenados (v_0, \dots, v_q) bajo la relación de equivalencia $(v_0, \dots, v_q) \sim (v'_0, \dots, v'_q)$ si existe una permutación par que envía un ordenamiento en el otro.

Hay dos clases de equivalencia bajo esta relación, las cuales se denominan orientaciones de S . A un elemento del cociente lo denotamos como $[v_0, \dots, v_q]$.

Definición 3.33. Denotamos con $C_q(K)$ al módulo libre generado por los q -simplejos orientados de K .

A los elementos de $C_q(K)$ se les denomina q -cadenas y son de la forma $\sum r_\sigma \sigma$, $r_\sigma \in R$ con casi todo $r_\sigma = 0$. Definimos ahora el operador ∂_q tal que

$$C_q(x) \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1}(K) \xrightarrow{\partial_q} C_{q-2}(K),$$

a través de

$$\partial_q([v_0, \dots, v_q]) = \sum_{i=0}^q (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q],$$

donde \hat{v}_i indica la ausencia del i -ésimo vértice.

Ejercicio 3.34. Demostrar que $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$.

Solución 3.35. Sea $u_i = (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q]$. Claramente

$$\partial_{q-1} \partial_q([v_0, \dots, v_q]) = \sum_{i=0}^q \partial_{q-1} u_i,$$

y

$$\begin{aligned} \partial_{q-1}(u_i) &= \sum_{j < i} (-1)^{i+j} [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q] \\ &\quad - \sum_{j > i} (-1)^{i+j} [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_q]. \end{aligned}$$

Si intercambiamos i por j en la último sumando, vemos que $\partial_{q-1}(u_i) = 0$, y de aquí que $\partial_{q-1} \partial_q([v_0, \dots, v_q]) = 0$.

El ejercicio anterior implica que $\text{Im } \partial_{q+1} \subset \text{núc } \partial_q$ para todo q .

Definición 3.36. Definimos

$$H_q(K; R) = \frac{\text{núc } \partial_q}{\text{Im } \partial_{q+1}}.$$

A los elementos de $\text{núc } \partial_q$ se les denomina q -ciclos, y a los de $\text{Im } \partial_{q+1}$ se les denomina q -fronteras.

Definición 3.37. Sea $\phi : K \rightarrow L$ una función simplicial. Definimos

$$\phi_{\#} : C_q(K; R) \rightarrow C_q(L; R)$$

a través de

$$\phi_{\#}([v_0, \dots, v_q]) = \begin{cases} [\phi(v_0), \dots, \phi(v_q)], & i \neq j \Rightarrow \phi(v_i) \neq \phi(v_j), \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Ejercicio 3.38. Demostrar que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} C_q(K) & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1}(K) \\ \phi_{\#} \downarrow & & \downarrow \phi_{\#} \\ C_q(L) & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1}(L) \end{array}$$

conmuta.

Solución 3.39. En efecto,

$$\begin{aligned} \partial_q(\phi_{\#}([v_0, \dots, v_q])) &= \partial_q([\phi(v_0), \dots, \phi(v_q)]) \\ &= \sum_{i=0}^q (-1)^i [\phi(v_0), \dots, \widehat{\phi(v_i)}, \dots, \phi(v_q)] \\ &= \phi_{\#} \left(\sum_{i=0}^q (-1)^i [v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_q] \right) \\ &= \phi_{\#}(\partial_q([v_0, \dots, v_q])). \end{aligned}$$

Por el ejercicio anterior, $\phi_{\#}$ induce un homomorfismo

$$\begin{aligned} \phi_{\#} : H_q(K; R) &\rightarrow H_q(L; R), \\ c &\mapsto [\phi_{\#}(c)]. \end{aligned}$$

Al módulo $C_q(K)$ se le puede describir de manera alternativa. Damos un orden al complejo K de modo que cada simplejo esté totalmente ordenado. Ahora $C_q(K)$ es el R -módulo libre generado por los elementos de la forma $v_0 < v_1 < \dots < v_q$. Así

$$\partial_q(v_0 < \dots < v_q) = \sum_{i=0}^q (-1)^i v_0 < \dots < \widehat{v_i} < \dots < v_q.$$

Sin embargo, esta definición complica la de ϕ_* como función simplicial, pues K y L tienen un orden propio.

Definición 3.40. Dado K un complejo simplicial, definimos su subdivisión baricéntrica $\text{sd}(K)$ como $V_{\text{sd}(K)} = K$ y los simplejos de la forma

$$\{S_0 \subset S_1 \subset \cdots \subset S_q\},$$

con $S_i \in K$.

Ejercicio 3.41. Demostrar que $|K| \cong |\text{sd}(K)|$.

Solución 3.42. Se tiene que $\text{id}_K : K \hookrightarrow \text{sd}(K)$, así que $|K| \hookrightarrow |\text{sd}(K)|$. Se define ahora $f : |\text{sd}(K)| \hookrightarrow |K|$ que envía a S al baricentro de $|S| \cong \Delta^q$ (es decir, obtenemos el baricentro de Δ^q y después su imagen bajo la isometría con $|S|$). Como la intersección de simplejos en un complejo es un simplejo y el baricentro está contenido en la realización geométrica de cada simplejo, f es continua. Es claro así que $|\text{id}_K| \circ |f| = \text{id}_{|\text{sd}(K)|}$ y que $|f| \circ |\text{id}_K| = \text{id}_{|K|}$, comprobándose que $|K| \cong |\text{sd}(K)|$.

Hay otra forma de calcular la homología simplicial usando otro complejo de cadenas $\hat{C}_q(K)$, que es el módulo libre generado por las tuplas ordenadas

$$(v_0, \dots, v_q),$$

donde $\{v_0, \dots, v_q\} \in K$.

Ejemplo 3.43. Se tiene que $\underbrace{(v, \dots, v)}_{q+1 \text{ veces}} \in \hat{C}_q(K)$.

Definición 3.44. Dada una función simplicial $\phi : K \rightarrow L$, definimos

$$\phi_{\#} : \hat{C}_q(K) \rightarrow \hat{C}_q(L)$$

como

$$\phi_{\#}(v_0, \dots, v_q) = (\phi(v_0), \dots, \phi(v_q)).$$

La definición anterior tiene sentido pues $\{v_0, \dots, v_q\} \in K$ implica que $\{\phi(v_0), \dots, \phi(v_q)\} \in L$ por ser ϕ una función simplicial.

De la misma manera que antes, definimos

$$\begin{aligned} \partial_q : \hat{C}_q(K) &\rightarrow \hat{C}_{q-1}(K) \\ (v_0, \dots, v_q) &\mapsto \sum_{i=0}^q (-1)^i (v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q), \end{aligned}$$

y como $\{v_0, \dots, v_q\} \in K$, entonces $\{v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q\} \in K$.

Ejercicio 3.45. Demostrar que $\partial_{q-1} \circ \partial_q$.

Solución 3.46. Sea $u_i = (-1)^i(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q)$. Claramente

$$\partial_{q-1}\partial_q(v_0, \dots, v_q) = \sum_{i=0}^q \partial_{q-1}u_i,$$

y

$$\begin{aligned} \partial_{q-1}(u_i) &= \sum_{j<i} (-1)^{i+j}(v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q) \\ &\quad - \sum_{j>i} (-1)^{i+j}(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_q). \end{aligned}$$

Si intercambiamos i por j en la último sumando, vemos que $\partial_{q-1}(u_i) = 0$, y de aquí que $\partial_{q-1}\partial_q(v_0, \dots, v_q) = 0$.

Escolio 3.47. Se puede probar que $H_q(C_*(K)) \cong H_q(\hat{C}_*(K))$.

Ejercicio 3.48. Sea K el complejo simplicial con $V_K = \{v_0, v_1, v_2\}$ y

$$K = \{v_0, v_1, v_2, \{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_0, v_2\}\}.$$

Verificar que

$$H_q(K; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, 1, \\ 0, & q \neq 0, 1. \end{cases}$$

Hay que elucidar la cuestión si los módulos descritos son invariantes topológicos. Esto es, dados K y L complejos simpliciales cuyas realizaciones son homeomorfas, entonces

$$H_q(K; R) \cong H_q(L; R).$$

Poincaré, para probar lo anterior, planteó tres pasos.

1. Si $K \cong L$, esto es, existe una biyección $\phi : V_K \rightarrow V_L$ tal que $\{v_0, \dots, v_q\} \in K \iff \{\phi(v_0), \dots, \phi(v_q)\} \in L$, entonces $H_q(K; R) \cong H_q(L; R)$. Esto es claro porque entonces $s \in \text{núc } \partial_q^K$ si, y sólo si, $\phi(s) \in \text{núc } \partial_q^L$, y análogamente $s \in \text{Im } \partial_{q+1}^K$ si, y sólo si, $\phi(s) \in \text{Im } \partial_{q+1}^L$.
2. Se satisface que $H_q(K; R) \cong H_q(\text{sd}(K), R)$.
3. Si $|K| \cong |L|$, entonces existen subdivisiones de K y L tal que $\text{sd}^n(K) \cong \text{sd}^m(L)$. Este enunciado se le conoce como *Hauptvermutung* (hipótesis principal).

Estos tres pasos implicarían la invariancia topológica. Sin embargo, el *Hauptvermutung* es falso e innecesario. En 1915 Alexander logró demostrar la invariancia con otro método.

En la década de los 60, Milnor dió un contraejemplo del *Hauptvermutung*. Consideremos a

$$S^3 = \{(z_1, z_2) : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^2$$

y sea $w = \exp(2\pi i/p)$. Sea la acción $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times S^3 \rightarrow S^3$ dada por

$$T(z_1, z_2) = (wz_1, w^q z_2),$$

donde T es un generador de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. El espacio lente de tipo $L(p, q)$ es $\frac{S^3}{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$, que resulta ser una variedad diferenciable de dimensión 7.

Definimos

$$\begin{aligned} X_1 &= L(7, 1) \times \Delta^n \cup \text{cono}(\partial(L(7, 1) \times \Delta^n)), \\ X_2 &= L(7, 2) \times \Delta^n \cup \text{cono}(\partial(L(7, 1) \times \Delta^n)). \end{aligned}$$

Teorema 3.49. *Si $n > 3$, $X_1 \cong X_2$, pero ninguna subdivisión de X_1 es isomorfa a una subdivisión de X_2 .*

Usando la invariancia topológica de la homología simplicial, podemos definir la homología de espacios triangulables, ya que si X es triangulable entonces existe un complejo simplicial K tal que

$$|K| \xrightarrow[f]{} X$$

a través del cual podemos definir $H_q(X; R) = H_q(K; R)$, lo cual es correcto en virtud de la invariancia topológica.

3.3. Homología de Čech

Nuestro siguiente objetivo es extender la definición de homología a espacios arbitrarios. El primer intento corresponde a Čech, en 1930.

Tomamos una cubierta abierta \mathcal{U} de X , y le asociamos un complejo simplicial (el nervio de \mathcal{U}) para tomar $H_*(N(\mathcal{U}; R))$. Sin embargo, tomar una cubierta arbitraria puede provocar una pérdida innecesaria de información.

Dadas dos cubiertas \mathcal{U} y \mathcal{V} de X , decimos que $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ si para cada $V \in \mathcal{V}$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \subset U$. Con esta definición las cubiertas dirigidas de X forman un conjunto dirigido. La idea es considerar

$$\lim_{\leftarrow \mathcal{U}} H_*(N(\mathcal{U}), R) := \hat{H}_*(X; R).$$

A fin de no tomar cubiertas arbitrarias, tomamos al mismo X como conjunto de índices; es decir, $\mathcal{U} = \{U_x\}_{x \in X}$ con la propiedad de que $x \in U_x$.

Al asociarle a las cubiertas \mathcal{U} y \mathcal{V} de X sendos nervios $N(\mathcal{U})$ y $N(\mathcal{V})$, cuando $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ se tiene que $N(\mathcal{V}) \hookrightarrow N(\mathcal{U})$. Obsérvese que $V_{N(\mathcal{U})} = V_{N(\mathcal{V})} = X$.

Lo anterior quiere decir que la función identidad sobre X manda simplejos en simplejos. En efecto, si $\{v_{x_0}, \dots, v_{x_q}\}$ es un q -simplejo de $N(\mathcal{V})$ entonces $\bigcap_{k=0}^q V_{x_k} = \emptyset$, y así $\text{id}(\{V_{x_0}, \dots, V_{x_q}\}) = \{U_{x_0}, \dots, U_{x_q}\}$, por lo cual

$$\emptyset \neq \bigcap_{k=0}^q V_{x_k} \subset \bigcap_{k=0}^q U_{x_k},$$

y queda claro que $\{U_{x_0}, \dots, U_{x_q}\}$ es un simplejo.

Hemos obtenido un homomorfismo

$$(\text{id}_{\mathcal{U}\mathcal{V}})_* : H_*(N(\mathcal{V}); R) \rightarrow H_*(N(\mathcal{U}); R).$$

Definición 3.50. *Definimos*

$$\hat{H}_q(X; R) = \varinjlim_{\mathcal{U}} H_q(N(\mathcal{U})),$$

donde $\varinjlim_{\mathcal{U}} N(\mathcal{U})$ es el submódulo del producto

$$\prod_{\mathcal{U}} H_q(N(\mathcal{U}); R)$$

que consiste en todos los elementos del producto cuyas entradas están relacionadas por los homomorfismos $(\text{id}_{\mathcal{U}\mathcal{V}})_*$.

La homología de Čech tiene el defecto de que no tiene sucesiones exactas para parejas, pues el límite inverso no preserva exactitud. Por otra parte, la cohomología de Čech que se define tomando el límite directo de las cohomologías de los nervios tiene buenas propiedades como teoría cohomológica.

Entre la tercera y la cuarta década del siglo XX se definieron otras teorías de homología, entre ellas las de Steenrod o la de Vietoris. El primero en introducir la noción de homología como la asociación entre un espacio topológico y un grupo abstracto fue Vietoris, alrededor de 1926.

Homología singular

En 1944, Eilenberg definió la homología singular.

4.1. Complejos singulares

Definición 4.1. Sea $S_q(X)$ el R -módulo libre generado por los simplejos singulares, que son funciones continuas

$$\sigma : \Delta^q \rightarrow X.$$

A los elementos de $S_q(X)$ se les denomina cadenas singulares, y las escribimos como $\sum_{\sigma} r_{\sigma} \sigma$, con $r_{\sigma} \in R$ y casi todo r_{σ} nulo.

En términos más formales, una cadena es una función que asocia a cada $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$ continua un elemento en R de manera que se anula para casi toda σ . Notemos que

$$\sum_{\sigma} r_{\sigma} \sigma + \sum_{\sigma} s_{\sigma} \sigma = \sum_{\sigma} (r_{\sigma} + s_{\sigma}) \sigma$$

y

$$r \sum_{\sigma} r_{\sigma} \sigma = \sum_{\sigma} (rr_{\sigma}) \sigma.$$

Escribimos σ en vez de 1σ y $r_{\sigma}\sigma$ como la función $r_{\sigma}\chi_{\{\sigma\}}$.

Definición 4.2. A la función

$$F_q^i : \Delta^{q-1} \rightarrow \Delta^q, \quad 0 \leq i \leq q$$

dada por

$$e_j \mapsto \begin{cases} e_j, & j < i, \\ e_{j+1}, & j \geq i. \end{cases}$$

extendiéndola afínmente, la llamaremos i -ésima cara del simplejo Δ^q .

Ejercicio 4.3. Demostrar que $F_q^i \circ F_{q-1}^j = F_q^j \circ F_{q-1}^{i-1}$ si $j < i$.

Solución 4.4. Por un lado

$$F_q^i \circ F_{q-1}^j(e_k) = \begin{cases} e_k, & k < j, \\ e_{k+1}, & j \leq k, k+1 < i, \\ e_{k+2}, & j \leq k, k+1 \geq i, \end{cases} = \begin{cases} e_k, & k < j, \\ e_{k+1}, & j \leq k < i-1, \\ e_{k+2}, & k \geq i-1, \end{cases}$$

mientras que por otro,

$$F_q^j \circ F_{q-1}^{i-1}(e_k) = \begin{cases} e_k, & k < i-1, k < j, \\ e_{k+1}, & k < i-1, k \geq j, \\ e_{k+2}, & k \geq i-1, k+1 \geq j, \end{cases} = \begin{cases} e_k, & k < j, \\ e_{k+1}, & j \leq k < i-1, \\ e_{k+2}, & k \geq i-1, \end{cases}$$

comprobándose la igualdad propuesta.

Si hemos definido a un simplejo singular como una función continua entre un simplejo geométrico y un espacio topológico, hay una forma muy natural de definir sus caras.

Definición 4.5. Si $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$, definimos la i -ésima cara de σ como

$$\sigma^{(i)} := \sigma \circ F_q^i : \Delta^{q-1} \rightarrow X.$$

De manera análoga al caso de los simplejos geométricos, definimos el operador frontera.

Definición 4.6. El morfismo frontera ∂ está dado por

$$\begin{aligned} \partial_q : S_q(X) &\rightarrow S_{q-1}(X), \\ \sigma &\mapsto \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma^{(i)}, \end{aligned}$$

extendido linealmente.

Ejercicio 4.7. Demostrar que $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$.

Solución 4.8. En principio

$$\begin{aligned} \partial_{q-1} \circ \partial_q &= \sum_{i=0}^q (-1)^i \partial_{q-1} \sigma^{(i)}, \\ &= \sum_{i=0}^q (-1)^i \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^j (\sigma \circ F_q^i) \circ F_{q-1}^j, \\ &= \sum_{1 \leq j < i}^q (-1)^{i+j} \sigma \circ (F_q^j \circ F_{q-1}^{i-1}) + \sum_{0 \leq i < j}^{q-1} (-1)^{i+j} \sigma \circ (F_q^i \circ F_{q-1}^j), \end{aligned}$$

donde la última igualdad resulta de la aplicación del ejercicio anterior. Si ahora hacemos $i' = j$ y $j' = i-1$, vemos que ambos sumandos se cancelan y el ejercicio se sigue.

4.2. Homología singular

Al par $(S_*(X), \partial_*)$ se le denomina complejo de cadenas singular de X . Definimos además

$$Z_q(X) = \text{núc } \partial_q, \quad B_q(X) = \text{Im } \partial_{q+1},$$

así que $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$ implica que $B_q(X) \subseteq Z_q(X)$. Así, el q -ésimo grupo de homología (singular) como

$$H_q(X; R) := \frac{Z_q(X)}{B_q(X)}.$$

Proposición 4.9. *Se satisface*

$$H_q(*; R) = \begin{cases} R, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0. \end{cases}$$

Demostración. Tenemos que $\sigma_q := \sigma : \Delta^q \mapsto \{*\}$ es, necesariamente, constante para cada q . Por lo tanto

$$\partial_q(\sigma_q) = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma_q^{(i)} = \left(\sum_{i=0}^q (-1)^i \right) \sigma_{q-1},$$

de donde

$$\partial_q(\sigma_q) = \begin{cases} \sigma_{q-1}, & q \text{ mód } 2 = 0, q > 0, \\ 0 & q \text{ mód } 2 = 1. \end{cases}$$

En consecuencia,

$$Z_q = B_q = \begin{cases} 0, & q \text{ mód } 2 = 0, q > 0, \\ S_q(*), & q \text{ mód } 2 = 1, \end{cases}$$

lo que implica que $H_q(*; R) = 0$ para $q > 0$. Si $q = 0$, tenemos $\partial_0(\sigma_0) = 0$ por lo que $\text{núc } \partial_0 = S_0(*)$. También

$$\partial_1(\sigma_1) = \sigma_1^{(0)} - \sigma_1^{(1)} = 0,$$

o, lo que es lo mismo, $B_0 = 0$. Luego $H_0(*; R) = \frac{S_0(*)}{0} = S_0(*)$. Dado que $S_0(*)$ tiene un solo generador, entonces $H_0(*; R) = R$.

Proposición 4.10. *Sea X un espacio conectable por trayectorias. Entonces $H_0(X; R) \cong R$.*

Demostración. Tenemos la cadena

$$S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Como núc $\partial_0 = S_0(X)$,

$$\frac{\text{núc } \partial_0}{\text{Im } \partial_1} = \frac{S_0(X)}{\text{Im } \partial_1} = H_0(X; R),$$

vamos a definir un homomorfismo $\epsilon : S_0(X) \rightarrow R$ llamado aumentación para calcular $\text{Im } \partial_1$.

Dado que un 0-simplejo singular es una función continua $\sigma : \Delta^0 \rightarrow X$, identificamos a σ con $\sigma(0) \in X$. Así, las 0-cadenas son $\sum_{x \in X} r_x x$ y tiene sentido definir

$$\epsilon \left(\sum_x r_x x \right) = \sum_{x \in X} r_x \in R.$$

Tenemos que ϵ es suprayectivo. En efecto, si $r \in R$, resulta que $rx \in S_0(X)$ para todo $x \in X$, y $\epsilon(rx) = r$. Si probamos que núc $\epsilon = \text{Im } \partial_1$, tendremos que

$$\frac{S_0(X)}{\text{núc } \epsilon} = \frac{S_0(X)}{\text{Im } \partial_1} \cong R.$$

Primeramente, $\text{Im } \partial_1 \subseteq \text{núc } \epsilon$. Tomemos $c = \sum_{\sigma} r_{\sigma} \sigma \in S_1(X)$. Luego

$$\begin{aligned} \partial_1(c) &= \partial_1 \left(\sum_{\sigma} r_{\sigma} \sigma \right) \\ &= \sum_{\sigma} r_{\sigma} \partial_1 \sigma \\ &= \sum_{\sigma} r_{\sigma} (\sigma(e_1) - \sigma(e_0)) \\ &= \sum_{\sigma} r_{\sigma} \sigma(1) - \sum_{\sigma} r_{\sigma} \sigma(0), \end{aligned}$$

y al aplicar ϵ ,

$$\epsilon(\partial_1(c)) = \epsilon \left(\sum_{\sigma} r_{\sigma} \sigma(1) - \sum_{\sigma} r_{\sigma} \sigma(0) \right) = \sum_{\sigma} r_{\sigma} - \sum_{\sigma} r_{\sigma} = 0.$$

Por otro lado, núc $\epsilon \subseteq \text{Im } \partial_1$. Sea $c = \sum_{x \in X} r_x x$ tal que $\epsilon(c) = \sum_{x \in X} r_x = 0$. Sea $x_0 \in X$ arbitrario. Como X es conectable por trayectorias, para cada $x \in X$ a la trayectoria entre x_0 y x la designamos como σ_x . Sea $d = \sum_{x \in X} r_x \sigma_x \in S_1(X)$, resulta que

$$\begin{aligned} \partial_1(d) &= \partial_1 \left(\sum_{x \in X} r_x \sigma_x \right) = \sum_{x \in X} r_x (\sigma_x(1) - \sigma_x(0)) \\ &= \sum_{x \in X} r_x \sigma_x(1) - \sum_{x \in X} r_x x_0 \\ &= \sum_{x \in X} r_x x - x_0 \sum_{x \in X} r_x = \sum_{x \in X} r_x. \end{aligned}$$

De aquí que núc $\epsilon = \text{Im } \partial_1$.

Definición 4.11. Sea $f : X \rightarrow Y$ continua. Definimos el homomorfismo $f_{\#} : S_q(X) \rightarrow S_q(Y)$ como $f_{\#}(\sigma) = f \circ \sigma$ ($\Delta^q \xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{f} Y$) y extendida linealmente.

Para ver que $f_{\#}$ induce un homomorfismo en homología, vamos a considerar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} S_q(A) & \xrightarrow{\partial_q} & S_q(X) \\ f_{\#} \downarrow & & \downarrow f_{\#} \\ S_{q-1}(A) & \xrightarrow{\partial_q} & S_{q-1}(X) \end{array}$$

Puesto que

$$\begin{aligned} f_{\#}(\partial_q(\sigma)) &= f_{\#} \left(\sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma^{(i)} \right) \\ &= \sum_{i=0}^q (-1)^i f \circ \sigma^{(i)} \\ &= \sum_{i=0}^q (-1)^i f_{\#}(\sigma^{(i)}) \\ &= \partial_q(f_{\#}(\sigma)), \end{aligned}$$

entonces el diagrama conmuta. Un $f_{\#}$ de esta naturaleza se denomina morfismo de cadenas.

Definición 4.12. Un complejo de cadenas es una colección de R -módulos $\{C_q\}_{q \in \mathbb{Z}}$ y homomorfismos $\partial_q : C_q \rightarrow C_{q-1}$ tales que $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$ y un morfismo de cadenas f entre $(\{C_q\}_{q \in \mathbb{Z}}, \{\partial_q\}_{q \in \mathbb{Z}})$ y $(\{C'_q\}_{q \in \mathbb{Z}}, \{\partial'_q\}_{q \in \mathbb{Z}})$ es una familia de homomorfismos $f_q : C_q \rightarrow C'_q$ de R -módulos tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} C_q(A) & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1}(X) \\ f_q \downarrow & & \downarrow f_{q-1} \\ C'_q(A) & \xrightarrow{\partial'_q} & C'_{q-1}(X) \end{array}$$

conmuta para cada q .

Ejercicio 4.13. Sea $f : (C_*, \partial_*) \rightarrow (C'_*, \partial'_*)$ un morfismo de cadenas. Demostrar que f induce un homomorfismo $f_{\#} : H_q(C_*) \rightarrow H_q(C'_*)$, donde

$$H_q(C_*) = \frac{\text{núc } \partial_q}{\text{Im } \partial_{q+1}}.$$

Solución 4.14. Parece obvio definir

$$\begin{aligned} f_{\#} : H_q(C_*) &\rightarrow H_q(C'_*), \\ \bar{c} &\mapsto \overline{f_q(c)}; \end{aligned}$$

veamos que esto está bien definido. Sean $\bar{z}_1, \bar{z}_2 \in H_q(C_*)$, con $z_1, z_2 \in \text{núc } \partial_q$, tales que $\bar{z}_1 = \bar{z}_2$. Existe $b \in \text{Im } \partial_{q+1}$ tal que $z_1 = z_2 + b$ y

$$f_q(z_2 + b) = f_q(z_1) + f_q(b).$$

Ahora bien,

$$\partial'_q(f_q(z_i)) = f_{q-1}(\partial_q(z_i)) = f_{q-1}(0) = 0, \quad i = 1, 2,$$

mientras que existe $b' \in C_{q+1}(X)$ tal que $\partial_{q+1}(b') = b$, y

$$f_q(b) = f_q(\partial_{q+1}(b')) = \partial'_{q+1}(f_{q+1}(b')),$$

de lo cual deducimos que

$$f_q(z_2), f_q(z_1) \in \text{núc } \partial'_q, \quad f_q(b) \in \text{Im } \partial'_{q+1},$$

y con ello que

$$f_q(z_1) = f_q(z_2) + f_q(b),$$

que significa que $\overline{f_q(z_1)} = \overline{f_q(z_2)}$. Finalmente para todo $r \in R$,

$$\overline{f_q(z_1 + rz_2)} = \overline{f_q(z_1) + rf_q(z_2)} = \overline{f_q(z_1)} + r\overline{f_q(z_2)}$$

pues las operaciones de un anillo pasan al cociente. Esto comprueba que $f_{\#}$ es un homomorfismo entre los anillos $H_q(C_*)$ y $H_q(C'_*)$.

Corolario 4.15. Dado $f : X \rightarrow Y$ continua, tenemos un homomorfismo $f_* : H_q(X; R) \rightarrow H_q(Y; R)$ para todo q dado por $f_*[c] = [f_{\#}(c)]$.

Ejercicio 4.16. Demostrar que la asociación $X \rightsquigarrow S_*(X)$ es un funtor de la categoría de espacios topológicos a la categoría de complejos de cadenas.

Solución 4.17. Sean $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h} Z$ una función continua entre los espacios topológicos X, Y y Z . Para cualquier q , sea $\sigma : \Delta^q \rightarrow X \in S_q(X)$. Así,

$$(h \circ f)_{\#}(\sigma) = (h \circ f) \circ \sigma = h \circ (f \circ \sigma) = h \circ (f_{\#}(\sigma)) = h_{\#}(f_{\#}(\sigma)) = (h_{\#} \circ f_{\#})(\sigma),$$

esto es $S_q(X) \xrightarrow{f_{\#}} S_q(Y) \xrightarrow{h_{\#}} S_q(Z)$. Si $X \xrightarrow{\text{id}} X$, entonces

$$\text{id}_{\#}(\sigma) = \text{id} \circ \sigma = \sigma,$$

lo que implica que $\text{id}_{\#} = \text{id}_{S_q(X)}$.

Ejercicio 4.18. Si $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es un funtor y $f : C \rightarrow C'$ es un isomorfismo, entonces $\phi(f) : \phi(C) \rightarrow \phi(C')$ es un isomorfismo.

Solución 4.19. Existe f' tal que $f' \circ f = 1_C$ y $f \circ f' = 1_{C'}$. Luego

$$\phi(f' \circ f) = \phi(f') \circ \phi(f) = \phi(1_C) = 1_{\phi(C)}$$

y

$$\phi(f \circ f') = \phi(f) \circ \phi(f') = \phi(1_{C'}) = 1_{\phi(C')}.$$

En consecuencia, $\phi(f)$ es un isomorfismo.

Ejercicio 4.20. La homología es un funtor de $\mathbf{Comp}_R \rightarrow R\text{-Mód}$.

Solución 4.21. En efecto, sean f y g morfismos entre las cadenas (C_*, ∂_*) , (C'_*, ∂'_*) y (C''_*, ∂''_*) . Entonces, para cada q ,

$$(f \circ g)_\#(\bar{c}) = \overline{(f_q \circ g_q)(c)} = f_\#(\overline{g_q(c)}) = f_\#(g_\#(\bar{c})) = (f_\# \circ g_\#)(\bar{c}),$$

y como id_{C_*} es un isomorfismo, $(\text{id}_{C_*})_\#$ es un isomorfismo de $H_*(C_*)$.

Corolario 4.22. La homología singular es un invariante topológico.

Demostración. Tenemos los funtores

$$\mathbf{Top} \xrightarrow{S_*} \mathbf{Comp}_R \xrightarrow{H_*} R\text{-Mód},$$

que al componerlos envían a un espacio topológico X a $H_q(X; R)$ y a un homeomorfismo (que es un isomorfismo en la categoría \mathbf{Top}) en un isomorfismo.

Definición 4.23. Sean $\{(C_*^\alpha, \partial_*^\alpha)\}_{\alpha \in A}$ una familia de complejos de cadenas (o de R -módulos). La suma directa de los complejo de cadenas $(\bigoplus_{\alpha \in A} C_*^\alpha, \partial_*^\oplus)$ como

$$\begin{array}{ccc} (\bigoplus C_*^\alpha)_q & := & \bigoplus_\alpha C_q^\alpha \\ \partial_q^\oplus \downarrow & & \downarrow \bigoplus \partial_q^\alpha \\ (\bigoplus C_*^\alpha)_{q-1} & := & \bigoplus_\alpha C_{q-1}^\alpha \end{array}$$

donde ∂_q^\oplus se define usando la propiedad universal de la suma directa

$$\begin{array}{ccc} C_q^\alpha & \xrightarrow{i_q^\alpha} & \bigoplus_\alpha C_q^\alpha \\ \partial_q^\alpha \downarrow & & \downarrow \partial_q^\oplus \\ C_{q-1}^\alpha & \xrightarrow{i_{q-1}^\alpha} & \bigoplus_\alpha C_{q-1}^\alpha \end{array}$$

pues la familia de homomorfismos $i_{q-1}^\alpha \circ \partial_q^\alpha$ determina a ∂_q^\oplus .

Ejercicio 4.24. Demostrar que $\partial_{q-1}^\oplus \circ \partial_q^\oplus = 0$.

Solución 4.25. Sea α y q arbitrarios y $c \in \bigoplus C_q^\alpha$. Entonces $i_q^\alpha(c) = c_\alpha$ y

$$\begin{aligned} \partial_{q-1}^\oplus \circ \partial_q^\oplus (i_q^\alpha(c)) &= \partial_{q-1}^\oplus \circ i_{q-1}^\alpha \circ \partial_q^\alpha(c) \\ &= i_{q-2}^\alpha \circ \partial_{q-1}^\alpha \circ \partial_q^\alpha(c) \\ &= i_{q-2}^\alpha \circ 0(c) = 0. \end{aligned}$$

Puesto que esto es válido para cualquier α y cualquier q , se sigue el ejercicio.

Ejercicio 4.26. Demostrar que

$$H_q \left(\bigoplus_\alpha C_*^\alpha \right) \cong \bigoplus_\alpha H_q(C_*^\alpha).$$

Solución 4.27. Dado que

$$\begin{aligned} H_q \left(\bigoplus_\alpha C_*^\alpha \right) &= \frac{\text{núc } \partial_q^\oplus}{\text{Im } \partial_{q+1}^\oplus} \\ &= \frac{\bigoplus_\alpha \text{núc } \partial_q^\alpha}{\bigoplus_\alpha \text{Im } \partial_{q+1}^\alpha} \\ &= \bigoplus_\alpha \frac{\text{núc } \partial_q^\alpha}{\text{Im } \partial_{q+1}^\alpha} \\ &= \bigoplus_\alpha H_q(C_*^\alpha), \end{aligned}$$

el resultado es inmediato.

Proposición 4.28. Sea X un espacio topológico y denotemos por $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ a la familia de sus componentes por trayectorias. Entonces los homomorfismos $\{(i_\alpha)_*\}_{\alpha \in A}$ definen un isomorfismo

$$\bigoplus_{\alpha \in A} (i_\alpha)_* : \bigoplus_{\alpha \in A} H_q(X_\alpha; R) \xrightarrow{\cong} H_q(X; R)$$

para cada q .

Demostración. Estudiemos primero $S_*(X)$ y a $(i_\alpha)_* : S_*(X_\alpha) \rightarrow S_*(X)$. Usando la propiedad universal de la suma directa, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} S_*(X_\alpha) & \xrightarrow{(i_\alpha)_*} & \bigoplus S_*(X_\alpha) \\ & \searrow (i_\alpha)_\# & \downarrow \bigoplus (i_\alpha)_* \\ & & S_*(X) \end{array}$$

Probemos que $\bigoplus_{\alpha \in A} (i_\alpha)_*$ es un morfismo de cadenas. Dado

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus S_q(X_\alpha) & \xrightarrow{\bigoplus \partial_q^\alpha} & \bigoplus S_{q-1}(X_\alpha) \\ \bigoplus (i_\alpha)_q \downarrow & & \downarrow \bigoplus (i_\alpha)_{q-1} \\ S_q(X) & \xrightarrow{\partial_q} & S_{q-1}(X) \end{array}$$

y la ecuación

$$\begin{aligned} \partial_q (\bigoplus (i_\alpha)_q) &= \bigoplus (\partial_q \circ (i_\alpha)_q) \\ &= \bigoplus ((i_\alpha)_{q-1} \circ \partial_q^\alpha) \\ &= \bigoplus (i_\alpha)_{q-1} \circ \bigoplus \partial_q^\alpha, \end{aligned}$$

tenemos que el diagrama conmuta para cada q , verificándose el aserto. Más aún

$$\left(\bigoplus_\alpha S_*(X_\alpha), \partial_*^\oplus \right) \cong \left(\bigoplus_\alpha S_*(X), \partial_* \right),$$

pues el isomorfismo directo es

$$\bigoplus_\alpha \left(\sum_{\sigma_\alpha} r_{\sigma_\alpha} \sigma_\alpha \right) \mapsto \sum_\alpha \sum_{\sigma_\alpha} r_{\sigma_\alpha} \sigma_\alpha,$$

mientras que el inverso es

$$\sum_\sigma r_\sigma \sigma = \bigoplus_\alpha \left(\sum_{i_\alpha(\sigma)} r_{i_\alpha(\sigma)} \sigma_{i_\alpha(\sigma)} \right),$$

pues, siendo que Δ^q es conexo y $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$ es continua, debe caer solamente en una componente conectable por trayectorias.

Aplicando homología y el ejercicio anterior

$$H_q(S_*(X), \partial_*) = H_q \left(\bigoplus_\alpha S_*(X_\alpha), \partial_*^\oplus \right) \cong \bigoplus_\alpha H_q(S_*(X_\alpha), \partial_*^\alpha),$$

de donde se sigue el resultado.

Proposición 4.29. *Para un espacio arbitrario X se tiene que $H_0(X; R)$ es la suma directa de una copia de R por cada componente por trayectorias de X .*

Demostración. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ la familia de componentes por trayectorias de X . Por la proposición anterior

$$H_0(X; R) \cong \bigoplus_\alpha H_0(X_\alpha; R)$$

y por la Proposición 4.10, $H_0(X_\alpha; R) \cong R$ para cada α , de donde

$$H_0(X; R) \cong \bigoplus_\alpha R$$

Sea $A \subseteq X$. Tenemos el morfismo de cadenas

$$\begin{array}{ccc} S_q(A) & \xrightarrow{i\#} & S_q(X) \\ \partial_q^A \downarrow & & \downarrow \partial_q^X \\ S_{q-1}(A) & \xrightarrow{i\#} & S_{q-1}(X) \end{array}$$

que conmuta por ser $i\#$ un morfismo de cadenas. Consideremos a los grupos $S_*(X)/S_*(A)$ y el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} S_q(A) & \xrightarrow{i\#} & S_q(X) & \longrightarrow & S_q(X)/S_q(A) \\ \downarrow \partial_q^A & & \downarrow \partial_q^X & & \downarrow \bar{\partial}_q \\ S_{q-1}(A) & \xrightarrow{i\#} & S_{q-1}(X) & \longrightarrow & S_{q-1}(X)/S_{q-1}(A) \end{array}$$

que es conmutativo pues

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_q : S_q(X)/S_q(A) &\rightarrow S_{q-1}(X)/S_{q-1}(A), \\ \bar{C} &\mapsto \bar{\partial}_q(\bar{C}), \end{aligned}$$

está bien definido. Ciertamente, pues si $\bar{C} = \bar{D}$, entonces $C - D \in S_q(A)$, por lo que $\partial_q(C - D) = \partial_q(C) - \partial_q(D) \in S_{q-1}(A)$. Resulta así que $(S_*(X)/S_*(A), \bar{\partial}_*)$ es un complejo de cadenas, que denotamos como $(S_*(X, A), \bar{\partial}_*)$.

Definición 4.30. *Definimos la homología de parejas $H_q(X, A; R)$ como*

$$H_q(X, A; R) := H_q(S_*(X, A), \bar{\partial}_*).$$

Para ver que H_q es un functor, consideremos a la función continua $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$. El diagrama

$$\begin{array}{ccc} S_q(X) & \xrightarrow{f\#} & S_q(Y) \\ \uparrow i\# & & \uparrow j\# \\ S_q(A) & \xrightarrow{(f|_A)\#} & S_q(B) \end{array}$$

es conmutativo, pues S_q es un functor. Se induce el diagrama

$$\begin{array}{ccc} S_q(X)/S_q(A) & \xrightarrow{\bar{f}\#} & S_q(Y)/S_q(B) \\ \uparrow & & \uparrow \\ S_q(X) & \xrightarrow{f\#} & S_q(Y) \\ \uparrow i\# & & \uparrow j\# \\ S_q(A) & \xrightarrow{(f|_A)\#} & S_q(B) \end{array}$$

arrojando un homomorfismo $\bar{f}_\#$ que hace conmutar al diagrama

$$\begin{array}{ccc} S_q(X, A) & \xrightarrow{\bar{f}_\#} & S_q(Y, B) \\ \bar{\partial}_q^X \downarrow & & \bar{\partial}_q^Y \downarrow \\ S_{q-1}(X, A) & \xrightarrow{\bar{f}_\#} & S_{q-1}(Y, B) \end{array}$$

En efecto

$$\bar{\partial}_q^Y \circ \bar{f}_\#(\bar{c}) = \bar{\partial}_q^Y \circ \overline{f_\#(c)} = \overline{\partial_q^Y \circ f_\#(c)}$$

y

$$\bar{f}_\# \circ \bar{\partial}_q^X = \bar{f}_\# \circ \overline{\partial_q^X} = \overline{f_\# \circ \partial_q^X},$$

pero $\partial_q^Y \circ f_\#(c) = f_\# \circ \partial_q^X$ por ser $f_\#$ un morfismo de cadenas, y por esto $\bar{f}_\#$ es un morfismo de cadenas.

Dada la sucesión

$$\cdots \rightarrow S_{q+1}(X) \xrightarrow{\partial_{q+1}} S_q(X) \xrightarrow{\partial_q} S_{q-1}(X) \rightarrow \cdots$$

Dados los módulos

$$\begin{aligned} Z_q(X) &= \{c \in S_q(X) : \partial_q(c) = 0\}, \\ Z_q(X, A) &= \{c \in S_q(X) : \partial_q(c) \in S_{q-1}(A)\}, \\ B_q(X) &= \{c \in S_q(X) : c = \partial_{q+1}(c'), c' \in S_{q+1}(X)\}, \\ B_q(X, A) &= \{c \in S_q(X) : c = \partial_{q+1}(c') - c'', c' \in S_{q+1}(X), c'' \in S_q(A)\}, \end{aligned}$$

que satisfacen $Z_q(X) \hookrightarrow Z_q(X, A)$ y $B_q(X) \hookrightarrow B_q(X)$, queremos ver que $B_q(X, A) \subseteq Z_q(X, A)$. Sea $c \in B_q(X, A)$. Podemos escribir

$$c = \partial_{q+1}(c') + c'', \quad c \in S_{q+1}(X), c'' \in S_q(A),$$

por lo que

$$\partial_q(c) = \partial_q \circ \partial_{q+1}(c') + \partial_q(c'') = \partial_q(c'') \in S_{q-1}(A),$$

como queríamos.

Definición 4.31. Definimos $H_q(X, A; R) := Z_q(X, A)/B_q(X, A)$.

Escolio 4.32. Tenemos que $S_*(\emptyset) = 0$, de manera que si $A = \emptyset$, entonces $H_q(X, A; R) = H_q(X; R)$.

Ejercicio 4.33. Demostrar que $Z_q(X, A)/B_q(X, A) \cong H_q(S_*(X, A))$.

Solución 4.34. Primeramente

$$\bar{\partial}_q(\bar{c}) = 0 \iff \partial_q(c) \in S_{q-1}(A) \iff c \in Z_q(X, A)$$

y

$$\begin{aligned} \bar{c} \in \text{Im } \bar{\partial}_{q+1} &\iff \exists \bar{c}' \in \frac{S_{q+1}(X)}{S_{q+1}(A)}, \bar{\partial}_{q+1}(\bar{c}') = \bar{c} \\ &\iff c'' = c - \partial_{q+1}(c') \in S_q(A) \\ &\iff c \in B_q(X, A). \end{aligned}$$

Esto hace sonar razonable que el isomorfismo está dado por $[\bar{c}] \leftrightarrow [c]$. En efecto,

$$[\bar{c}] = [\bar{d}] \iff \bar{c} - \bar{d} \in \text{Im } \bar{\partial}_{q+1} \iff c - d \in B_q(X, A) \iff [c] = [d].$$

Demostremos que H_q vuelve a ser funtorial para parejas con la segunda definición. Sea $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ continua, que induce el morfismo de cadenas $f_\# : S_q(X) \rightarrow S_q(Y)$. Queremos ver que $f_\# : Z_q(X, A) \rightarrow Z_q(Y, B)$ es un morfismo. Sea $c \in Z_q(X, A)$; entonces $f_\#(c) \in S_q(Y)$ y $\partial_q \circ f_\#(c) = f_\# \circ \partial_q(c) \in S_{q-1}(B)$. Como $f(A) \subseteq B$, entonces $f_\#(c) \in Z_q(Y, B)$.

Sea $c \in B_q(X, A)$ y consideremos

$$\begin{aligned} f_\#(c) &= f_\#(\partial_{q+1}(c') + c'') \\ &= f_\# \circ \partial_{q+1}^X(c') + f_\#(c'') \\ &= \partial_{q+1}^Y \circ f_\#(c') + f_\#(c''). \end{aligned}$$

Ya que $f_\# \in S_{q+1}(Y)$ y $f_\#(c'') \in S_q(B)$, resulta que $f_\#(c) \in B_q(Y, B)$. En consecuencia, se induce $\bar{f}_\# : Z_q(X, A)/B_q(X, A) \rightarrow Z_q(Y, B)/B_q(Y, B)$ dado por $\bar{f}_\#[c] = [f_\#(c)]$.

Proposición 4.35. Sea X un espacio conectable por trayectorias y $A \subset X$ no nulo. Entonces $H_0(X, A; R) = 0$.

Demostración. Veremos que $S_0(X) \subseteq B_0(X, A)$. Como $A \neq \emptyset$, sea $x_0 \in A$ y $c = \sum_x r_x x \in S_0(X)$. Para $x \in X$, consideremos una trayectoria $\sigma_x : \Delta^1 \rightarrow X$ tal que $\sigma_x(0) = x_0$ y $\sigma_x(1) = x$. Definimos la 1-cadena $\sum_x r_x \sigma_x \in S_1(X)$. Su frontera es $\partial_1(\sum_x r_x \sigma_x) = \sum_x r_x(x - x_0) = \sum_x r_x x - x_0 \sum_x r_x$. Transponiendo términos

$$\sum_x r_x x = \partial_1 \left(\sum_x r_x \sigma_x \right) + \left(\sum_x r_x \right) x_0,$$

y $(\sum_x r_x) \in S_0(A)$, por lo cual $c \in B_0(X, A)$, implicando que $H_0(X, A; R) = 0$.

Proposición 4.36. Sea (X, A) una pareja de espacios. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ la familia de componentes por trayectorias de X y $A_\alpha = X_\alpha \cap A$. Entonces las inclusiones $i_\alpha : (X_\alpha, A_\alpha) \hookrightarrow (X, A)$ inducen un isomorfismo

$$\bigoplus_\alpha H_q(X_\alpha, A; R) \xrightarrow{\cong} H_q(X, A; R).$$

Demostración. Dadas las inclusiones

$$\begin{array}{ccc} A_\alpha & \hookrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_\alpha & \hookrightarrow & X \end{array}$$

el diagrama inducido

$$\begin{array}{ccc} S_*(A_\alpha) & \hookrightarrow & S_*(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_*(X_\alpha) & \xrightarrow{(i_\alpha)_\#} & S_*(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_*(X_\alpha)/S_*(A_\alpha) & \xrightarrow{(\bar{i}_\alpha)_\#} & S_*(X)/S_*(A). \end{array}$$

es conmutativo pues la parte superior conmuta (al ser S_* un functor) y por lo tanto $(i_\alpha)_\#$ pasa al cociente. Por la propiedad universal de la suma directa, tenemos el homomorfismo

$$\bigoplus_\alpha S_*(X_\alpha, A_\alpha) := \bigoplus_\alpha S_*(X_\alpha)/S_*(A_\alpha) \rightarrow S_*(X)/S_*(A) =: S_*(X, A).$$

Sea σ un generador de $S_q(X, A)$. Como Δ^q es conectable por trayectorias, $\sigma(\Delta^q) \subseteq X_\alpha$ y ya que $\sigma(\Delta^q) \not\subseteq A_\alpha$, es generador de $S_q(X_\alpha)/S_q(A_\alpha)$. Luego $\bigoplus_\alpha (\bar{i}_\alpha)_\#$ es suprayectiva. La inyectividad se sigue del hecho de que las imágenes de dos generadores no pueden ser idénticas. Luego $\bigoplus_\alpha (\bar{i}_\alpha)_\#$ es un isomorfismo. De aquí que $H_q(\bigoplus_\alpha S_*(X_\alpha, A_\alpha)) \cong H_q(S_*(X, A))$. Por un ejercicio, $H_q(\bigoplus_\alpha S_*(X_\alpha, A_\alpha)) \cong \bigoplus_\alpha H_q(S_*(X_\alpha, A_\alpha))$, lo que completa la demostración.

Escolio 4.37. El grupo $S_*(X)/S_*(A)$ es un complejo de cadenas libre cuyos generadores son los simplejos singulares $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$ tales que $\sigma(\Delta^q) \not\subseteq A$.

Proposición 4.38. *Sea X un espacio y $A \subset X$ un subespacio. Entonces $H_0(X, A; R)$ es isomorfo a una suma directa de copias de R , una por cada componente por trayectorias que no intersecta a A .*

Demostración. Sea $\{X_\alpha\}_\alpha$ la familia de componentes por trayectorias de X y sea $A_\alpha = A \cap X_\alpha$. Por la proposición anterior, $H_0(X, A; R) \cong \bigoplus_\alpha H_0(X_\alpha, A_\alpha; R)$, y si $A_\alpha \neq \emptyset$, por la Proposición 4.35 $H_0(X_\alpha, A_\alpha; R) = 0$. Luego

$$H_0(X, A; R) = \bigoplus_{A_\alpha = \emptyset} H_0(X_\alpha, A_\alpha; R)$$

y ya sabemos que $H_0(X_\alpha, \emptyset; R) = H_0(X_\alpha; R) = R$.

Definimos el operador

$$\hat{\partial}_q : H_q(X, A; R) \rightarrow H_{q-1}(A; R)$$

a través de $\hat{\partial}_q[z] = [\partial_q z]$. Esto está bien definido ya que

$$\begin{aligned} [z'] = [z] &\Rightarrow z - z' \in B_q(X, A) \\ &\Rightarrow z - z' = \partial_{q+1}(c') + c'' \\ &\Rightarrow \partial_q(z) - \partial_q(z') = \partial_q(c'') \in B_{q-1}(A), \end{aligned}$$

que trae como consecuencia que $\hat{\partial}_q[z] = [\partial_q z] = [\partial_q z'] = \hat{\partial}_q[z']$.

Teorema 4.39. *Sea (X, A) una pareja de espacios topológicos. Entonces tenemos la sucesión exacta*

$$\cdots \rightarrow H_q(A; R) \xrightarrow{i_*} H_q(X; R) \xrightarrow{j_*} H_q(X, A; R) \xrightarrow{\hat{\partial}_q} H_{q-1}(A; R) \rightarrow \cdots$$

Demostración. Sea $[z] \in H_q(A; R)$. Se satisface

$$j_* i_* [z] = j_* [i_* z] = [j_* i_* z] \in H_q(X, A; R)$$

y esto último es nulo porque $z \in S_q(A)$.

Sea $[z] \in H_q(X; R)$ tal que $j_* [z] = 0$ en $H_q(X, A; R)$, lo que implica que $z \in B_q(X, A)$ y esto a su vez que $z = \partial_{q+1}(c') + i_{\#}(c'')$. De aquí que $z - i_{\#}(c'') = \partial_{q+1}(c')$, y así $[z] = [i_{\#}(c'')] = i_*[c''] \in H_q(X; R)$.

También $\hat{\partial}_q \circ j_* [z] = 0$. En efecto

$$\hat{\partial}_q j_* [z] = \hat{\partial}_q [j_* z] = [\partial_q j_* z] = [j_{\#} \partial_q z] = 0$$

ya que $z \in \text{núc } \partial_q$.

Sea $[z] \in H_q(X, A; R)$ y supongamos que $\hat{\partial}_q [z] = 0$. Entonces

$$\hat{\partial}_q [z] = [\partial_q(z)] = 0 \in H_{q-1}(A; R)$$

esto es, existe $c \in S_q(A)$ tal que $\partial_q(c) = \partial_q(z) = 0$. Así $c - z \in Z_q(X)$.

Finalmente, $i_* \circ \hat{\partial}_q [z] = 0$, dado que

$$i_* [\partial_q(z)] = [i_{\#} \partial_q(z)] = [\partial_q(z)] = [0],$$

pues $\partial_q|_A(z) = \partial_q(z)$ por pertenecer z a $S_{q-1}(A)$.

Si $i_*(c + \text{Im } \partial_q(A)) = \text{Im } \partial_q(X)$, entonces $i_{\#}c = \partial_q b$, y

$$\bar{\partial}_q j_{\#} b = j_{\#} \partial_q b = j_{\#} i_{\#} c = 0,$$

pues $c \in S_{q-1}(A)$. Así, $j_{\#} b \in \text{núc } \bar{\partial}_q$, pero

$$\hat{\partial}_q [j_{\#} b] = [\partial_q b] = [i_{\#} c] = [c],$$

lo que implica el teorema.

Teorema 4.40. Sean f y g funciones homótopas. Entonces

$$f_* = g_* : H_q(X; R) \rightarrow H_q(Y, R)$$

para toda q .

Corolario 4.41. La homología singular es un invariante homotópico.

Demostración. Lo anterior se puede reescribir considerando una nueva categoría que denotamos por **HTop** cuyos objetos son los espacios topológicos y cuyos morfismos son las clases de homotopía. En **HTop** los isomorfismos son precisamente las equivalencias homotópicas. En efecto, si $X \xrightarrow{[f]} Y$ y $Y \xrightarrow{[g]} X$, tenemos que $[g] \circ [f] = [\text{id}_X]$ si, y sólo si, $[g \circ f] = [\text{id}_X]$, y esto último si, y sólo si, $g \circ f \cong \text{id}_X$. Análogamente $[f \circ g] = [\text{id}_Y]$. En conclusión $X \cong Y$. Por lo ya visto $H_q(-, R) : \mathbf{HTop} \rightarrow R\text{-Mód}$ es un funtor que envía isomorfismos en isomorfismos.

Ejercicio 4.42. Probar el corolario anterior directamente.

Sea $\lambda_i : X \rightarrow X \times I$ para $i = 0, 1$ dadas por

$$\lambda_0(x) = (x, i).$$

Entonces $H\lambda_0 = f$ y $H\lambda_1 = g$. Aplicando homología, $(H \circ \lambda_0)_* = f_*$ y $(H \circ \lambda_1)_* = g_*$, y más aún $H_* \circ \lambda_{0*} = f_*$ y $H_* \circ \lambda_{1*} = g_*$. Si probamos que $\lambda_{0*} = \lambda_{1*}$, tendremos que $g_* = f_*$.

Recordando las definiciones λ_{0*} y λ_{1*} , sabemos que

$$\lambda_{i*}[z] = [\lambda_{i\#}(z)].$$

Queremos probar que $[\lambda_{0\#}(z)] = [\lambda_{1\#}(z)]$ si $[z] \in H_q(X; R)$ y $[\lambda_{i\#}(z)] \in H_q(X \times I; R)$ para $i = 0, 1$. Para tal efecto, requerimos una $(q + 1)$ -cadena con $S_{q+1}(X \times I)$ tal que $\partial_{q+1}(c) = \lambda_{0\#}(z) - \lambda_{1\#}(z)$. Para esto se necesitan morfismos diagonales T_q^X tales que

$$\begin{array}{ccccc} S_{q+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & S_q(X) & \xrightarrow{\partial_q} & S_{q-1}(X) \\ \lambda_{0\#} \downarrow & & \downarrow \lambda_{1\#} & & \downarrow \lambda_{0\#} \\ S_{q+1}(X \times I) & \xrightarrow{\partial'_{q+1}} & S_q(X \times I) & \xrightarrow{\partial'_q} & S_{q-1}(X \times I) \end{array}$$

$\swarrow T_q^X \quad \swarrow T_{q-1}^X$
 $\swarrow \quad \swarrow$

Estos morfismos deben satisfacer

$$\lambda_{0\#} - \lambda_{1\#} = \partial'_{q+1} T_q^X - T_{q-1}^X \partial_q.$$

Definición 4.43. Sean (C_*, ∂_*) y (D_*, ∂'_*) complejos de cadenas (de R -módulos) y sean $\phi, \psi : C_* \rightarrow D_*$ morfismos de cadenas. Decimos que ϕ es homótopo a ψ si existe una colección de homomorfismos $T_q : C_q \rightarrow D_{q+1}$ tales que

$$\phi_q - \psi_q = \partial'_{q+1} \circ T_q + T_{q-1} \circ \partial_q.$$

A la colección de morfismos T_q se le denomina homotopía de cadenas.

Ejercicio 4.44. Verificar que la homotopía de cadenas es una relación de equivalencia entre los morfismos de cadenas entre C_* y D_* .

Solución 4.45. La relación es reflexiva. En efecto,

$$0 = \phi_q - \phi_q = \partial'_{q+1} \circ 0 + 0 \circ \partial_q,$$

esto es, el morfismo 0 es una homotopía de cadenas entre un morfismo de cadenas y él mismo. Si ϕ es homótopo a ψ y

$$\phi_q - \psi_q = \partial'_{q+1} \circ T_q + T_{q-1} \circ \partial_q,$$

definiendo $T'_q = -T_q$, entonces

$$\psi_q - \phi_q = \partial'_{q+1} \circ T'_q + T'_{q-1} \circ \partial_q,$$

por lo que ψ es homótopo a ϕ , comprobándose así que la relación es simétrica. Finalmente, supongamos que ϕ es homótopo a ψ y que ψ es homótopo a θ . Existen homotopías T y T' tales que

$$\begin{aligned} \phi_q - \psi_q &= \partial'_{q+1} \circ T_q + T_{q-1} \circ \partial_q, \\ \psi_q - \theta_q &= \partial'_{q+1} \circ T'_q + T'_{q-1} \circ \partial_q. \end{aligned}$$

entonces, sumando las dos expresiones,

$$\phi_q - \theta_q = \partial'_{q+1} \circ (T_q + T'_q) + (T_{q-1} + T'_{q-1}) \circ \partial_q,$$

y $T_q + T'_q : C_q \rightarrow D_q$ es un homomorfismo de cadenas, lo que significa que ϕ es homótopo a θ . Por lo tanto, la relación es transitiva.

Ya que ϕ y ψ son morfismos de cadenas entonces tenemos los homomorfismos inducidos

$$\phi_*, \psi_* : H_q(C_*) \rightarrow H_q(D_*).$$

Si $\phi \equiv \psi$ y evaluamos en la clase de un q -ciclo $[z] \in H_q(C_*)$

$$\begin{aligned} (\phi_q - \psi_q)[z] &= [(\phi_q - \psi_q)(z)] \\ &= [\partial'_{q+1} T_q(z) + T_{q-1} \partial_q(z)] \\ &= [\partial'_{q+1} T_q(z)] = 0, \end{aligned}$$

lo que significa que $\phi_*[z] = \psi_*[z]$, es decir $\phi_* = \psi_*$.

Para este caso construiremos una homotopía de cadenas entre $\lambda_{0\#}$ y $\lambda_{1\#}$, $T_q^X : S_q(X) \rightarrow S_{q+1}(X \times I)$. Queremos construir T_q^X de manera “natural”, es decir, que la construcción para dos espacios esté relacionada de alguna forma “lógica”. Con más precisión, si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua queremos que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} S_q(X) & \xrightarrow{T_q^X} & S_{q+1}(X \times I) \\ f\# \downarrow & & \downarrow (f \times \text{id})\# \\ S_q(Y) & \xrightarrow{T_q^Y} & S_{q+1}(Y \times I) \end{array}$$

conmute. Para definir a T_q^X basta definirla sobre los generadores $\sigma \in S_q(X)$, $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$. Por lo tanto el diagrama

$$\begin{array}{ccc} S_q(\Delta^q) & \xrightarrow{T_q^X} & S_{q+1}(\Delta^q \times I) \\ \sigma\# \downarrow & & \downarrow (\sigma \times \text{id})\# \\ S_q(X) & \xrightarrow{T_q^Y} & S_{q+1}(X \times I) \end{array}$$

debe conmutar. Tenemos

$$T_q^X(\sigma) = T_q^X(\sigma\#(\text{id}_{\Delta^q})) = (\sigma \times \text{id})\#(T_q^{\Delta^q}(\text{id}_{\Delta^q})),$$

por lo que basta a definir $\mathcal{P}_q := T_q^{\Delta^q}(\text{id}_{\Delta^q}) \in S_{q+1}(\Delta^q \times I)$. Por definición, debe satisfacerse

$$\lambda_{1\#}(\text{id}_{\Delta^q}) - \lambda_{0\#}(\text{id}_{\Delta^q}) = \partial_{q+1} T_q^{\Delta^q}(\text{id}_{\Delta^q}) + T_{q-1}^{\Delta^q} \partial_q(\text{id}_{\Delta^q})$$

y de aquí que

$$\lambda_1 - \lambda_0 = \partial'_{q+1} \mathcal{P}_q + T_{q-1}^{\Delta^q} \partial_q(\text{id}_{\Delta^q}).$$

Desarrollamos el segundo sumando

$$\begin{aligned} T_{q+1}^{\Delta^q} \partial_q(\text{id}_{\Delta^q}) &= T_{q-1}^{\Delta^q} \left(\sum_{i=0}^q (-1)^i (\text{id}_{\Delta^q})^{(i)} \right) \\ &= T_{q-1}^{\Delta^q} \left(\sum_{i=0}^q (-1)^i F_q^i \right) \\ &= \sum_{i=0}^q (-1)^i T_{q-1}^{\Delta^q}(F_q^i). \end{aligned}$$

Expandiendo los términos de la sumatoria

$$\begin{aligned} T_{q-1}^{\Delta^q}(F_q^i) &= T_{q-1}^{\Delta^q}(F_{q\#}^i(\text{id}_{\Delta^{q-1}})) \\ &= (F_q^i \times \text{id}_I)\# T_{q-1}^{\Delta^{q-1}}(\text{id}_{\Delta^{q-1}}) \\ &= (F_q^i \times \text{id}_I)\# \mathcal{P}_{q-1}, \end{aligned}$$

por lo que

$$T_{q+1}^{\Delta^q} \partial_q(\text{id}_{\Delta^q}) = \sum_{i=0}^q (-1)^i (F_q^i \times \text{id}_I)\# \mathcal{P}_{q-1}.$$

Juntando todo lo anterior

$$\lambda_1 - \lambda_0 = \partial'_{q+1} \mathcal{P}_q + \sum_{i=0}^q (-1)^i (F_q^i \times \text{id}_I) \#.$$

Queda ver cómo construir \mathcal{P}_q necesitamos asociar a cada q -cadena una $(q+1)$ -cadena cuya frontera sea $\lambda_1 - \lambda_0 - \sum_{i=0}^q (-1)^i (F_q^i \times \text{id}_I) \# \mathcal{P}_{q-1}$.

4.3. Cadenas afines

Recordemos que el baricentro de Δ^q es $b_q = \frac{1}{q+1} \sum_{i=0}^q e_i$, y definimos el baricentro de $\Delta^q \times I$ como $p_q = (b_q, 1/2)$ y las funciones

$$\begin{aligned} d_q^t : \Delta^q &\rightarrow \Delta^q \times I \\ a &\mapsto (a, t) \end{aligned}$$

y $\tilde{F}_q^i = F_q^i \times \text{id}_I$, entonces

$$\tilde{F}_q^i \circ \tilde{F}_{q-1}^j = \tilde{F}_q^j \circ \tilde{F}_{q-1}^{i-1}, \quad (4.1)$$

$$\tilde{F}_q^i \circ d_{q-1}^t = d_q^t \circ F_q^i. \quad (4.2)$$

Definición 4.46. Sea $\sigma : \Delta^q \rightarrow \mathbb{R}^n$ un simplejo afín dado por $\sigma = [v_0, \dots, v_q]$ y sea $v \in \mathbb{R}^n$. Definimos un $(q+1)$ -simplejo afín que denotaremos como $v \cdot \sigma$ como $v \cdot \sigma = [v, v_0, \dots, v_q]$.

Lema 4.47. Las caras de $v \cdot \sigma$ son

$$(v \cdot \sigma)^{(i)} = \begin{cases} \sigma, & i = 0, \\ v \cdot \sigma^{(i-1)}, & i > 0. \end{cases}$$

Demostración. Como

$$\begin{array}{ccc} \Delta^q & \xrightarrow{(v \cdot \sigma)^{(i)}} & \mathbb{R}^n \\ F_{q+1}^i \downarrow & \nearrow v \cdot \sigma & \\ \Delta^{q+1} & & \end{array}$$

Es claro que $\sigma = [v_0, \dots, v_q] = (v \cdot \sigma)^{(0)}$. Si $i > 0$,

$$v \cdot \sigma^{(i)} = \begin{cases} (v \cdot \sigma)(e_j) = \begin{cases} v, & j = 0, \\ v_{i-1}, & j > 0, \end{cases} & j < i, \\ (v \cdot \sigma)(e_{j+1}) = v_j, & j \geq i, \end{cases}$$

así que $(v \cdot \sigma) F_{q+1}^i = [v, v_0, \dots, v_{i-2}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_q] = v \cdot \sigma^{(i-1)}$.

Lema 4.48. Sea $z = \sum_{\sigma} r_{\sigma} \sigma$ un q -ciclo afín, si definimos $v \cdot z = \sum_{\sigma} r_{\sigma} (v \cdot \sigma)$, entonces

$$\partial_{q+1}(v \cdot z) = z.$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} \partial_{q+1}(v \cdot z) &= \partial_{q+1} \left(\sum_{\sigma} r_{\sigma} (v \cdot \sigma) \right) = \sum_{\sigma} r_{\sigma} \partial_{q+1}(v \cdot \sigma) \\ &= \sum_{\sigma} r_{\sigma} \left(\sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i (v \cdot \sigma)^{(i)} \right) = \sum_{\sigma} r_{\sigma} (\sigma - v \cdot \partial_q(\sigma)) \\ &= \sum_{\sigma} r_{\sigma} \sigma - \sum_{\sigma} r_{\sigma} v \cdot \partial_q(\sigma) = z - v \cdot \sum_{\sigma} r_{\sigma} \partial_q(\sigma) \\ &= z - v \cdot \partial_q \left(\sum_{\sigma} r_{\sigma} \sigma \right) = z - v \cdot \partial_q(z), \end{aligned}$$

y como $\partial_q(z) = 0$, el lema se sigue.

Definición 4.49. Para $q = 0$, sea $\mathcal{P}_0 \in S_{q+1}(\Delta^q \times I)$ definido como

$$\mathcal{P}_0 = p_0 \cdot (\lambda_0^{\Delta^0} - \lambda_1^{\Delta^0})$$

y en general

$$\mathcal{P}_q = p_q \cdot (\lambda_1^{\Delta^q} - \lambda_0^{\Delta^q} - \sum_{i=0}^q (-1)^i (\tilde{F}_q^i)_{\#}(\mathcal{P}_{q-1}))$$

Lema 4.50. Se satisface

$$\begin{aligned} \partial_1(\mathcal{P}_0) &= \lambda_1^{\Delta^0} - \lambda_0^{\Delta^0}, \\ \partial_{q+1}(\mathcal{P}_q) &= \lambda_1^{\Delta^q} - \lambda_0^{\Delta^q} - \sum_{i=0}^q (-1)^i (\tilde{F}_q^i)_{\#} \mathcal{P}_{q-1} =: z_q \in \text{núc } \partial_q. \end{aligned}$$

Definición 4.51. Sea X un espacio topológico. Definimos el homomorfismo $T_q^X : S_q(X) \rightarrow S_{q+1}(X \times I)$ como

$$T_q^X(\sigma) = (\sigma \times \text{id}_I)(\mathcal{P}_q)$$

donde $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$ y $(\sigma \times \text{id})_q : S_{q+1}(\Delta^q \times I) \rightarrow S_{q+1}(X \times I)$.

Lema 4.52. Se satisface $\lambda_{1\#} - \lambda_{0\#} = \partial_{q+1} \circ T_q^X + T_{q-1} \partial_q$.

Demostración. Sea $\sigma \in S_q(X)$. Entonces

$$\begin{aligned}
(\partial_{q+1} \circ T_q^X + T_{q-1}^X \circ \partial_q)(\sigma) &= \partial_{q+1} \circ T_q^X(\sigma) + T_{q-1}^X \circ \partial_q(\sigma) \\
&= \partial_{q+1}((\sigma \times \text{id}_I)_{\#}(\mathcal{P}_q)) + T_{q-1}^X \left(\sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma^{(i)} \right) \\
&= (\sigma \times \text{id}_I)_{\#} \partial_{q+1} \mathcal{P}_q + \sum_{i=0}^q (-1)^i T_{q-1}^X \sigma^{(i)}. \quad (4.3)
\end{aligned}$$

Para evaluar $T_{q-1}^X(\sigma^{(i)})$, recordemos que $\sigma^{(i)} = \sigma \circ F_q^i$. Claramente

$$(\sigma \circ F_q^i) \times \text{id}_I = (\sigma \times \text{id}_I) \circ \tilde{F}_q^i$$

y así

$$\begin{aligned}
T_{q-1}^X(\sigma^{(i)}) &= T_{q-1}^X(\sigma \circ F_q^i) \\
&= ((\sigma \circ F_q^i) \times \text{id}_I)_{\#} \mathcal{P}_{q-1} \\
&= (\sigma \times \text{id}_X) \circ \tilde{F}_q^i(\mathcal{P}_{q-1}).
\end{aligned}$$

Sustituyendo en (4.3), tenemos

$$\begin{aligned}
(\partial_{q+1} \circ T_q^X + T_{q-1}^X \circ \partial_q)(\sigma) &= (\sigma \times \text{id}_I)_{\#} \partial_{q+1} \mathcal{P}_q \\
&\quad + \sum_{i=0}^q (-1)^i (\sigma \times \text{id}_X) \circ \tilde{F}_q^i(\mathcal{P}_{q-1}) \\
&= (\sigma \times \text{id}_I)_{\#} (\lambda_1^{\Delta^q} - \lambda_0^{\Delta^q}) \\
&\quad + \sum_{i=0}^q (-1)^i \tilde{F}_q^i(\mathcal{P}_{q-1}) \\
&= \lambda_1_{\#}(\sigma) - \lambda_0_{\#}(\sigma).
\end{aligned}$$

Todo lo anterior nos lleva al teorema siguiente.

Teorema 4.53. *Sean f y g funciones continuas homótopas. Entonces*

$$f_* = g_* : H_q(X; R) \rightarrow H_q(Y; R)$$

para toda q .

Corolario 4.54. *La homología singular es un invariante homotópico.*

Corolario 4.55. *Si X es un espacio contraíble entonces*

$$H_q(X; R) = \begin{cases} R, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0. \end{cases}$$

Demostración. Sabemos que X es contraíble si, y sólo si, $X \cong \{*\}$. Entonces $H_q(X; R) \cong H_q(*; R) = R$.

Ejemplo 4.56. Vemos fácilmente que

$$H_q(\mathbb{R}^n; R) = H_q(D^n; R) = H_q(CX; R) = H_q(S^\infty; R) = R.$$

para cualquier espacio topológico X .

De lo anterior obtuvimos dos construcciones. La primera es el homomorfismo T tal que

$$\begin{array}{ccc} S_q(X) & \xrightarrow{T_q^X} & S_{q+1}(X \times I) \\ f_\# \downarrow & & \downarrow (f \times \text{id}_I)_\# \\ S_q(Y) & \xrightarrow{T_q^Y} & S_{q+1}(Y \times I) \end{array}$$

conmuta para cada $f : X \times Y$ y el segundo el homomorfismo $\hat{\partial}_q^{(X,A)}$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_q(X, A; R) & \xrightarrow{\hat{\partial}_q^{(X,A)}} & H_{q-1}(A; R) \\ f_\# \downarrow & & \downarrow (f|_A)_\# \\ H_q(Y, B; R) & \xrightarrow{\hat{\partial}_q^{(Y,A)}} & H_{q-1}(B; R) \end{array}$$

Ejercicio 4.57. Verificar que los diagramas anteriores efectivamente, conmutan.

Solución 4.58. Para el caso del primero

$$\begin{aligned} (f \times \text{id}_I)_\# \circ T_q^X(\sigma) &= (f \times \text{id}_I)_\# \circ (\sigma \times \text{id}_I)_q(\mathcal{P}_q) \\ &= (f \circ \sigma \times \text{id}_I)_q(\mathcal{P}_q) \\ &= T_q^Y(f \circ \sigma) = T_q^Y \circ f_\#(\sigma) \end{aligned}$$

mientras que para el segundo

$$\begin{aligned} (f|_A)_\# \hat{\partial}_q^{(X,A)}[z] &= (f|_A)_\# [\partial_q z] = [f|_A \circ \partial_q(z)] \\ &= [\partial_q \circ f(z)] = \hat{\partial}_q^{(Y,B)}[f(z)] \\ &= \hat{\partial}_q^{(Y,B)} \circ f_\#[z]. \end{aligned}$$

Definición 4.59. Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} categorías y ϕ y ψ funtores de \mathcal{C} y \mathcal{D} . Una transformación natural T entre ϕ y ψ asocia a cada objeto $c \in \mathcal{C}$ un morfismo $\phi(c) \xrightarrow{T^c} \psi(c)$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \phi(c) & \xrightarrow{T^c} & \psi(c) \\ \phi(f) \downarrow & & \downarrow \psi(f) \\ \phi(c') & \xrightarrow{T^{c'}} & \psi(c') \end{array}$$

El concepto de naturalidad es el origen de la teoría general de categorías y aparece en el artículo “General Theory of Natural Equivalences” de S. Eilenberg y S. MacLane, en 1945.

Definición 4.60. Si para cada objeto $c \in \mathcal{C}$, el morfismo $T^c : \phi(c) \rightarrow \psi(c)$ es un isomorfismo decimos que T es una equivalencia natural.

Ejemplo 4.61. Hay una equivalencia natural entre la homología simplicial de X y cualquier homología singular.

Ejemplo 4.62. También T_q es una transformación natural, con $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$ y $\mathcal{D} = R\text{-Mód}$. Tenemos que $\phi = S_q : \mathbf{Top} \rightarrow R\text{-Mód}$, $\psi = S_{q+1} \circ \alpha : \mathbf{Top} \rightarrow R\text{-Mód}$, donde $\alpha : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top}$, con $X \xrightarrow{\alpha} X \times I$.

4.4. Escisión

Teorema 4.63. Sea (X, A) una pareja de espacios topológicos y $U \subset A$ un subespacio tal que $\bar{U} \subset \overset{\circ}{A}$. Entonces la inclusión $i : (X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow (X, A)$ induce un isomorfismo en todos los módulos de homología

$$i_* : H_q(X \setminus U, A \setminus U; R) \rightarrow H_q(X, A; R).$$

La idea es considerar las cadenas

$$c' = \sigma_1'' + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 \in H_1(X \setminus U, A \setminus U; R)$$

y

$$c = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 \in H_1(X, A; R)$$

y demostrar que $[c] = [c']$ en $H_1(X, A; R)$ ya que $c - c' = \sigma_1 - \sigma_1''$ y si definimos $d : \Delta^2 \rightarrow X$, entonces $c - c' = \sigma_1 - \sigma_1'' = \partial_2 \cdot d - \sigma_1' \in B_1(X, A)$.

Definición 4.64. Sea X un espacio y $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una familia de subespacios de X . Definimos el complejo de cadenas $S_*^{\mathcal{U}}$ donde $S_q^{\mathcal{U}}(X)$ es el módulo libre generado por los q -simplejos singulares tales que para cada σ hay un subespacio U_α tal que $\sigma(\Delta^q) \subset U_\alpha$.

Claramente $S_q^{\mathcal{U}} \subset S_q(X)$. El operador ∂_q se restringe a $S_q^{\mathcal{U}}(X)$ ya que si $\sigma \in S_q^{\mathcal{U}}(X)$ entonces $\sigma(\Delta^q) \subset U_\alpha$. Como $\partial_q(\sigma) = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma^{(i)}$ y $\sigma^{(i)} = \sigma \circ F_q^i \subset U_\alpha$ si $\sigma(\Delta^q) \subset U_\alpha$, luego $\partial_q(\sigma) \in S_{q-1}^{\mathcal{U}}(X)$.

Teorema 4.65. Si $X = \cup_\alpha \overset{\circ}{U}_\alpha$, entonces $i : S_q^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow S_q(X)$ es una equivalencia homotópica de cadenas y por lo tanto $H_q(S_*^{\mathcal{U}}(X)) \cong H_q(S_*(X)) = H(X; R)$.

Para demostrar este teorema, necesitamos un concepto nuevo.

Definición 4.66. Sea $\phi : (C_*, \partial_*) \rightarrow (C'_*, \partial'_*)$ un morfismo de cadenas. Decimos que ϕ es una equivalencia homotópica de cadenas si existe un morfismo de cadenas $\psi : (C'_*, \partial'_*)$ tal que $\phi \circ \psi \simeq \text{id}_{C'_*}$ y $\psi \circ \phi \simeq \text{id}_{C_*}$.

En particular, $\phi_* : H_*(C_*, \partial_*) \xrightarrow{\cong} H_*(C'_*, \partial'_*)$ ya que $\psi \circ \phi \simeq \text{id}_{C_*}$ y entonces

$$\begin{aligned} \psi_* \circ \phi_* &= (\psi \circ \phi)_* = (\text{id}_{C_*})_* = \text{id}_{H_*(C_*)}, \\ \phi_* \circ \psi_* &= (\phi \circ \psi)_* = (\text{id}_{C'_*})_* = \text{id}_{H_*(C'_*)}. \end{aligned}$$

Probaremos que $i : S_*^{\mathcal{U}} \hookrightarrow S_*(X)$ es una equivalencia homotópica de cadenas. Para esto hay que definir un inverso homotópico de cadenas $\tau^X : S_*(X) \rightarrow S_*^{\mathcal{U}}(X)$ que sea natural. La naturalidad permitiría definirlo para espacios sencillos y así extenderlo a otros espacios más complicados.

Antes, definimos un operador

$$\text{sd}_q^X : S_q(X) \rightarrow S_q(X)$$

llamado operador subdivisión, que sea natural. Esto significa que, si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccc} S_q(X) & \xrightarrow{\text{sd}_q^X} & S_q(X) \\ f_{\#} \downarrow & & \downarrow f_{\#} \\ S_q(Y) & \xrightarrow{\text{sd}_q^Y} & S_q(Y) \end{array}$$

conmuta. En particular, para definir $\text{sd}_q^X(\sigma)$, donde $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$ es un generador de $S_q(X)$, se obtiene el diagrama

$$\begin{array}{ccc} S_q(\Delta^q) & \xrightarrow{\text{sd}_q^X} & S_q(\Delta^q) \\ \sigma_{\#} \downarrow & & \downarrow \sigma_{\#} \\ S_q(X) & \xrightarrow{\text{sd}_q^X} & S_q(X) \end{array}$$

que indica que deben satisfacerse la relación

$$\text{sd}_q^X(\sigma) = \text{sd}_q^X(\sigma_{\#}(\text{id}_{\Delta^q})) = \sigma_{\#} \text{sd}_q^X(\text{id}_{\Delta^q});$$

construiremos, pues, $\mathcal{S}_q = \text{sd}_q^X(\text{id}_{\Delta^q})$.

Dado que sd_q^X debe pasar a la homología, necesitamos que sea un morfismo de cadenas. Por consiguiente, el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
S_q(X) & \xrightarrow{\partial_q} & S_{q-1}(X) \\
\text{sd}_q^X \downarrow & & \downarrow \text{sd}_{q-1}^X \\
S_q(X) & \xrightarrow{\partial_q} & S_{q-1}(X).
\end{array}$$

debe conmutar. En particular

$$\begin{array}{ccc}
S_q(\Delta^q) & \xrightarrow{\partial_q} & S_{q-1}(\Delta^q) \\
\text{sd}_q^{\Delta^q} \downarrow & & \downarrow \text{sd}_{q-1}^{\Delta^q} \\
S_q(\Delta^q) & \xrightarrow{\partial_q} & S_{q-1}(\Delta^q).
\end{array}$$

De aquí deducimos que

$$\begin{aligned}
\partial_q(\mathcal{S}_q) &= \partial_q(\text{sd}_q^{\Delta^q}(\text{id}_{\Delta^q})) \\
&= \text{sd}_{q-1}^{\Delta^q}(\partial_q(\text{id}_{\Delta^q})) \\
&= \text{sd}_{q-1}^{\Delta^q} \left(\sum_{i=0}^q (-1)^i F_q^i \right) \\
&= \sum_{i=0}^q (-1)^i \text{sd}_{q-1}^{\Delta^q}(F_q^i),
\end{aligned}$$

y como $\text{sd}_q^X(\sigma) = \sigma_{\#}(\mathcal{S}_q)$, entonces

$$\text{sd}_{q-1}^{\Delta^q}(F_q^i) = (F_q^i)_{\#}(\mathcal{S}_{q-1})$$

lo que trae como consecuencia que

$$\partial_q(\mathcal{S}_q) = \sum_{i=0}^q (-1)^i (F_q^i)_{\#}(\mathcal{S}_{q-1}).$$

En seguida, definimos inductivamente a \mathcal{S}_q . Primero, $S_0(\Delta^0) \ni \mathcal{S}_0 = \text{id}_{\Delta^0}$. Si $\mathcal{S}_1 \in S_1(\Delta^1)$ es una 1-cadena tal que

$$\partial(\mathcal{S}_1) = (F_0^1)_{\#}(\mathcal{S}_0) - (F_1^1)_{\#}(\mathcal{S}_0).$$

Como sabemos que $\partial_{q+1}(r \cdot z) = z$ para un ciclo afín $z \in \mathbb{R}^n$ y $r \in \mathbb{R}^n$. Definimos

$$\mathcal{S}_q = b_q \cdot \left(\sum_{i=0}^q (-1)^i (F_q^i)_{\#}(\mathcal{S}_{q-1}) \right).$$

De lo anterior resulta también que

$$\text{sd}_{q-1}^{\Delta^q}(\partial_q(\text{id}_{\Delta^q})) = \sum_{i=0}^q (-1)^i (F_q^i)_\#(\mathcal{S}_{q-1}),$$

por lo que podemos escribir a \mathcal{S}_q de otra forma:

$$\mathcal{S}_q = b_q \cdot (\text{sd}_{q-1}^{\Delta^q}(\partial_q(\text{id}_{\Delta^q}))).$$

Definición 4.67. Definimos el morfismo $\text{sd}_q^X : S_q(X) \rightarrow S_q(X)$ a través de

$$\text{sd}_q^X(\sigma) = \sigma_\#(\mathcal{S}_q).$$

Lema 4.68. El morfismo sd^X es una transformación natural.

Demostración. Sea $f : X \rightarrow Y$ continua. El diagrama

$$\begin{array}{ccc} S_q(X) & \xrightarrow{\text{sd}_q^X} & S_q(X) \\ f_\# \downarrow & & \downarrow f_\# \\ S_q(Y) & \xrightarrow{\text{sd}_q^Y} & S_q(Y) \end{array}$$

conmuta. En efecto,

$$\begin{aligned} f_\# \text{sd}_q^X(\sigma) &= f_\#(\sigma_\# \mathcal{S}_q) \\ &= (f \circ \sigma)_\# \mathcal{S}_q = \text{sd}_q^Y(f \circ \sigma) \\ &= \text{sd}_q^Y(f_\#(\sigma)). \end{aligned}$$

Lema 4.69. El morfismo sd^X es un morfismo de cadenas.

Demostración. Probaremos que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} S_q(X) & \xrightarrow{\text{sd}_q^X} & S_q(X) \\ \partial_q \downarrow & & \downarrow \partial_q \\ S_{q-1}(X) & \xrightarrow{\text{sd}_{q-1}^X} & S_{q-1}(X) \\ \partial_q \downarrow & & \downarrow \partial_{q-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_0(X) & \xrightarrow{\text{sd}_0^X} & S_0(X) \\ \partial_0=0 \downarrow & & \downarrow \partial_0=0 \\ 0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

conmuta.

Denotemos por d_q al q -ésimo cuadrado del diagrama donde d_0 es el cuadrado inferior. Es claro que este último conmuta, pues $\partial_0 = 0$. Supongamos que d_{q-1} conmuta, y demostremos que d_q es conmutativo. Ya sabemos que $\partial_{q+1}(r \cdot c) = c - r \cdot \partial_q(c)$. Sea $\sigma \in S_q(X)$. Luego

$$\begin{aligned} \partial_q \text{sd}_q^X(\sigma) &= \partial_q \sigma_{\#}(\mathcal{S}_q) \\ &= \partial_q \sigma_{\#}(b_q \cdot (\text{sd}_{q-1}^{\Delta^q}(\partial_q(\text{id}_{\Delta^q}))) \\ &= \sigma_{\#} \partial_q(b_q \cdot (\text{sd}_{q-1}^{\Delta^q}(\partial_q(\text{id}_{\Delta^q}))) \\ &= \sigma_{\#}(\text{sd}_{q-1}^{\Delta^{q-1}}(\partial_q(\text{id}_{\Delta^q})) - \\ &\quad r_q \cdot \partial_{q-1}(\text{sd}_{q-1}^{\Delta^q}(\partial_q(\text{id}_{\Delta^q}))). \end{aligned}$$

El último sumando se transforma

$$r_q \cdot \partial_{q-1}(\text{sd}_{q-1}^{\Delta^q}(\partial_q(\text{id}_{\Delta^q}))) = r_q \cdot \text{sd}_{q-1}^{\Delta^q}(\partial_{q-1}(\partial_q(\text{id}_{\Delta^q}))) = 0$$

pues d_{q-1} conmuta. Así,

$$\begin{aligned} \partial_q \text{sd}_q^X(\sigma) &= \sigma_{\#}(\text{sd}_{q-1}^{\Delta^{q-1}}(\partial_q(\text{id}_{\Delta^q}))) \\ &= \sigma_{\#}(\text{sd}_{q-1}^{\Delta^{q-1}}(\partial(\text{id}_{\Delta^q}))) \\ &= \text{sd}_{q-1}^X \sigma_{\#} \partial_q(\text{id}_{\Delta^q}) \\ &= \text{sd}_{q-1}^X \partial_q(\sigma), \end{aligned}$$

lo que comprueba la afirmación hecha.

Vamos a demostrar que sd^X no cambia la clase de homología, probando que

$$\text{sd}^X \cong \text{id}_{S_*(X)}$$

mediante una homotopía de cadenas

$$h_q^X : S_q(X) \rightarrow S_{q+1}(X)$$

tal que

$$\partial_{q+1} \circ h_q^X + h_{q+1}^X \partial_q = \text{sd}_q^X - \text{id}_{S_*(X)}$$

Pidiendo que h_q sea una transformación natural basta definir

$$\mathfrak{h} := h_q^{\Delta^q}(\text{id}_{\Delta^q}) \in S_{q+1}(\Delta^q).$$

Así,

$$\partial_{q+1}(\mathfrak{h}_q) + \sum_{i=0}^q (-1)^i (F_q^i)_{\#}(\mathfrak{h}_{q-1}) = \mathcal{S}_q - \text{id}_{\Delta^q} \quad (4.4)$$

donde $\mathcal{S}_q = \text{sd}^{\Delta^q}(\text{id}_{\Delta^q})$. Definimos \mathfrak{h}_q por inducción:

$$\mathfrak{h}_0 \in S_1(\Delta^0), \quad \Delta^1 \xrightarrow{\mathfrak{h}_0} \Delta^0,$$

es la función constante, y satisface lo requerido pues $\partial_1(\mathfrak{h}_0) = 0$ y

$$\mathcal{S}_0 - \text{id}_{\Delta^0} = \text{id}_{\Delta^0} - \text{id}_{\Delta^0} = 0.$$

Ahora, si \mathfrak{h} está definido para $0 \leq i \leq q$, despejando de (4.4),

$$\partial_{q+1}(\mathfrak{h}_q) = \mathcal{S}_q - \text{id}_{\Delta^q} - \sum_{i=0}^q (-1)^i (F_q^i)_\#(\mathfrak{h}_{q-1}),$$

y vemos que el lado derecho de la expresión anterior es un ciclo afín, por lo que usando el Lema, podemos definir

$$\mathfrak{h}_q = b_q \cdot \left(\mathcal{S}_q - \text{id}_{\Delta^q} - \sum_{i=0}^q (-1)^i (F_q^i)_\#(\mathfrak{h}_{q-1}) \right)$$

donde b_q es el baricentro de Δ^q . Dado $\sigma \in S_q(X)$, definimos

$$h_q^X(\sigma) = \sigma_\#(\mathfrak{h}_q) \in S_{q+1}(X).$$

Ejercicio 4.70. Verificar que h^X así definida es una homotopía de cadenas entre sd^X e id .

Sea X un espacio métrico y $A \subset X$. Si X es compacto y \mathcal{U} es una cubierta de X , entonces existe $\epsilon > 0$ tal que

$$A \subset X, \text{diám}(A) < \epsilon \Rightarrow \exists(U \in \mathcal{U}) A \subset U.$$

A un número con esta propiedad se le llama número de Lebesgue. Se puede probar lo siguiente.

Proposición 4.71. Sea $\sigma : \Delta^q \rightarrow \mathbb{R}^q$ un simplejo singular afín. Entonces $\text{sd}_q^{\mathbb{R}^q}(\sigma)$ contiene solamente simplejos de diámetro no mayor que

$$\left(\frac{q}{q+1} \right) \text{diám}(\Delta^q).$$

En particular, $(\text{sd}_q^{\Delta^q})^r$ contiene solamente simplejos de diámetro no mayor que

$$\left(\frac{q}{q+1} \right)^r \text{diám}(\Delta^q).$$

Lema 4.72. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de subconjuntos de X tales que $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = X$. Para cualquier q -simplejo singular $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$, existe $r \geq 0$ tal que $(\text{sd}_q^{\Delta^q})^r \in S_q^{\mathcal{U}}(X)$.

Demostración. Como $\bigcup_{\alpha \in A} \overset{\circ}{U}_\alpha = X$, entonces $\Delta^q = \bigcup_{\alpha \in A} \sigma^{-1}(\overset{\circ}{U}_\alpha)$. Sea ϵ un número de Lebesgue de la cubierta. Sea $r \geq 0$ tal que

$$\left(\frac{q}{q+1}\right)^r \text{diám}(\Delta^q) < \epsilon.$$

Por la proposición anterior, $(\text{sd}_q^{\Delta^q})^r$ contiene solamente simplejos de diámetro menor o igual a $\left(\frac{q}{q+1}\right)^r \text{diám}(\Delta^q)$, luego todos los simplejos τ de $(\text{sd}_q^{\Delta^q})^r$ satisfacen $\text{diám} \tau < \epsilon$. Puesto que

$$\left(\text{sd}_q^{\Delta^q}(\sigma)\right)^r = \sigma_\# \left(\text{sd}_q^{\Delta^q}(\text{id}_{\Delta^q}(\sigma))\right)^r,$$

entonces todos los simplejos de $(\text{sd}_q^{\Delta^q}(\sigma))^r$ son de la forma $\sigma \circ \tau$ donde

$$\tau : \Delta^q \rightarrow \Delta^q \in \left(\text{sd}_q^{\Delta^q}(\text{id}_{\Delta^q}(\sigma))\right)^r.$$

Además para cada τ existe un α tal que $\tau(\Delta^q) \subset \sigma^{-1}(\overset{\circ}{U}_\alpha)$. Por lo tanto

$$\sigma \circ \tau(\Delta^q) \subset \overset{\circ}{U}_\alpha \subset U_\alpha,$$

luego

$$\left(\text{sd}_q^{\Delta^q}\right)^r \in S_q^{\mathcal{U}}(X).$$

Al menor de los enteros que satisfacen las conclusiones del lema anterior lo denotaremos como $r(\sigma)$. Tenemos que $r(\sigma) = 0$ si, y sólo si, $\sigma \in S_q^{\mathcal{U}}(X)$ y $r(\sigma^{(i)}) \leq r(\sigma)$.

A continuación, intentemos construir el morfismo de cadenas

$$\tau_q : S_q(X) \rightarrow S_q^{\mathcal{U}}(X)$$

que es el inverso de la inclusión $S_q^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{i} S_q(X)$. Tentativamente haríamos

$$\tau_q(\sigma) = (\text{sd}_q^X(\sigma))^{r(\sigma)} \in S_q^{\mathcal{U}}(X),$$

sin embargo, esto no es un morfismo de cadenas.

Vamos a definir primero una homotopía de cadenas Q entre $i \circ \tau$ e $\text{id}_{S_q(X)}$. Para esto recordemos que tenemos una homotopía de cadenas

$$h_q^X : S_q(X) \rightarrow S_{q+1}(X)$$

que satisface

$$\partial_{q+1} \circ h_q^X + h_{q-1}^X \circ \partial_q = \text{sd}_q^X - \text{id}_{S_q(X)}. \quad (4.5)$$

Definimos $Q_q : S_q(X) \rightarrow S_{q+1}(X)$ como

$$Q_q(\sigma) = \sum_{0 \leq j \leq r(\sigma)-1} h_q^X(\text{sd}_q^X(\sigma))^j.$$

Ya que $r(\sigma) = 0$ si, y sólo si, $\sigma \in S_q^{\mathcal{U}}(X)$, entonces $Q_q(\sigma) = 0$ si, y sólo si, $\sigma \in S_q^{\mathcal{U}}(X)$. Comprobemos que, efectivamente, Q es una homotopía de cadenas.

$$\begin{aligned} Q_{q-1}(\partial_q(\sigma)) &= Q_{q-1} \left(\sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma^{(i)} \right) \\ &= \sum_{i=0}^q (-1)^i Q_{q-1}(\sigma^{(i)}). \end{aligned}$$

Tenemos que

$$Q_{q-1}(\sigma^{(i)}) = \sum_{0 \leq j \leq r(\sigma^{(i)})-1} h_{q-1}^X(\text{sd}_q^X)^j(\sigma^{(i)})$$

y así,

$$Q_{q-1}(\partial_q(\sigma)) = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sum_{0 \leq j \leq r(\sigma^{(i)})-1} h_{q-1}^X((\text{sd}_q^X)^j(\sigma)).$$

Por otro lado

$$\partial_{q+1} Q_q(\sigma) = \partial_{q+1} \left(\sum_{0 \leq j \leq r(\sigma)-1} h_q^X((\text{sd}_q^X)^j(\sigma)) \right),$$

y cada sumando de esta expresión es (despejando de (4.5))

$$\begin{aligned} \partial_{q+1} h_q^X((\text{sd}_q^X)^i(\sigma)) &= \text{sd}_q^X((\text{sd}_q^X)^i(\sigma)) - (\text{sd}_q^X)^i(\sigma) - h_{q-1}^X(\partial_q(\text{sd}_q^X)^i(\sigma)) \\ &= (\text{sd}_q^X(\sigma))^{i+1} - (\text{sd}_q^X(\sigma))^i \\ &\quad - h_{q-1}^X \left((\text{sd}_q^X)^i \left(\sum_{j=0}^q (-1)^j \sigma^{(j)} \right) \right). \end{aligned}$$

Sustituyendo y *mutatis mutandis*,

$$\partial_{q+1} Q_q(\sigma) = (\text{sd}_q^X(\sigma))^{r(\sigma)} - \sigma - \sum_{0 \leq i \leq r(\sigma)-1} \sum_{j=0}^q (-1)^j h_{q-1}^X((\text{sd}_q^X)^i(\sigma^{(j)})).$$

En suma,

$$\begin{aligned} \partial_{q+1} Q_q(\sigma) + Q_{q-1} \partial_q(\sigma) &= (\text{sd}_q^X)^{r(\sigma)}(\sigma) - \sigma \\ &\quad + \sum_{i=0}^q (-1)^i \sum_{r(\sigma^{(i)}) \leq j \leq r(\sigma)-1} h_{q-1}^X((\text{sd}_q^X)^i(\sigma^{(j)})). \end{aligned}$$

Demostración (del Teorema 4.63). Hagamos

$$\tau_q(\sigma) = \sigma + \partial_{q+1}Q_q(\sigma) + Q_{q+1}\partial_q(\sigma).$$

De la definición de $r(\sigma)$, es claro que el primer sumando está en $S_q^{\mathcal{U}}(X)$. Como $j \geq r(\sigma^{(i)})$, entonces $\text{sd}_{q-1}^X(\sigma^{(i)}) \in S_q^{\mathcal{U}}(X)$. Sólo resta ver que al aplicar h_{q-1}^X nos quedamos en $S_q^{\mathcal{U}}(X)$. Sea $c = \sum_{\sigma} r_{\sigma}\sigma \in S_q^{\mathcal{U}}(X)$. Para cada σ existe u_{α} tal que $\sigma(\Delta^q) \subset U_{\alpha}$. Consideremos a $h_q^X(\sigma) = \sigma_{\#}(\mathfrak{h}_q)$, donde $\mathfrak{h}_q \in S_{q+1}(\Delta^q)$. Cada complejo de la cadena $\sigma_{\#}(\mathfrak{h}_q)$ es de la forma $\Delta^{q+1} \xrightarrow{\tau} \Delta^q \xrightarrow{\sigma} X$ donde τ es un complejo de la cadena \mathfrak{h}_q . Ya que $\sigma \subset U_{\alpha}$ para algún α , también tenemos que $\sigma \circ \tau(\Delta^{q+1}) \subset U_{\alpha}$. Por lo tanto, los simplejos de $h_q^X(\sigma) := \sigma_{\#}(\mathfrak{h}_q)$ están en $S_q^{\mathcal{U}}(X)$.

Tenemos que τ es un morfismo de cadenas. En efecto

$$\begin{aligned} \partial_q \tau_q(\sigma) &= \partial(\sigma + \partial_{q+1}Q_q(\sigma) + Q_{q+1}\partial_q(\sigma)) \\ &= \partial_q(\sigma) + \partial_q Q_{q+1}\partial_q(\sigma), \end{aligned}$$

mientras que

$$\tau_{q-1}\partial_q(\sigma) = \partial_q(\sigma) + \partial_q Q_{q-1}\partial_q(\sigma),$$

por lo que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} S_q(X) & \xrightarrow{\tau_q} & S_q^{\mathcal{U}}(X) \\ \downarrow \partial_q & & \downarrow \partial_q \\ S_{q-1}(X) & \xrightarrow{\tau_{q-1}} & S_{q-1}^{\mathcal{U}}(X) \end{array}$$

conmuta. Por construcción, es claro que

$$\partial_{q+1}Q_q(\sigma) + Q_{q-1}\partial_q(\sigma) = \tau_q(\sigma) - \sigma,$$

por lo que $i \circ \tau_q \simeq \text{id}_{S_*(X)}$. Por otra parte, tenemos que

$$S_q^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{i} S_q(X) \xrightarrow{\tau_q} S_q^{\mathcal{U}}(X)$$

de donde $i(\sigma) = \sigma \in S_q(X)$ y

$$\tau \circ i(\sigma) = \sigma + \partial_{q+1}Q_q(\sigma) + Q_{q-1}\partial_q(\sigma).$$

Como $\sigma \in S_q^{\mathcal{U}}(X)$, entonces $Q_q(\sigma) = 0$, lo mismo que $Q_{q-1}\partial_q(\sigma) = 0$. Por lo tanto, $\tau \circ i(\sigma) = \sigma$. De aquí que $\tau_q \circ i = \text{id}_{S_*^{\mathcal{U}}(X)}$.

Proposición 4.73. *Sea X un espacio topológico y C y D subespacios del mismo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *Si A es un subespacio de X y $U \subset A$ un subespacio tal que $\bar{U} \subset \overset{\circ}{A}$, entonces la inclusión $i : (X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow (X, A)$ induce un isomorfismo en homología.*

2. Si $X = \overset{\circ}{C} \cup \overset{\circ}{D}$, entonces $j : (C, C \cap D) \hookrightarrow (X, D)$ induce un isomorfismo en homología.

Demostración. Sea $A = D$ y $U = X \setminus C$. Como $\overset{\circ}{C} \subset C$, entonces $X \setminus \overset{\circ}{C} \supset X \setminus C = U$, así que $\overline{U} = \overline{X \setminus \overset{\circ}{C}} \subset X \setminus \overset{\circ}{C}$ pues $X \setminus \overset{\circ}{C}$ es cerrado. Pero

$$X \setminus \overset{\circ}{C} = (\overset{\circ}{C} \cup \overset{\circ}{D}) \setminus \overset{\circ}{C} = \overset{\circ}{D} \setminus \overset{\circ}{C} \subset \overset{\circ}{D} = \overset{\circ}{A}.$$

Además,

$$X \setminus U = X \setminus (X \setminus C) = C \quad \text{y} \quad A \setminus U = D \setminus (X \setminus C) = D \cap C,$$

por lo cual el par $(X \setminus U, A \setminus U)$ es el par $(C, C \cap D)$ y el par (X, A) es el par (X, D) .

Recíprocamente, sea $U \subset \overset{\circ}{A}$, $D = A$ y $C = X \setminus U$. Ahora $U \subseteq \overline{U} \subseteq \overset{\circ}{A}$ implica que $X \setminus U \supset X \setminus \overline{U} \supset X \setminus \overset{\circ}{A}$. Como $X \setminus \overline{U}$ es abierto, $X \setminus \overline{U} = (X \setminus \overline{U}) \supset X \setminus \overset{\circ}{A}$. Por lo tanto

$$\overset{\circ}{C} \cup \overset{\circ}{D} = (X \setminus U) \cup \overset{\circ}{A} \supset (X \setminus \overline{U}) \cup \overset{\circ}{A} \supset (X \setminus \overset{\circ}{A}) \cup \overset{\circ}{A} = X.$$

De aquí que $X = \overset{\circ}{C} \cup \overset{\circ}{D}$. Finalmente $C \cap D = (X \setminus U) \cap A = (X \cap A) \setminus U = A \setminus U$, y así $(C, C \cap D) = (X \setminus U, A \setminus U)$ y $(X, D) = (X, A)$.

Teorema 4.74. *Sea C un R -módulo y $A, B \subset C$ submódulos y $A + B = a + b : a \in A, b \in B = \langle A \cup B \rangle$. Entonces la inclusión $i : A \hookrightarrow A + B$ induce un isomorfismo $\bar{i} : A/(A \cap B) \rightarrow (A + B)/B$.*

Teorema 4.75 (Escisión). *Sea (X, A, B) una triada tal que $X = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$. Entonces la inclusión $j : (A, A \cup B) \rightarrow (X, B)$ induce isomorfismos en todos los módulos de homología.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{A, B\}$. Como $X = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$, por un teorema anterior la inclusión $i_{\#} : S_{*}^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow S_{*}(X)$ es una equivalencia homotópica de cadenas. En este caso, $S_{*}^{\mathcal{U}}(X) = S_{*}(A) + S_{*}(B)$. Consideremos los complejos de cadenas $S_{*}(A)/S_{*}(A \cap B)$ y $S_{*}(X)/S_{*}(B)$. La inclusión

$$j_{\#} : S_{*}(A) \hookrightarrow S_{*}(X)$$

induce el homomorfismo $\bar{j}_{\#} : S_{*}(A)/S_{*}(A \cap B) \rightarrow S_{*}(X)/S_{*}(B)$. Tenemos que $i : S_{*}(A) + S_{*}(B) \hookrightarrow S_{*}(X)$ y su inverso homotópico de cadenas $\tau : S_{*}(X) \rightarrow S_{*}(A) + S_{*}(B)$ que satisface $\tau \circ i = \text{id}$. En particular, τ envía a $S_{*}(B)$ en $S_{*}(B)$. Resultan los cocientes

$$\bar{i} : (S_{*}(A) + S_{*}(B))/S_{*}(B) \rightarrow S_{*}(X)/S_{*}(B)$$

y

$$\bar{\tau} : S_*(X)/S_*(B) \rightarrow (S_*(A) + S_*(B))/S_*(B).$$

Claramente, $S_*(A \cap B) = S_*(A) \cap S_*(B)$ y tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \frac{S_*(A)}{S_*(A \cap B)} & \xrightarrow{i} & \frac{S_*(A) + S_*(B)}{S_*(B)} \\ & \searrow \bar{j}_\# & \downarrow \bar{i} \\ & & \frac{S_*(X)}{S_*(B)} \end{array}$$

donde la parte superior del diagrama es consecuencia del teorema de Noether.

Ejercicio 4.76. Demostrar que $\bar{\tau}$ es una equivalencia homotópica de cadenas con inverso \bar{i} .

Definición 4.77. Se dice que el espacio $X \subseteq Y$ es un retracto por deformación si existe un mapeo $r : Y \rightarrow X$ tal que si $j : X \hookrightarrow Y$ es la inclusión entonces $r \circ j = \text{id}_X$ y $j \circ r \simeq \text{id}_Y$.

Proposición 4.78. Sea X un espacio topológico y $V \subset U \subset A \subset X$ tales que

- Puede escindirse a V .
- El par $(X \setminus U, A \setminus U)$ es retracto por deformación de $(X \setminus V, A \setminus V)$.
Entonces U puede escindirse.

Demostración. Tenemos que existe $j : (X \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (X \setminus V, A \setminus V)$ y $r : (X \setminus V, A \setminus V) \rightarrow (X \setminus U, A \setminus U)$ tales que $r \circ j = \text{id}$ y $j \circ r \simeq \text{id}$. Por el teorema de invariancia homotópica, j induce un isomorfismo en homología. Dado $\iota : (X \setminus V, A \setminus V) \hookrightarrow (X, A)$, por hipótesis induce un isomorfismo en homología. Tenemos

$$\begin{array}{ccc} (X \setminus U, A \setminus U) & \xrightarrow{j} & (X \setminus V, A \setminus V) \\ & \searrow i & \downarrow \iota \\ & & (X, A) \end{array}$$

y, dado que tanto j como ι inducen isomorfismo, i también.

Lema 4.79. Sean S_+^n y S_-^n los hemisferios cerrados norte y sur de S^n . La inclusión $i : (S_+^n, S^{n-1}) \hookrightarrow (S^n, S_-^n)$ induce un isomorfismo en homología.

Demostración. Queremos escindir $U = S_-^n$. Como $\bar{U} \subset S_-^n$, buscamos a V como en la proposición anterior. Sea $V = \{x \in S^n : x_{n+1} < \frac{1}{2}\}$. Es claro que V se puede escindir y además (S_+^n, S^{n-1}) es retracto por deformación de $(S^n \setminus V, S_-^n \setminus V)$, pues podemos movernos por los círculos máximos. Aplicando la proposición, U se puede escindir.

Vamos a modificar un poco la definición de homología de suerte que tenga mejores propiedades para los cálculos. Al resultado lo denominaremos homología reducida y que denotaremos como $\tilde{H}_q(X; R)$.

Definición 4.80. *Definimos*

$$\tilde{H}_q(X; R) := H_q(X, \{x_0\}; R)$$

donde $x_0 \in X$.

Consideremos ahora la sucesión de la pareja (X, x_0)

$$\cdots \rightarrow H_q(x_0; R) \xrightarrow{i_*} H_q(X; R) \xrightarrow{j_*} H_q(X, x_0; R) \xrightarrow{\partial_q} H_{q-1}(x_0; R) \rightarrow \cdots$$

Si

$$\begin{array}{ccc} \{x_0\} & \xrightarrow{i} & X \\ & \searrow \text{id} & \downarrow c \\ & & \{x_0\} \end{array}$$

entonces $c_* \circ i_* = \text{id}$, esto es, la sucesión de la pareja se escinde en

$$0 \rightarrow H_q(x_0; R) \rightarrow H_q(X; R) \rightarrow H_q(X, x_0; R) \rightarrow 0.$$

Por lo tanto

$$H_q(X; R) \cong \tilde{H}_q(X; R) \oplus H_q(x_0; R)$$

y así $H_q(X; R) \cong \tilde{H}_q(X; R)$ para $q > 0$. Si X es contraíble

$$0 \rightarrow \tilde{H}_0(x_0; R) \cong R \rightarrow H_0(X; R) \cong R \rightarrow \tilde{H}_0(X; R) \rightarrow 0$$

luego $\tilde{H}_0(X; R) \cong 0$.

Definición 4.81. *Dado el complejo de cadenas*

$$S_q(X) \rightarrow S_{q-1}(X) \rightarrow \cdots \rightarrow S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\epsilon} R.$$

donde $\epsilon(\sum_x r_x x) = \sum_x r_x$, definimos

$$\tilde{H}_q(X; R) = H_q(X; R), \quad \tilde{H}_0(X; R) = \frac{\text{núc } \epsilon}{\text{Im } \partial_1}.$$

Proposición 4.82. *Sea (X, A) una pareja de espacios. Entonces tenemos una sucesión exacta larga*

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_q(A; R) \rightarrow \tilde{H}_q(X; R) \rightarrow H_q(X, A; R) \xrightarrow{\partial_q} \tilde{H}_{q-1}(A; R) \rightarrow \cdots$$

Ejercicio 4.83. Demostrar la Proposición 4.82.

Definición 4.84. Tenemos $H_q(X; R) \xrightarrow{c\#} H_q(*; R)$. Definimos $\tilde{H}_q(X; R) = \text{núc } c\#$.

Escolio 4.85. La definición anterior se puede extender a otras teorías homológicas. Para el bordismo

$$\begin{aligned} \eta_q(x) &\xrightarrow{c\#} \eta_q(*) \\ [M^q, f] &\mapsto [M^q] = 0, \end{aligned}$$

y $\tilde{\eta}_q(X)$ es el grupo de clases $[M, f]$ donde M es frontera de alguna variedad. Usando la sucesión de la pareja (X, x_0) pero en bordismo $\eta_q(*) = \eta_q$

$$0 \rightarrow \eta_q \rightarrow \eta_q(X) \rightarrow \tilde{\eta}_q(X) \rightarrow 0$$

y así $\eta_q(X) \cong \tilde{\eta}_q(X) \oplus \eta_q$.

Ejercicio 4.86. Demostrar la equivalencia de las tres definiciones de homología reducida.

Lema 4.87. Se satisface $H_q(D^n; S^{n-1}) \cong \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1}; R)$.

Demostración. Basta aplicar la sucesión de homología reducida a la pareja (D^n, S^{n-1}) pues así

$$\tilde{H}_q(S^{n-1}; R) \rightarrow \tilde{H}_q(D^n; R) \rightarrow H_q(D^n, S^{n-1}; R) \xrightarrow{\partial_q} \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1}; R),$$

como D^n es contraíble, $\tilde{H}_q(D^n; R) \cong \tilde{H}_q(*; R) \cong 0$ para $q \geq 0$. Esto implicaría que $\tilde{H}_{q-1} \cong H_q(D^n, S^{n-1}; R)$.

Escolio 4.88. Si $X = \amalg_{i=1}^m X_i$, entonces

$$\tilde{H}_0(X; R) \cong \bigoplus_{m-1} R.$$

En efecto, tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow H_0(*; R) = R \hookrightarrow H_0(X; R) = \bigoplus_m R \rightarrow \tilde{H}_0(X; R) \bigoplus_{m-1} R \rightarrow 0.$$

Proposición 4.89. Se satisface

$$\tilde{H}_q(S^n; R) = \begin{cases} R, & q = n, \\ 0, & q \neq n. \end{cases}$$

Demostración. La proyección en las n primeras coordenadas induce un homeomorfismo

$$\pi : (S_+^n, S^{n-1}) \rightarrow (D^n, S^{n-1}).$$

Tomando la sucesión de homología reducida de la pareja

$$0 = \tilde{H}_q(S_-^n; R) \rightarrow \tilde{H}_q(S^n; R) \rightarrow H_q(S^n, S_-^n) \xrightarrow{\hat{\partial}_q} H_{q-1}(S_-^n; R) = 0$$

por lo que $\tilde{H}_q(S^n; R) \cong H_q(S^n, S_-^n)$. Tenemos ahora la sucesión

$$\begin{array}{ccc} H_q(S^n, S_-^n; R) & \xrightarrow{(*)} & H_q(S_+^n, S^{n-1}; R) \xrightarrow{\pi_*} H_q(D^n, S^{n-1}; R) \\ \cong \uparrow & & \downarrow (**) \\ \tilde{H}_q(S^n; R) & & \tilde{H}_q(S^{n-1}; R) \end{array}$$

donde (*) es por escisión y (**) es consecuencia del lema anterior. Por el escolio anterior, $\tilde{H}_0(S^0; R) \cong R$, y

$$\begin{aligned} \tilde{H}_q(S^0; R) &\cong H_q(S^0; R) \\ &\cong H_q(*; R) \oplus H_q(*; R) \\ &= 0 \oplus 0 = 0 \end{aligned}$$

cuando $q > 0$. El resultado es consecuencia de una evidente inducción.

Escolio 4.90. Este es un caso particular del llamado isomorfismo de suspensión, y en tal caso

$$\tilde{H}_q(X; R) \cong \tilde{H}_{q+1}(SX; R),$$

donde la suspensión SX del espacio X es

$$SX = \frac{X \times I}{\{X \times \{0\}, X \times \{1\}\}}.$$

Proposición 4.91. *El espacio S^{n-1} no es retracto de D^{n-1} para $n \geq 1$.*

Demostración. De ser esto cierto, tendríamos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & D^n & \\ i \nearrow & & \searrow r \\ S^{n-1} & \xrightarrow{\text{id}} & S^{n-1} \end{array}$$

de donde

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{H}_{n-1}(D^n; R) & \\ i_* \nearrow & & \searrow r_* \\ \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}; R) & \xrightarrow{\text{id}} & \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}; R) \end{array}$$

o, equivalentemente

$$\begin{array}{ccc}
 & 0 & \\
 i \nearrow & & \searrow r_* \\
 R & \xrightarrow{\text{id}} & R.
 \end{array}$$

Por un lado, esto implica que $r_* \circ i_* = \text{id}_R$ pero por otro que $r_* \circ i_* = 0$, lo cual es contradictorio.

Teorema 4.92 (Brouwer). *Toda función continua $f : D^n \rightarrow D^n$ tiene un punto fijo. Esto es, existe $x_0 \in D^n$ tal que $f(x_0) = x_0$.*

Demostración. Si $n = 0$, no hay nada que probar. Supongamos, para $n > 0$, que existe una f continua que no tiene puntos fijos. Sea $x \in D^n$ y $f(x) \in D^n$. Como $x \neq f(x)$, consideremos al rayo que une a $f(x)$ con x y su intersección y con S^{n-1} . Denotemos por r a la función que manda a cada x con y . Se puede probar que r así definida es continua, y que por lo tanto es una retracción de D^n a S^{n-1} , lo cual es imposible.

Ejercicio 4.93. Demostrar que la función r definida es continua.

Proposición 4.94. *Si $n \neq m$, entonces S^n y S^m no son del mismo tipo de homotopía.*

Demostración. Sabemos que $\tilde{H}_n(S^n; R) \cong R$ y $\tilde{H}_n(S^m; R) = 0$. Si hubiera una equivalencia homotópica entre S^n y S^m , induciría un isomorfismo $f_* : \tilde{H}_n(S^n; R) \rightarrow \tilde{H}_n(S^m; R)$, lo cual es imposible.

Ejercicio 4.95. La esfera S^{n-1} es un retracto por deformación de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. En particular, son del mismo grupo de homotopía.

Solución 4.96. En efecto, haciendo $H(x, t) = (1 - t + t/|x|)x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $t \in [0, 1]$, entonces $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) \in S^{n-1}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $H(x, 1) = x$ si $x \in S^{n-1}$.

Proposición 4.97. *Si $n \neq m$, entonces \mathbb{R}^n no es homeomorfo a \mathbb{R}^m .*

Demostración. Sean S^{m-1} y S^{n-1} . Sea $i_m : S^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ el mapeo de inclusión y $r_n : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}$ el mapeo que manda $x \in \mathbb{R}^n$ en $x/|x|$. Entonces tanto i_m como r_n son equivalencias homotópicas.

Supongamos que existe un homomorfismo $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, que sin pérdida de generalidad podemos suponer que satisface $h(0) = 0$. Entonces $f = h|_{\mathbb{R}^m}$ sería también un homeomorfismo. Por lo tanto $r_n \circ f \circ i_m : S^{m-1} \rightarrow S^{n-1}$ sería una equivalencia homotópica, lo cual es imposible a menos que $n = m$.

Proposición 4.98. *Sea $f : S^n \rightarrow S^n$ la reflexión dada por $r(x_0, \dots, x_n) = (-x_0, \dots, x_n)$. Entonces $r_* : \tilde{H}_n(S^n; R) \rightarrow \tilde{H}_0(S^n; R)$ es la multiplicación por -1 .*

Demostración. Para un espacio X , $\tilde{H}_0(X; R) = \frac{\text{núc } \epsilon}{\text{Im } \partial_1}$, donde $\epsilon : S_0(X) \rightarrow R$ es el morfismo de aumentación. Tenemos

$$\tilde{H}_0(S^0; R) = \text{núc } \epsilon = \{\alpha a + \beta b : \alpha + \beta = 0\},$$

en virtud de que $r(a) = b$ y $r(b) = a$,

$$r_*(\alpha a + \beta b) = \alpha b + \beta a = -\beta b - \alpha a = -(\beta b + \alpha a).$$

El resultado se sigue por inducción y la naturalidad de la transformación r_* .

Proposición 4.99. *Cualquier rotación de la esfera es homótopa a la identidad.*

Proposición 4.100. *Sea $G \times X \rightarrow X$ una acción continua. Para $x_0 \in X$ definimos $\alpha_{x_0} : G \rightarrow X$ a través de $g \mapsto g \cdot x_0$. Entonces α_{x_0} induce una biyección continua $\bar{\alpha}_{x_0} : G/G_{x_0} \rightarrow \text{orb}(x_0)$.*

Demostración. Sea $p : G \rightarrow G/G_{x_0}$ la proyección natural. Si $h, f \in G$ van a los elementos $p(h) = p(f)$ entonces $h = fa$ para $a \in G_{x_0}$ y

$$\alpha_{x_0}(h) = h \cdot x_0 = (fa) \cdot x_0 = f \cdot (a \cdot x_0) = f \cdot (x_0) = \alpha_{x_0}(f).$$

Ejercicio 4.101. Ver que α_{x_0} es inyectiva.

Escolio 4.102. Si G es compacto y X es de Hausdorff, $\bar{\alpha}_{x_0}$ es un homeomorfismo.

Teorema 4.103. *Si X es Hausdorff y Y es totalmente compacto y Hausdorff entonces ϕ es también biyección al restringir a funciones continuas.*

Aplicando este resultado a $Z = X = \mathbb{R}^n$ e $Y = I$, tenemos que ϕ es un homeomorfismo entre $\text{Map}(\mathbb{R}^n \times I, \mathbb{R}^n) \xrightarrow{\phi} \text{Map}(I, \text{Map}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$. En particular, una trayectoria en $SO(n)$ es equivalente a una homotopía entre rotaciones. Como $SO(n)$ es una variedad diferenciable, entonces es localmente conectable por trayectorias y, por lo tanto, la conexidad es equivalente a la conexidad por trayectorias.

Ejercicio 4.104. Demostrar que la acción de $SO(n)$ sobre S^{n-1} es transitiva y que $SO(n)_{x_0} = SO(n-1)$.

Proposición 4.105. *El grupo $SO(n)$ es conexo.*

Demostración. Como $SO(1) = \{e\}$ es conexo. Supongamos que $SO(n)$ es conexo y consideremos

$$\begin{array}{ccc} SO(n-1) & \xhookrightarrow{i} & SO(n) \\ & & \downarrow p \\ & & SO(n)/SO(n-1) \cong S^{n-1}. \end{array}$$

En general, sean G un grupo topológico y $H \leq G$ conexo, de modo tal que G/H también es conexo. Entonces G es conexo. En efecto, para $g_0 \in G$ los mapeos $g \mapsto g_0g$ y $g \mapsto gg_0$ son homeomorfismos. Como H es conexo, gH es conexo para cada $g \in G$. Supongamos que $G = A \cup B$ con A y B abiertos disjuntos. Luego A y B son abiertos y cerrados. Cada clase lateral interseca a A o B , y por ser H conexo, debe estar contenida en solo una de ellas. Así, A es una unión de clases laterales, lo mismo que B . Por lo tanto, al tomar la proyección $p : G \rightarrow G/H$ tenemos que $p(A) \cap p(B) = \emptyset$. Si probamos que p es abierta, tendremos una disconexión de G/H , lo cual sería contradictorio.

Tal es el caso. Sea $H \times X \rightarrow X$ una acción continua de un grupo topológico sobre un espacio topológico X . Sea $A \subset X$ un conjunto abierto. Veamos que $p^{-1}(p(A))$ es abierto; como $p^{-1}(p(A)) = \bigcup_{h \in H} hA$ y cada hA es abierto, el aserto se sigue.

Proposición 4.106. *Sea $f : S^n \rightarrow S^n$ la restricción de una transformación ortogonal de \mathbb{R}^{n+1} en \mathbb{R}^{n+1} . Entonces $f_* : \tilde{H}_n(S^n; R) \rightarrow \tilde{H}_n(S^n; R)$ es la multiplicación por $\det(f)$.*

Demostración. Si $\det(f) = 1$, $f \in SO(n)$, por lo que $f \simeq \text{id}$ y $f_* = \text{id}_*$, luego f_* es lo mismo que multiplicar por 1. Si $\det(f) = -1$, entonces componemos a f con la reflexión $r(x_1, \dots, x_{n+1}) = (-x_1, \dots, x_{n+1})$ y obtenemos dos rotaciones $r \circ f$ y $f \circ r$. Luego $r \circ f \simeq \text{id}$ y $f \circ r \simeq \text{id}$, $r_* \circ f_* = \text{id}$ y $f_* \circ r_* = \text{id}$. Como r_* es equivalente a multiplicar por -1 , resulta que $(r^{-1})_* = r_*$, esto es $f_* = r_*$.

Corolario 4.107. *Sea $a : S^n \rightarrow S^n$ la función antípoda. $a(x) = -x$. Entonces $a_* : \tilde{H}_n(S^n; R) \rightarrow \tilde{H}_n(S^n; R)$ es multiplicar por $(-1)^{n+1}$.*

Teorema 4.108. *La n -esfera S^n tiene un campo vectorial tangente que no se anula en ningún punto si, y sólo si, n es impar.*

Demostración. Un campo vectorial v en S^n es una función continua $v : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $x \perp v(x)$. Si $n = 2m + 1$, $m \geq 0$, definimos $v(x_0, \dots, x_{2m+1}) = (-x_1, x_0, \dots, -x_{2m+1}, x_{2m})$. Se puede verificar que v así definida es un campo. Para $n = 2m$ supongamos que existe un campo vectorial v que no se anula en ningún punto y sea $w(x) = v(x)/\|v(x)\|$. Sea $F : S^n \times I \rightarrow S^n$ una homotopía dada por

$$F(x, t) = x \cos t\pi + w(x) \sin t\pi,$$

donde $F(x, 0) = x$, $F(x, 1/2) = w(x)$ y $F(x, 1) = -x$. De aquí tendríamos que $a \simeq \text{id}$ y así a_* es la multiplicación por $(-1)^{n+1}$ lo cual no puede ser a menos que n sea impar.

Sea Y un espacio y $f : S^{n-1} \rightarrow Y$ una función continua. Al pegar una bola B^n a Y mediante f obtenemos un espacio que denotamos como $Z = D^n \cup_f Y$, y tenemos

$$D^n \amalg Y \xrightarrow{p} Z = D^n \cup_f Y.$$

Ejercicio 4.109. Demostrar que $p|_Y$ es un encaje cerrado que permite ver a Y como subespacio de Z y que $p|_{D^n \setminus S^{n-1}} : D^n \setminus S^{n-1} \rightarrow Z$ es un encaje abierto cuya imagen es $Z \setminus Y$.

Solución 4.110. Para cualquier $y \in Y$ tenemos que $p(y) = y$, esto es, es la identidad sobre Y , luego es un encaje cerrado. Ahora bien, $U = D^n \setminus S^{n-1}$ es abierto y ningún elemento de este conjunto pertenece a Y en Z . Por lo tanto p restringido a U tiene como imagen a $Z \setminus Y$, e $Y \setminus U = \text{Im } f \cup Y$ es un cerrado en Z , luego U es abierto en Z , por lo que $p|_U$ es un encaje abierto.

Denotamos a $p|_{D^n}$ como $F : D^n \rightarrow Z$.

Escolio 4.111. La función F resulta ser una extensión de f en el sentido de que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow p|_Y \\ D^n & \xrightarrow{F=p|_{D^n}} & Z. \end{array}$$

conmuta. En efecto, $p(f(x)) = [f(x)] = [x] = p|_{D^n}(x)$.

Proposición 4.112. Sea Y un espacio y $f : S^{n-1} \rightarrow Y$ una función continua y $F : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (Z, Y)$ la función de parejas inducida. Entonces F induce isomorfismo en todos los módulos de homología.

Demostración. Sea $\Sigma = \{x \in D^n : |x| > 1/2\}$ y $B = \Sigma \setminus S^{n-1}$. Tenemos

$$\begin{array}{ccccc} H_q(D^n, S^{n-1}; R) & \xrightarrow{i_*} & H_q(D^n, \Sigma; R) & \xleftarrow{k_*} & H_q(D^n \setminus S^{n-1}, B; R) \\ \downarrow F_* & & \downarrow & & \downarrow p_* \\ H_q(Z, Y; R) & \xrightarrow{j_*} & H_q(Z, Y \cup F(\Sigma); R) & \xleftarrow{l_*} & H_q(Z \setminus Y, F(B); R). \end{array}$$

Luego, escribiendo D por D^n , S por S^{n-1} y omitiendo a R ,

$$\begin{array}{ccccccccc} H_q(S) & \longrightarrow & H_q(D) & \longrightarrow & H_q(D, S) & \longrightarrow & H_{q-1}(S) & \longrightarrow & H_{q-1}(D) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow i_* & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ H_q(\Sigma) & \longrightarrow & H_q(D) & \longrightarrow & H_q(D, \Sigma) & \longrightarrow & H_{q-1}(\Sigma) & \longrightarrow & H_{q-1}(D) \end{array}$$

pues S^{n-1} es un retracto por deformación de Σ . Por el lema de los cinco, i_* es un isomorfismo. Por escisión, k_* es un isomorfismo. Análogamente, se puede ver que j_* y l_* son isomorfismos. Por el ejercicio anterior, $D^n \setminus S^{n-1} \cong Z \setminus Y$, $\Sigma \setminus S^{n-1}$ se identifica con $F(\Sigma \setminus S^{n-1})$. Luego p_* es un isomorfismo.

Teorema 4.113. *Sea $Z = D^n \cup_f Y$ el espacio de adjunción. Entonces*

$$\tilde{H}_q(Z; R) \cong \begin{cases} \tilde{H}_q(Y; R) & q \neq n, n-1 \\ \tilde{H}_q(Y; R)/\text{Im } f_* & q = n-1, \end{cases}$$

y se tiene la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \tilde{H}_n(Y; R) \rightarrow \tilde{H}_n(Z; R) \rightarrow \text{núc } f_* \rightarrow 0 \quad (4.6)$$

donde $f_* : \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}; R) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(Y; R)$.

Demostración. Consideremos la sucesión exacta de la pareja (Z, Y)

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{H}_q(Y; R) & \xrightarrow{i_*} & \tilde{H}_q(Z; R) & \xrightarrow{j_*} & \tilde{H}_q(Z, Y; R) & \xrightarrow{\hat{\partial}_q} & \tilde{H}_{q-1}(Y; R) \\ & & & & \uparrow F_* & & \uparrow f_* \\ & & & & H_q(D^n, S^{n-1}; R) & \xrightarrow{\hat{\partial}_q} & H_{q-1}(S^{n-1}; R) \end{array}$$

y demostremos que el cuadrado conmuta. Sea $[z] \in H_q(D^n, S^{n-1}; R)$; por un lado

$$\hat{\partial}_q \circ F_*[z] = [\partial_q \circ F_{\#}(z)] = [F_{\#} \circ \partial_q(z)]$$

mientras que por otro $F_* \circ \hat{\partial}_q[z] = [F_{\#} \circ \partial_q(z)]$, pero z es un ciclo relativo, por lo cual $\partial_q(z) \in S_{q-1}(S^{n-1})$ y $F|_{S^{n-1}} = f$, por lo cual $[F_{\#} \circ \partial_q(z)] = [f_{\#} \circ \partial_q(z)]$.

Como D^n es contraíble, $\hat{\partial}_q$ para el caso (D^n, S^{n-1}) es un isomorfismo, lo que transforma el diagrama en

$$\tilde{H}_q(Y; R) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_q(Z; R) \xrightarrow{\psi_*} H_{q-1}(S^{n-1}; R) \xrightarrow{f_*} \tilde{H}_{q-1}(Y; R) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(Z; R).$$

Si $q \neq n, n-1$, tanto $H_q(S^{n-1}; R)$ y $H_{q-1}(S^{n-1}; R)$ son cero, por lo que i_* es un isomorfismo. Si $q = n-1$, entonces

$$R \xrightarrow{f_*} \tilde{H}_{n-1}(Y; R) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_{n-1}(Z; R) \rightarrow 0$$

y así

$$\tilde{H}_{n-1}(Z; R) = \frac{\tilde{H}_{n-1}(Y; R)}{\text{núc } i_*} = \frac{\tilde{H}_{n-1}(Y; R)}{\text{Im } f_*}$$

por ser la sucesión exacta. Si $q = n$

$$H_n(S^{n-1}; R) \rightarrow \tilde{H}_n(Y; R) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(Z; R) \xrightarrow{\psi_*} H_{n-1}(S^{n-1}; R) \xrightarrow{f_*} \tilde{H}_{n-1}(Y; R),$$

donde $H_n(S^{n-1}; R) = 0$, y para hacer exacto lo anterior reemplazamos $H_{n-1}(S^{n-1}; R)$ por $\text{Im } \psi_* = \text{núc } f_*$ y $\tilde{H}_{n-1}(Y; R)$ por 0, quedando

$$0 \rightarrow \tilde{H}_n(Y; R) \rightarrow \tilde{H}_n(Z; R) \rightarrow \text{núc } f_* \rightarrow 0.$$

Escolio 4.114. Resolver el caso de la sucesión (4.6) no es trivial. Si la sucesión se escinde, el problema se resuelve fácilmente, pues en tal caso $\tilde{H}_n(Z; R) = \tilde{H}_n(Y; R) \oplus \text{núc } f_*$. Tal cosa ocurre cuando R es un campo o $\text{núc } f_*$ es libre sobre R .

De otro modo, diremos que dos cadenas $0 \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow 0$ y $0 \rightarrow A \rightarrow E' \rightarrow B \rightarrow 0$ son equivalentes si existe un morfismo ϕ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & B \longrightarrow 0 \\
 & & & \searrow & \downarrow \phi & \nearrow & \\
 & & & & E & &
 \end{array}$$

conmuta (por el lema de los cinco, esto basta para que ϕ sea un isomorfismo). Al conjunto de clases de equivalencia de cadenas resultante se le denota como $\text{Ext}(A, B)$.

Vamos a suponer que R es un anillo de ideales principales, y definimos el grupo $\text{Ext}_R^1(A, B)$ (denominado el primer derivado del funtor Hom). Sea $0 \rightarrow M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} P \rightarrow 0$ una sucesión exacta de R -módulos y el funtor $@Q$. Aplicando el funtor a la sucesión obtenemos

$$P@Q \xrightarrow{\beta@Q} N@Q \xrightarrow{\alpha@Q} M@Q$$

donde $\beta@Q(f) = f \circ \beta$.

Ejercicio 4.115. Demostrar que la sucesión anterior es exacta.

Ahora $\text{Ext}_R^1(A, B)$ queda definido como sigue. Sea una resolución libre de A

$$0 \rightarrow \text{núc } \beta \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} A \rightarrow 0$$

donde F es un R -módulo libre, β es suprayectiva y α es la inclusión de $\text{núc } \beta$. Como R es un dominio de ideales principales es también un R -módulo libre. Aplicando el funtor $@B$,

$$0 \rightarrow A@B \xrightarrow{\beta@B} F@B \xrightarrow{\alpha@B} \text{núc } \beta@B,$$

definimos

$$\text{Ext}_R^1(A, B) := \text{conúc } \alpha@B = \frac{\text{núc } \beta@B}{\text{Im } \alpha@B}.$$

Siempre existe una resolución libre: basta tomar a F como el R -módulo libre generado por los elementos de A .

Teorema 4.116. *Existe una biyección entre $\text{Ext}_R^1(A, B)$ y $\text{Ext}_R(A, B)$.*

Demostración. Dado el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{j} & A \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow \phi|_{\text{núc } \beta} & & \uparrow \phi & \beta & \nearrow \\
 & & \text{núc } \beta & \xrightarrow{\alpha} & F & &
 \end{array}$$

¿cómo definir a ϕ ? Dado que F es libre, a través de una de sus bases $\{v_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ y considerando a los elementos $\beta(v_i) \in A$ que deben satisfacer $j(e_i) = \beta(v_i)$, definimos $\phi(v_i) = e_i$. Así, el triángulo de la derecha conmuta. En efecto, $j \circ \phi(v_i) = j(e_i) = \beta(v_i)$. Tomemos a $v \in \text{núc } \beta \subset F$. Entonces $0 = \beta(v) = j \circ \phi(v)$, esto es $\phi(v) \in \text{núc } j$. Como la sucesión de arriba es exacta, existe un único elemento $b \in B$ tal que $b = i(b) = \phi(v)$, luego ϕ envía $\text{núc } \beta$ a β . La biyección deseada es

$$[0 \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow 0] \leftrightarrow [\tilde{\phi}]$$

Ejemplo 4.117. Sea A un módulo libre. Si lo vemos en términos de extensiones, que A sea libre implica que la extensión se escinde y en consecuencia $E \cong B \oplus A$, lo que implica que $\text{Ext}_K(A, B) = 0$. Si lo vemos con $\text{Ext}_R^1(A, B)$ tomemos una resolución libre $0 \rightarrow 0 \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\text{id}} A \rightarrow 0$. Esto implica que $\text{conúc } \alpha @ B$ y con ello que $\text{Ext}_R^1(A, B) = 0$.

Ejemplo 4.118. Para calcular $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z})$, buscamos identificar las extensiones de la forma

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}_n \rightarrow 0$$

con $\alpha(a) = na$, y al aplicar $@\mathbb{Z}$,

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_n @ \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta @ \mathbb{Z}} \mathbb{Z} @ \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha @ \mathbb{Z}} \mathbb{Z} @ \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$$

Sea $a \in \mathbb{Z}$ al que le asociamos el homomorfismo $\phi_a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dado por $\phi_a(1) = a$. Siendo así, a se mapea en $\alpha @ \mathbb{Z}(\phi_a)(1) = \phi_q(\alpha(1)) = \phi_a(n) = na$. Luego $\alpha @ \mathbb{Z}(\phi_a) = \phi_{na}$. En consecuencia, $\text{conúc } (\alpha @ \mathbb{Z}) = \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_n$, de donde $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_n$.

Complejos CW

5.1. Primeras definiciones

Definición 5.1. *Un complejo CW X es un espacio topológico junto con la familia de subespacios $X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \dots \subset X$ tal que $\bigcup_{i \geq 0} X^i = X$ tal que*

1. *El subespacio X^0 es un espacio discreto.*
2. *Para cada $n \geq 0$, existe un conjunto de índices C_n (que puede ser vacío) y funciones continuas $f_\alpha^n : S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$, $\alpha \in C_n$ de manera que $X^n \cong X^{n-1} \cup_{\Pi_{f_\alpha^n}} \Pi_{\alpha \in C_n} D_\alpha^n$.*
3. *Un subconjunto en $C \subset X$ es cerrado si, y sólo si, $C \cap X^n$ es cerrado para cada $n \geq 0$.*

Definición 5.2. *Una equivalencia homotópica débil es una función $f : X \rightarrow Y$ tal que, para cada $x \in X$, el homomorfismo $f_\# : \pi_q(X, x) \rightarrow \pi_q(Y, f(x))$ es un isomorfismo para cada $q \geq 0$.*

Se puede probar que si f es una equivalencia homotópica débil entonces $f_* : H_q(X; R) \rightarrow H_q(Y; R)$ es un isomorfismo para toda q y para cualquier anillo.

Teorema 5.3. *Dado cualquier espacio Y existe un complejo CW X y una equivalencia homotópica débil $f : X \rightarrow Y$.*

Demostración (Bosquejo). Sea $\mathcal{S}_n(Y) = \{\sigma : \Delta^n \rightarrow Y : \sigma \text{ es continua}\}$. Consideremos al espacio $\Pi_{n \geq 0} \mathcal{S}_0(Y) \times \Delta^n$, donde \mathcal{S} tiene la topología discreta y la relación de equivalencia generada por

$$(\sigma, F_n^i(t)) \sim ((F_n^i)^*(\sigma), t)$$

induce un espacio topológico que es un complejo CW. Damos ahora una función continua f de X en $\Pi_{n \geq 0} \mathcal{S}_0(Y) \times \Delta^n$ que cuando pasa al cociente sigue siendo continua. Tal f es $f(\sigma, t) = \sigma(t)$.

Ejercicio 5.4. Verificar que existe \tilde{f} continua tal que

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{n \geq 0} \mathcal{S}_0(Y) \times \Delta^n & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow p & \searrow \tilde{f} & \\ \coprod_{n \geq 0} (\mathcal{S}_0(Y) \times \Delta^n) / \sim & & \end{array}$$

Teorema 5.5.

1. La función f es una equivalencia homotópica débil.
2. El espacio $\coprod_{n \geq 0} \mathcal{S}_n(Y) \times \Delta^n / \sim$ es un complejo CW.
3. Esta construcción es funtorial.

Sea $\phi : Y \rightarrow Z$ continua. Queremos ver que ϕ induce una función $\hat{\phi} : \hat{Y} \rightarrow \hat{Z}$. En efecto $\hat{\phi}$ está definido mediante la función

$$\begin{aligned} \coprod_{n \geq 0} \mathcal{S}_n(Y) \times \Delta^n &\rightarrow \coprod_{n \geq 0} \mathcal{S}_n(Z) \times \Delta^n \\ (\sigma, t) &\mapsto (\phi \circ \sigma, t). \end{aligned}$$

Ejercicio 5.6. Ver que esta función pasa al cociente definida como $\hat{\phi}[\sigma, t] = [\phi \circ \sigma, t]$.

El siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \hat{Y} & \xrightarrow{\hat{\phi}} & \hat{Z} \\ f_Y \downarrow & & \downarrow f_Z \\ Y & \xrightarrow{\phi} & Z \end{array}$$

En efecto, $[\sigma, t] \in \hat{Y}$, $f_Z \circ \hat{\phi}[\sigma, t] = f_Z[\phi \circ \sigma, t] = \phi \circ \sigma(t)$, mientras que $\phi \circ f_Y[\sigma, t] = \phi \circ \sigma(t)$.

Ejercicio 5.7. ¿Qué es $\widehat{\{*\}}$?

Escolio 5.8. Como muestra el ejercicio anterior el complejo CW asociado a un espacio puede ser muy grande. Se puede construir un complejo CW más pequeño (denotado como \bar{Y}) que se obtiene de \hat{Y} identificando ciertos puntos de modo que $\overline{\{*\}} = \{*\}$. Esta construcción se debe a J. Milnor.

Las variedades diferenciables y espacios triangulables son complejos CW.

Ejercicio 5.9. Sea Z un espacio de Hausdorff y $Y \subset Z$ un subespacio cerrado. Supóngase que existe una función $F : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (Z, Y)$ tal que $F|_{D^n \setminus S^{n-1}} : D^n \setminus S^{n-1} \rightarrow Z \setminus Y$ es un homeomorfismo. Entonces

$$Z \cong D^n \amalg_{F|_{S^{n-1}}} Y.$$

Solución 5.10. Hay que demostrar que $F|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \rightarrow Y$ es continua. Notamos primero que F es cerrada. En efecto, si $A \subseteq D^n$ es cerrado, entonces $f(A) = f(A \setminus S^{n-1}) \cup f(A \cap S^{n-1})$, y ambos son cerrados en Z . El primero, porque $F|_{D^n \setminus S^{n-1}}$ es un homeomorfismo. Para el segundo, si consideramos una cubierta de Z , la preimagen de dicha cubierta debe ser una cubierta de S^{n-1} . Siendo este último compacto, debe tener una subcubierta finita.

5.2. Los espacios proyectivos reales y complejos

Recordemos que $\mathbb{R}P^n = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$, donde $v \sim \lambda v$ para cada $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Ejercicio 5.11. Demostrar que el espacio S^n / \sim , donde $x \sim -x$ para cada $x \in S^n$ es homeomorfo a $\mathbb{R}P^n$.

Proposición 5.12. El espacio $\mathbb{R}P^n$ es un complejo CW con una celda de dimensión r para cada $0 \leq r \leq n$.

Demostración. Para $n = 0$, $\mathbb{R}P^0 = \{*\}$, que es un complejo CW. Supongamos que $\mathbb{R}P^{n-1}$ satisface el teorema. El espacio $\mathbb{R}P^{n-1}$ es un subespacio de $\mathbb{R}P^n$. Usando el ejercicio y la composición

$$(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\cong} (S_+^n, S^{n-1}) \hookrightarrow (S^n, S^{n-1}) \xrightarrow{p} (\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^{n-1}).$$

Tenemos que F es de la forma

$$F(x_1, \dots, x_n) = \left[x_1, x_2, \dots, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2} \right]$$

Si consideramos $F|_{D^n \setminus S^{n-1}}$, su inversa esta dada por

$$F^{-1} : \mathbb{R}P^n \setminus \mathbb{R}P^{n-1} \rightarrow D^n \setminus S^{n-1}$$

$$[x_1, \dots, x_{n+1}] \mapsto \frac{x_{n+1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i x_{n+1})^2}} (x_1, \dots, x_n)$$

Se sigue que $\mathbb{R}P^n \cong D^n \cup_{F|_{S^{n-1}}} \mathbb{R}P^{n-1}$. Como $\mathbb{R}P^{n-1}$ es un complejo CW, también lo es $\mathbb{R}P^n$.

Ejercicio 5.13. Probar que F^{-1} es, efectivamente, la inversa de $F|_{D^n \setminus S^{n-1}}$.

Recordemos también que $\mathbb{C}P^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$, donde $v \sim \lambda v$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$.

Ejercicio 5.14. Demostrar que $\mathbb{C}P^n = S^{2n+1} / \sim$, donde $v \sim zr$ con $|z| = 1$.

Proposición 5.15. El espacio $\mathbb{C}P^n$ es un complejo CW con una celda de dimensión $2r$ para cada $0 \leq r \leq n$.

Demostración. Claramente, $\mathbb{C}\mathbb{P}^0$ es un complejo CW. Sea $F(D^{2n}, S^{2n-1}) \rightarrow (\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1})$ dado por

$$F(x_1, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}) = \left[x_1 + ix_2, \dots, x_{2n-1} + ix_{2n}, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{2n} x_i^2} \right].$$

Esta función envía S^{2n-1} a $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$. Definimos ahora

$$F^{-1} : \mathbb{C}\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1} \rightarrow D^{2n} \setminus S^{2n-1}$$

$$[z_1, \dots, z_{n+1}] \mapsto \frac{1}{a_{n+1}} (\Re z_1 \bar{z}_{n+1}, \Im z_1 \bar{z}_{n+1}, \dots, \Re z_n \bar{z}_{n+1}, \Im z_n \bar{z}_{n+1}),$$

donde $a_{n+1} = |z_{n+1}| \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} |z_i|^2}$.

Por un ejercicio anterior, $\mathbb{C}\mathbb{P}^n = D^{2n} \cup_{F|_{S^{2n-1}}} \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$, luego $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ es un complejo CW.

Proposición 5.16. *Se satisface*

$$H_q(\mathbb{C}\mathbb{P}^n; R) = \begin{cases} 0, & q > 2n, q \text{ mód } 2 = 1, \\ R, & q \geq 0, q \text{ mód } 2 = 0. \end{cases}$$

Demostración. Para $n = 0$, esto es cierto. Supongamos que es verdadero para $1, \dots, n-1$. Siendo $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ un complejo CW, por un teorema anterior,

$$H_q(\mathbb{C}\mathbb{P}^n; R) = H_q(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}; R)$$

si $q \neq 2n, 2n-1$. Si $q = 2n-1$,

$$H_{2n-1}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n; R) \cong \tilde{H}_{2n-1}(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}; R) / \text{Im } f_* \cong H_{2n-1}(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}; R) = 0.$$

Finalmente

$$0 \rightarrow \tilde{H}_{2n}(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}) = 0 \rightarrow \tilde{H}_{2n}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, R) \rightarrow H_{2n-1}(S^{2n-1}; R) \rightarrow 0$$

y de que aquí que $\tilde{H}_{2n}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n; R) = R$.

Calcular los grupos de homología de los planos proyectivos reales es, en general, no tan fácil como el caso complejo. A modo de ilustración, calcularemos $H_*(\mathbb{R}\mathbb{P}^2; R)$. Para esto, vamos a usar otra descripción de $\mathbb{R}\mathbb{P}^2 = D^2 \cup_f S^1$, donde $f : S^1 \rightarrow S^1$ es $f(z) = z^2$.

Ejercicio 5.17. Ver que $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ puede ser descrito de esta manera. Usar que $\mathbb{R}\mathbb{P}^1 \cong S^1$.

Para aplicar el teorema de cálculo de homología, necesitamos determinar $f_* : \tilde{H}_1(S^1; R) \rightarrow \tilde{H}_1(S^1; R)$ y con ello un generador explícito de $H_1(S^1; R)$. Para tal efecto, consideremos la sucesión de la pareja

$$\tilde{H}_1(\partial I; R) \rightarrow \tilde{H}_1(I; R) = 0 \rightarrow H_1(I, \partial I; R) \xrightarrow[\cong]{\partial_1} \tilde{H}_0(I; R) = 0.$$

Tenemos que [id] genera a $H_1(I, \partial I; R)$, pues

$$\begin{array}{ccc} (I, \partial I) & \xrightarrow{e} & (S^1, *) \\ \downarrow q & \nearrow \cong & \\ (I/\partial I, *) & \xrightarrow{\tilde{e}} & \end{array}$$

con $e(t) = e^{2\pi it}$, en virtud de que $I/\partial I = I \cup_{\text{cte}} \{*\}$ y un teorema anterior.

Vamos a expresar a [e] como la suma siguiente. Definimos

$$e_1 : \Delta^1 \rightarrow S^1 : t \mapsto e^{2\pi it/2}, \quad e_2 : \Delta^1 \rightarrow S^1 : t \mapsto e^{2\pi i(t+1)/2},$$

y $[e] = [e_1] + [e_2]$, y así $f_*[e] = f_*[e_1 + e_2] = [f(e_1 + e_2)] = [e + e] = 2[e]$. Aplicando el teorema anterior,

$$\tilde{H}_q(\mathbb{R}P^2; R) \cong \tilde{H}_q(S^1; R) = \begin{cases} R, & q = 1, \\ 0, & q \neq 1, \end{cases}$$

luego

$$H_1(\mathbb{R}P^2; R) = H_1(S^1; R)/\text{Im } f_* = R/2R$$

y por último

$$0 \rightarrow H_2(S^1; R) = 0 \rightarrow H_2(\mathbb{R}P^2; R) \cong \text{núc } f_* \rightarrow 0.$$

Ejemplo 5.18. Si $R = \mathbb{Z}$, $H_1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y $H_2(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) = 0$. Si $R = \mathbb{Z}_2$, $H_1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2/0 = \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y $H_2(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2/0 = \mathbb{Z}_2$.

Proposición 5.19. *Se satisface*

$$H_q(\mathbb{R}P^n; R) = \begin{cases} 0, & q > n, \\ \text{núc } f_*, & 1 < q \leq n, q \text{ mód } 2 = 0, \\ R/2R, & 1 \leq q \leq n - 1, q \text{ mód } 2 = 1, \\ R & q = 0, n. \end{cases}$$

Demostración. Para $n = 0$, el aserto se cumple. Supongámoslo válido para $n - 1$. Como $\mathbb{R}P^n \cong \mathbb{R}P^{n-1} \cup_f D^n$ donde $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$ está dada por $f(x_1, \dots, x_n) = [x_1, \dots, x_n]$. Tenemos $f_* : H_{n-1}(S^{n-1}; R) \rightarrow H_{n-1}(\mathbb{R}P^{n-1}; R)$ que resulta ser

$$f_*(s) = \begin{cases} 0 & n-1 \text{ mód } 0, \\ 2s & n-1 \text{ mód } 1. \end{cases}$$

En el último caso, $H_{n-1}(\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}; R) \cong R$. Aplicando el teorema

$$\tilde{H}_q(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; R) \cong \tilde{H}_q(\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}; R), \quad q = n, n-1,$$

además

$$\tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; R) \cong \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}; R)/\text{Im } f_* = \begin{cases} \text{núc } f_*, & n-1 \text{ mód } 2 = 0, \\ R/2R, & n-1 \text{ mód } 2 = 1, \end{cases}$$

y finalmente

$$0 \rightarrow \tilde{H}_n(\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}; R) = 0 \rightarrow \tilde{H}_n(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; R) \cong \text{núc } f_* \rightarrow 0,$$

de donde

$$\tilde{H}_n(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; R) = \begin{cases} R, & n \text{ mód } 2 = 1, \\ \text{núc } f_*, & n \text{ mód } 2 = 0. \end{cases}$$

Teorema 5.20. *Consideremos una sucesión exacta corta de complejos de cadenas*

$$0 \rightarrow \mathcal{C}_* \xrightarrow{\phi} \mathcal{D}_* \xrightarrow{\psi} \mathcal{E}_* \rightarrow 0.$$

Entonces existe una sucesión exacta larga en homología

$$\dots \rightarrow H_q(\mathcal{C}_*) \xrightarrow{\phi_*} H_q(\mathcal{D}_*) \xrightarrow{\psi_*} H_q(\mathcal{E}_*) \xrightarrow{\Delta_q} H_{q-1}(\mathcal{C}) \rightarrow \dots$$

Demostración. Para cada q , la sucesión

$$0 \rightarrow \mathcal{C}_q \xrightarrow{\phi_*} \mathcal{D}_q \xrightarrow{\psi_*} \mathcal{E}_q \rightarrow 0$$

es exacta. Como ϕ y ψ son morfismos de cadenas, obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C}_{k+1} & \xrightarrow{\phi_{k+1}} & \mathcal{D}_{k+1} & \xrightarrow{\psi_{k+1}} & \mathcal{E}_{k+1} \\ \downarrow \partial_{k+1}^{\mathcal{C}} & & \downarrow \partial_{k+1}^{\mathcal{D}} & & \downarrow \partial_{k+1}^{\mathcal{E}} \\ \mathcal{C}_k & \xrightarrow{\phi_k} & \mathcal{D}_k & \xrightarrow{\psi_k} & \mathcal{E}_k \\ \downarrow \partial_k^{\mathcal{C}} & & \downarrow \partial_k^{\mathcal{D}} & & \downarrow \partial_k^{\mathcal{E}} \\ \mathcal{C}_{k-1} & \xrightarrow{\phi_{k-1}} & \mathcal{D}_{k-1} & \xrightarrow{\psi_{k-1}} & \mathcal{E}_{k-1} \\ \downarrow \partial_{k-1}^{\mathcal{C}} & & \downarrow \partial_{k-1}^{\mathcal{D}} & & \downarrow \partial_{k-1}^{\mathcal{E}} \\ \mathcal{C}_{k+2} & \xrightarrow{\phi_{k+2}} & \mathcal{D}_{k+2} & \xrightarrow{\psi_{k+2}} & \mathcal{E}_{k+2}. \end{array}$$

Construimos primero el morfismo Δ_q . Sea $[z] \in H_k(\mathcal{C})$, $z \in \mathcal{E}_k$ tal que $\partial_k^{\mathcal{E}}(z) = 0$. Como ψ_k es suprayectiva, existe $\psi_k^{-1}(z) \in \mathcal{D}_k$. Por consecuencia

$$\psi_{k-1}(\partial_k^{\mathcal{D}}(\psi_k^{-1}(z))) = \partial_k^{\mathcal{E}}(\psi_k(\psi_k^{-1}(z))) = \partial_k^{\mathcal{E}}(z) = 0,$$

lo cual quiere decir $\partial_k^{\mathcal{D}}(\psi_k^{-1}(z)) \in \text{nuc } \psi_{k-1} = \text{Im } \phi_{k-1}$. Luego existe

$$x = \phi_{k-1}^{-1}(\partial_k^{\mathcal{D}}(\psi_k^{-1}(z))) \in \mathcal{C}_{k-1}.$$

Queremos ver que este elemento es un ciclo. Como ϕ_{k-1} es inyectiva basta ver que $\phi_{k-2}(\partial_{k-1}^{\mathcal{E}}(x)) = 0$. En efecto,

$$\begin{aligned} \phi_{k-2}(\partial_{k-1}^{\mathcal{E}}(\phi_{k-1}^{-1}(\partial_k^{\mathcal{D}}(\psi_k^{-1}(z)))))) &= \partial_{k-1}^{\mathcal{D}}(\phi_{k-1}(\phi_{k-1}^{-1}(\partial_k^{\mathcal{D}}(\psi_k^{-1}(z))))) \\ &= \partial_{k-1}^{\mathcal{D}}(\partial_k^{\mathcal{D}}(\psi_k^{-1}(z))) = 0. \end{aligned}$$

Siendo así, definimos

$$\Delta_k(z) := [\phi_{k-1}^{-1} \partial_{k-1}^{\mathcal{E}} \psi_k^{-1} z].$$

Sólo demostraremos que $\text{nuc } \psi_* = \text{Im } \phi_*$ y el resto quedará de ejercicio. Sea $d \in \mathcal{D}_k$ tal que $\partial_k^{\mathcal{D}}(d) = 0$ y $\psi_*[d] = 0$. Por definición, $\psi_*[d] = [\psi_k(d)] = 0$, lo que implica que existe $(\partial_{k-1}^{\mathcal{E}})^{-1} \psi_k(d)$. Como ψ_{k+1} es suprayectiva, existe $\psi_{k+1}^{-1}(z)$. Consideremos a $d - \partial_{k+1}^{\mathcal{D}}(\psi_{k+1}^{-1}(z))$. Aplicando ψ_k

$$\begin{aligned} \psi_k(d) - \psi_k \partial_{k+1}^{\mathcal{D}} \psi_{k+1}^{-1}(z) &= \partial_{k+1}^{\mathcal{E}} z - \psi_k \partial_{k+1}^{\mathcal{D}} \psi_{k+1}^{-1}(z) \\ &= \partial_{k+1}^{\mathcal{E}} z - \partial_{k+1}^{\mathcal{E}} \psi_{k+1} \psi_{k+1}^{-1}(z) = 0, \end{aligned}$$

esto es, $d - \partial_{k+1}^{\mathcal{D}} \psi_{k+1}^{-1} z \in \text{nuc } \psi_k = \text{Im } \phi_k$. Existe entonces $\phi_k^{-1}(d - \partial_{k+1}^{\mathcal{D}} \psi_{k+1}^{-1} z)$. Como ϕ_{k-1} es inyectivo

$$\begin{aligned} \phi_{k-1} \partial_k^{\mathcal{E}}(\phi_k^{-1}(d - \partial_{k+1}^{\mathcal{D}} \psi_{k+1}^{-1} z)) &= \partial_k^{\mathcal{D}} \psi_k(\phi_k^{-1}(d - \partial_{k+1}^{\mathcal{D}} \psi_{k+1}^{-1} z)) \\ &= \partial_k^{\mathcal{D}}(d - \partial_{k+1}^{\mathcal{D}} \psi_{k+1}^{-1} z) \\ &= \partial_k^{\mathcal{D}} d = 0, \end{aligned}$$

con lo que comprobamos que $\phi_k^{-1}(d - \partial_{k+1}^{\mathcal{D}} \psi_{k+1}^{-1} z)$ es un ciclo. Además,

$$\begin{aligned} \phi_*[\phi_k^{-1}(d - \partial_{k+1}^{\mathcal{D}} \psi_{k+1}^{-1} z)] &= [\phi_k \phi_k^{-1}(d - \partial_{k+1}^{\mathcal{D}} \psi_{k+1}^{-1} z)] \\ &= [d - \partial_{k+1}^{\mathcal{D}} \psi_{k+1}^{-1} z] \\ &= [d] - [\partial_{k+1}^{\mathcal{D}} \psi_{k+1}^{-1} z] = [d]. \end{aligned}$$

Ejercicio 5.21. Completar la demostración del Teorema 5.20.

Sea X un espacio topológico y subespacios

$$A_1 \hookrightarrow A \hookrightarrow X \quad \text{y} \quad B_1 \hookrightarrow B \hookrightarrow X,$$

y su análogo algebraico, donde G es un grupo y tenemos los subgrupos $H_1 \subset H \subset G$ y $K_1 \subset K \subset G$.

Lema 5.22. *Hay una sucesión exacta*

$$0 \rightarrow \frac{H \cap K}{H_1 \cap K_1} \xrightarrow{i} \frac{H}{H_1} \oplus \frac{K}{K_1} \xrightarrow{j} \frac{H + K}{H_1 + K_1} \rightarrow 0.$$

Demostración. Definimos $i[g]_{H_1 \cap K_1} = ([g]_{H_1} - [g]_{K_1})$, y $j([h]_{H_1}, [k]_{K_1}) = [h + k]_{H_1 + K_1}$. Es claro que i es inyectiva, que j es suprayectiva y que $j \circ i = 0$. Supongamos que $j([h]_{H_1}, [k]_{K_1}) = [h + k]_{H_1 + K_1} = 0$, entonces $h + k = h' + k'$ implica que $H \ni h - h' = k' - k \in K$, de donde $h - h' \in H \cap K$. Así, $i[h - h']_{H_1 \cap K_1} = ([h - h']_{H_1}, [h - h']_{K_1}) = ([h]_{H_1}, [k - k']_{K_1}) = ([h]_{H_1}, [k]_{K_1})$.

Aplicando esto al caso

$$\begin{array}{ccccc} S_*(A_1) & \hookrightarrow & S_*(A) & \hookrightarrow & S_*(X) \\ & & & \nearrow & \\ S_*(B_1) & \hookrightarrow & S_*(B) & & \end{array}$$

tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \frac{S_*(A) \cap S_*(B)}{S_*(A_1) \cap S_*(B_1)} \rightarrow \frac{S_*(A)}{S_*(A_1)} \oplus \frac{S_*(B)}{S_*(B_1)} \rightarrow \frac{S_*(A) + S_*(B)}{S_*(A_1) + S_*(B_1)} \rightarrow 0.$$

Evidentemente, $S_*(A \cap B) = S_*(A) \cap S_*(B)$. Aplicando el Teorema 5.20, aparecerán $H_*(A \cap B, A_1 \cap B_1; R)$, $H_*(A, A_1; R) \oplus H_*(B, B_1; R)$ y $H_*(\frac{S_*(A) + S_*(B)}{S_*(A_1) + S_*(B_1)})$. Para que esto último coincida con $H_*(X; R)$, necesitamos más hipótesis.

Definición 5.23. Sean C y D subespacios de X . Diremos que la pareja (C, D) es escisiva si la inclusión $S_*(C) + S_*(D) \hookrightarrow S_*(C \cup D)$ induce isomorfismo en homología.

Supondremos que las parejas (A, B) y (A_1, B_1) son escisivas. Gracias a esta hipótesis, sabemos cual es la homología del numerador y el denominador. Para saber cual es la homología del cociente, consideremos las siguientes sucesiones exactas

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & S_*(A_1) + S_*(B_1) & \hookrightarrow & S_*(A) + S_*(B) & \longrightarrow & \frac{S_*(A) + S_*(B)}{S_*(A_1) + S_*(B_1)} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & S_*(A_1 \cup B_1) & \hookrightarrow & S_*(A \cup B = X) & \longrightarrow & \frac{S_*(X)}{S_*(A_1 \cup B_1)} \end{array}$$

donde los triángulos y cuadrados conmutan.

Ejercicio 5.24. Demostrar que las sucesiones exactas en homología son functoriales. Esto es, si el diagrama entre sucesiones exactas

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{C}_* & \xrightarrow{i} & \mathcal{D}_* & \xrightarrow{p} & \mathcal{E}_* & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' & & \nearrow \\
 & & \mathcal{C}'_* & \xrightarrow{j} & \mathcal{D}'_* & \xrightarrow{q} & \mathcal{E}'_* & &
 \end{array}$$

conmuta, entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & H_q(\mathcal{C}_*) & \longrightarrow & H_q(\mathcal{D}_*) & \longrightarrow & H_q(\mathcal{E}_*) & \xrightarrow{\Delta_q} & H_{q-1}(\mathcal{C}_*) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow f'_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f''_* & & \downarrow f'_* & & \\
 \cdots & \longrightarrow & H_q(\mathcal{C}'_*) & \longrightarrow & H_q(\mathcal{D}'_*) & \longrightarrow & H_q(\mathcal{E}'_*) & \xrightarrow{\Delta'_q} & H_{q-1}(\mathcal{C}'_*) & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

conmuta.

Solución 5.25. Los primeros dos cuadrados conmutan porque la homología es funtorial. Sea $[z''] \in H_q(\mathcal{E}_*)$. Como p es suprayectiva, entonces $[z''] = [ps]$ para algún $s \in \mathcal{D}_*$. Pero

$$\begin{aligned}
 f'_*(\Delta[z'']) &= f'_*(\Delta[ps]) = f'_*[i^{-1}\partial s] \\
 &= [f' i^{-1}\partial s] = [j^{-1}f\partial s] \\
 &= [j^{-1}\partial' f s] \\
 &= \Delta'[q f s] \\
 &= \Delta'[f'' p s] = \Delta' f''_*[ps] = \Delta' f'_*[z''].
 \end{aligned}$$

por lo que el diagrama conmuta.

Aplicando el ejercicio, la escisividad de las parejas y el lema de los cinco, tenemos que

$$H_* \left(\frac{S_*(A) + S_*(B)}{S_*(A_1) + S_*(B_1)} \right) \cong H_*(X, A_1 \cup B_1; R).$$

Del Teorema 5.20, junto con lo anterior, se deduce el siguiente resultado.

Teorema 5.26 (Mayer-Vietoris). *Si las parejas (A, B) y (A_1, B_1) son escisivas, $X = A \cup B$, $Y = A_1 \cup B_1$, $C = A \cap B$ y $C_1 = A_1 \cap B_1$, entonces se tiene la sucesión exacta larga*

$$\cdots \rightarrow H_q(C, C_1) \rightarrow H_q(A, A_1) \oplus H_q(B, B_1) \rightarrow H_q(X, Y) \rightarrow H_{q-1}(C, C_1) \rightarrow \cdots$$

Corolario 5.27. *Sea X un espacio, y consideremos a los subespacios $C \subseteq D \subseteq X$. Entonces existe una sucesión exacta larga*

$$\cdots \rightarrow H_q(D, C; R) \rightarrow H_q(X, C; R) \rightarrow H_q(X, D; R) \rightarrow H_{q-1}(D, C; R) \rightarrow \cdots$$

Demostración. Consideremos las inclusiones $C \subseteq X \subseteq X$ y $D \subseteq D \subseteq X$. Resulta que (X, D) y (C, D) son escisivas, pues $S_*(X) = S_*(X) + S_*(D) \rightarrow S_*(X \cup D) = S_*(D)$ y análogamente $S_*(C) + S_*(D) = S_*(C \cup D) = S_*(D)$. Como $H_q(X, X; R) = 0$ para todo q pues $S_*(X, X) = \frac{S_*(X)}{S_*(X)} = 0$, el resultado se sigue.

Escolio 5.28. Si $C = \emptyset$, obtenemos la sucesión de la pareja. Si ponemos $C = \{x_0\}$, obtenemos la sucesión de homología reducida de (X, D) .

Proposición 5.29. Sean A y B subespacios de X tales que $A \cup B = X$. La pareja (A, B) es escisiva si, y sólo si, $(A, A \cap B) \xrightarrow{j} (X, B)$ induce isomorfismo en homología.

Demostración. Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \frac{S_*(A)}{S_*(A \cap B)} & \xrightarrow{\bar{j}_\#} & \frac{S_*(X)}{S_*(B)} \\ & \searrow \bar{i} & \uparrow \bar{i} \\ & & \frac{S_*(A) + S_*(B)}{S_*(B)}. \end{array}$$

Por el teorema de Noether, \bar{i} es un isomorfismo de complejos de cadenas. Pasando a homología, \bar{i}_* es un isomorfismo e $\bar{i}_* \circ \bar{i}_* = \bar{j}_*$. Por lo tanto, \bar{i}_* es un isomorfismo si, y sólo si, \bar{j}_* es un isomorfismo.

Tenemos ahora las sucesiones exactas largas

$$\begin{array}{ccccccc} H_q(B) & \longrightarrow & H_q(S_*(A) + S_*(B)) & \longrightarrow & H_q\left(\frac{S_*(A) + S_*(B)}{S_*(B)}\right) & \longrightarrow & H_{q-1}(B) \\ \cong \downarrow & & i_\# \downarrow & & \bar{i}_\# \downarrow & & \cong \downarrow \\ H_q(B) & \longrightarrow & H_q(X) & \longrightarrow & H_q(X, B) & \longrightarrow & H_{q-1}(B) \end{array}$$

Si \bar{i}_* es un isomorfismo, i_* también lo es y viceversa, por el lema de los cinco.

Definición 5.30. Sean (X, x_0) y (Y, y_0) espacios basados. El producto cuña de X e Y es $X \vee Y = (X \amalg Y) / \{x_0, y_0\}$. En general, si $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ con $x_\alpha \in X_\alpha$, definimos $\bigvee_\alpha X_\alpha = \amalg X_\alpha / \{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$.

Si el número de espacios en el producto es finito, la definición es equivalente a

$$X \vee Y = \{(x, y) \in X \times Y : x = x_0 \text{ ó } y = y_0\}.$$

Proposición 5.31. Consideremos la cuña de n círculos $\bigvee_n S^1$. Entonces la homología reducida de $\bigvee_n S^1$ es isomorfa a la suma directa de las homologías reducidas de cada círculo.

Demostración. Para $n = 1$, el resultado es trivial. Supongamos que el resultado es verdadero para $n - 1$. Dado que

$$\bigvee_n S^1 = \bigvee_{n-1} S^1 \cup S^1,$$

y haciendo $X = \bigvee_n S$, $A = \bigvee_{n-1} S^1$ y $B = S^1$, queremos probar que (A, B) es escisivo. Esto será cierto si $j : (A, A \cap B) \rightarrow (X, B)$ induce isomorfismo en homología. Si queremos escindir $U : B \setminus A$, veamos que $\bar{U} \not\subset \overset{\circ}{B}$. Si tomamos a V como un semicírculo inferior, vemos que $(X \setminus V, S^1 \setminus V)$ es retracto por deformación de $(X \setminus U, B \setminus U)$. Aplicando el teorema de Mayer Vietoris,

$$H_q(*, *) \rightarrow H_q(\bigvee_{n-1} S^1, *) \oplus H_q(S^1, *) \rightarrow H_q(\bigvee_n S^1, *) \rightarrow H_{q-1}(*, *)$$

y, dado que $H_*(*, *, R) = 0$, se sigue que

$$\tilde{H}_q(\bigvee_n S^1; R) \cong \tilde{H}_q(\bigvee_{n-1} S^1; R) \oplus \tilde{H}(S^1; R),$$

que es lo requerido.

5.3. El teorema de Jordan-Brouwer

Proposición 5.32.

1. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ cerrado. Entonces $\tilde{H}_q(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A; R) \cong \tilde{H}_{q-1}(\mathbb{R}^n \setminus A; R)$. Más aún, $\tilde{H}_{q+i}(\mathbb{R}^{n+i} \setminus A; R) \cong \tilde{H}_q(\mathbb{R}^n \setminus A; R)$ para $i > 0$.
2. Sean $A \subset \mathbb{R}^p$ y $B \subset \mathbb{R}^q$ subespacios cerrados y homeomorfos. Dados los conjuntos

$$A \times \{0\} \cong A \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \quad \text{y} \quad \{0\} \times B \cong B \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R},$$

$$\text{entonces } \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \setminus A \times \{0\} \cong \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \setminus \{0\} \times B.$$

Demostración. Sea $Z = \mathbb{R}^{n+1} \setminus A$. Definimos

$$\begin{aligned} Z_+ &= \{(x, 1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : r > 0 \text{ ó } x \in \mathbb{R}^n \setminus A\}, \\ Z_- &= \{(x, 1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : r < 0 \text{ ó } x \in \mathbb{R}^n \setminus A\}. \end{aligned}$$

Dado que A es cerrado, se tiene que Z_+ y Z_- son abiertos en Z y

$$Z = Z_+ \cup Z_- \quad \text{y} \quad Z_+ \cap Z_- = (\mathbb{R}^n \setminus A) \times \mathbb{R}.$$

Sea $H_1 = \{(x, 1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\} \xrightarrow{i} Z_+$ y definamos $\phi : Z_+ \rightarrow H_1$ a través de $\phi(x, r) = (x, 1)$. Así, $\phi \circ i = \text{id}$ y $i \circ \phi = \text{id}_{Z_+}$ mediante la homotopía

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R}^{n+1} \times I &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \\ (x, r, t) &\mapsto (x, (1+t)r + t), \end{aligned}$$

que satisface $H(x, r, 0) = (x, r)$ y $H(x, r, 1) = (x, 1)$. Esto es, H_1 es retracto por deformación de Z_+ . En consecuencia, Z_+ es del mismo tipo de homotopía de un punto, pues $H \cong \mathbb{R}^n$. De manera completamente análoga se demuestra que Z_- también tiene el mismo tipo de homotopía que un punto.

Procedemos ahora a aplicar el teorema de Mayer-Vietoris para el caso reducido,

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_{q+1}(Z) & \longrightarrow & H_q(Z_+ \cap Z_-) \\ & & \downarrow \\ & & \tilde{H}_q(Z_+) \longrightarrow \tilde{H}_q(Z_+) \oplus \tilde{H}_q(Z_-) \\ & & \downarrow \\ & & \tilde{H}_q(Z) \longrightarrow H_{q-1}(Z_+ \cap Z_-) \end{array}$$

pero

$$\tilde{H}_q(Z_+; R) \oplus \tilde{H}_q(Z_-; R) = 0 \oplus 0 = 0, \quad \tilde{H}_q(Z_+) = 0$$

de donde $\tilde{H}_q(Z; R) \cong H_{q-1}(Z_+ \cap Z_-; R)$. Asimismo, $Z = \mathbb{R}^{n+1} \setminus A$ y $Z_+ \cap Z_- = (\mathbb{R}^n \setminus A) \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n \setminus A$, por ser \mathbb{R} contraíble. En consecuencia

$$\tilde{H}_q(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A; R) \cong H_{q-1}(\mathbb{R}^n \setminus A; R),$$

quedando probado el primer inciso.

Sean $\phi : A \rightarrow B$ un homeomorfismo y $\psi : B \rightarrow A$ su inverso. Como A es cerrado de \mathbb{R}^p que es normal y ϕ es una función con valores en \mathbb{R}^q , por el teorema de extensión de Tietze, ϕ se extiende a $\Phi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$. Análogamente, ψ se extiende a $\Psi : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p$. Definimos las funciones $L, R : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ como

$$L(x, y) = (x, y - \Phi(x)) \quad \text{y} \quad R(x, y) = (x - \Psi(y), y).$$

Tenemos que L es un homeomorfismo con inverso $\bar{L}(u, v) = (u, \Phi(u) + v)$ y R es un homeomorfismo cuyo inverso es $\bar{R}(u, v) = (u + \Psi(v), v)$. Hagamos

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q : x \in A, y = \phi(x)\}, \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q : y \in B, x = \psi(y)\}. \end{aligned}$$

En consecuencia $L(\Gamma) = A \times \{0\}$ ya que

$$L(x, y) = L(x, \phi(x)) = (x, \phi(x) - \phi(x)) = (x, 0)$$

en virtud de que Φ es extensión de ϕ . De la misma manera, $R(\Gamma) = \{0\} \times B$, de donde se deduce que

$$\mathbb{R}^{p+q} \setminus (A \times \{0\}) \stackrel{\bar{L}}{\cong} \mathbb{R}^{p+q} \setminus \Gamma \stackrel{\bar{R}}{\cong} \mathbb{R}^{p+q} \setminus (\{0\} \times B),$$

lo que demuestra el segundo inciso.

El siguiente resultado es importante en la teoría de nudos.

Teorema 5.33. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ subconjuntos cerrados homeomorfos. Entonces

$$H_q(\mathbb{R}^n \setminus A; R) \cong H_q(\mathbb{R}^n \setminus B; R)$$

para todo q .

Demostración. Por la proposición anterior,

$$\begin{aligned} \tilde{H}_q(\mathbb{R}^n \setminus A; R) &\cong \tilde{H}_{q+n}(\mathbb{R}^{2n} \setminus A; R) \\ &\cong \tilde{H}_{q+n}(\mathbb{R}^{2n} \setminus B; R) \\ &\cong \tilde{H}_q(\mathbb{R}^n \setminus B; R), \end{aligned}$$

Si agregamos a cada lado del isomorfismo $H_q(*; R)$, obtenemos

$$H_q(\mathbb{R}^n \setminus A; R) \cong H_q(\mathbb{R}^n \setminus B; R).$$

Supongamos ahora que $A = \mathbb{R}^n$, y pensemos a A como subespacio de \mathbb{R}^{n+1} . Por lo anterior

$$\tilde{H}_q(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A; R) \cong \tilde{H}_q(\mathbb{R}^{n+1} \setminus B; R); \tag{5.1}$$

en particular $\tilde{H}_0(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A; R) \cong \tilde{H}_0(\mathbb{R}^{n+1} \setminus B; R)$. Pero $A = \mathbb{R}^n$, por lo que $\mathbb{R}^{n+1} \setminus A = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n$ que tiene dos componentes. Por (5.1), $\mathbb{R}^{n+1} \setminus B$ tendría también dos componentes. Si $B \subset \mathbb{R}^n$, entonces $\mathbb{R}^{n+1} \setminus B$, tendría una componente, pues

$$\tilde{H}_0(\mathbb{R}^{n+1} \setminus B; R) \cong H_{-1}(\mathbb{R}^n \setminus B; R) = 0,$$

lo cual es contradictorio, quedando probado el teorema.

Corolario 5.34. Sea $A, B \subset \mathbb{R}^n$ subconjuntos cerrados homeomorfos. Entonces sus complementos tienen el mismo número de componentes.

Demostración. Sabemos que $H_0(-, -)$ mide el número de componentes por trayectorias, y además en \mathbb{R}^n esto equivale al número de componentes conexas.

Corolario 5.35 (Jordan-Brouwer). Cualquier subconjunto de \mathbb{R}^n , con $n > 1$, homeomorfo a S^{n-1} separa a \mathbb{R}^n en 2 componentes.

Demostración. Hagamos

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\} = A$$

y sea $B \subset \mathbb{R}^n$ homeomorfo a A . El caso para $n = 2$ es claro, y por inducción los restantes.

Proposición 5.36. *Sea $n \geq 2$ y $f : D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua e inyectiva. Entonces f es un encaje que mapea $\overset{\circ}{D}^n$ en la componente acotada de $\mathbb{R}^n \setminus f(S^{n-1})$.*

Demostración. Como D^n es compacto y \mathbb{R}^n es Hausdorff, f es cerrada y por consecuencia, un encaje. Por el corolario anterior, el número de componentes de $\mathbb{R}^n \setminus f(D^n)$ es el mismo que el de $\mathbb{R}^n \setminus D^n$. Pero sólo hay una pues $n \geq 2$.

Como $\mathbb{R}^n \setminus f(D^n)$ es no acotado, está contenido en la componente no acotada de $\mathbb{R}^n \setminus f(S^{n-1})$ que denotamos por N . Sea A la componente acotada de $\mathbb{R}^n \setminus f(S^{n-1})$. Tenemos que A y N son abiertos pues \mathbb{R}^n es localmente conexo. También

$$f(D^n) \supset \mathbb{R}^n \setminus N = f(S^{n-1}) \cup A$$

y además

$$f(D^n) = f(\overset{\circ}{D}^n) \amalg f(S^{n-1}).$$

Dado que $\overset{\circ}{D}^n$ es conexo, resulta que $f(\overset{\circ}{D}^n) = A$.

Teorema 5.37 (Invariancia del dominio). *Sea $n \geq 2$ y $U \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto y conexo. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua e inyectiva. Entonces $f(U)$ es conexo y abierto y f es un encaje.*

Demostración. Sea $x \in U$ y V una vecindad abierta de x . Sea e^n una bola cerrada con centro en x tal que $e^n \subset V$. Por la proposición anterior, $f(e^n)$ es una vecindad abierta de $f(x)$, por lo que f es abierta. Luego f es un encaje y $f(U)$ es abierto.

Escolio 5.38. En particular, si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y $V \subset \mathbb{R}^n$ con $V \cong U$, entonces V es abierto.

Lema 5.39. *Sea X un espacio y $z : \Delta^1 \rightarrow X$ un 1-ciclo. Sea $\bar{z}(t) = z(1-t)$. Entonces $[\bar{z}] = -[z] \in H_1(X; R)$.*

Demostración. Necesitamos una 2-cadena c tal que $\partial_2(c) = \bar{z} + z$. Sea $\tilde{c} : \Delta^2 \rightarrow X$ dado por $\tilde{c}(t_0, t_1) = z(t_0)$ donde $\Delta^2 = \{(t_0, t_1) : t_0, t_1 \geq 0, t_0 + t_1 \leq 1\}$. Tenemos

$$\partial_2(\tilde{c}) = \tilde{c}^0 - \tilde{c}^1 + \tilde{c}^2 = \tilde{c} \circ F_2^0 - \tilde{c} \circ F_2^1 + \tilde{c} \circ F_2^2.$$

Adicionalmente,

$$F_2^1(t) = (0, t), \quad F_2^2(t) = (t, 0), \quad F_2^0(t) = (1-t, t),$$

de donde

$$\begin{aligned} \tilde{c}^0(t) &= \tilde{c}(1-t, t) = z(1-t) = \bar{z}(t), \\ \tilde{c}^1(t) &= \tilde{c}(0, t) = z(0), \\ \tilde{c}^2(t) &= \tilde{c}(t, 0) = z(t), \end{aligned}$$

por lo que $\partial_2(\tilde{c}) = \bar{c} - \text{cte}_{z_0} + z$. Sea $\hat{c} : \Delta^2 \rightarrow X$ la función constante con valor z_0 . Siendo así, $\partial_2(\tilde{c}) + \partial_2(\hat{c}) = \partial_2(\tilde{c} + \hat{c}) = \bar{z} + z$, por lo que haciendo $c = \tilde{c} + \hat{c}$ tenemos el resultado.

Sea X un espacio tal que $X = A \cup B$. Tenemos la sucesión

$$\cdots \rightarrow H_q(A \cap B) \xrightarrow{\phi} \tilde{H}_q(A) \oplus \tilde{H}_q(B) \xrightarrow{\psi} \tilde{H}_q(X) \xrightarrow{\Delta_q} H_{q-1}(A \cap B) \rightarrow \cdots$$

y las inclusiones

$$\begin{aligned} i_1 : (A, A \cap B) &\rightarrow (X, B), & \ell_1 : A &\rightarrow X, \\ i_2 : (B, A \cap B) &\rightarrow (X, A), & \ell_2 : B &\rightarrow X, \\ j_1 : X &\rightarrow (X, A), & k_1 : A \cap B &\rightarrow A, \\ j_2 : X &\rightarrow (X, B), & k_2 : A \cap B &\rightarrow B, \end{aligned}$$

donde

$$\phi(\alpha) = (k_{1*}(\alpha), k_{2*}(\alpha)) \quad \text{y} \quad \psi(\alpha, \beta) = (\ell_{1*}(\alpha) - \ell_{2*}(\beta)).$$

Para determinar quién es Δ_q , usamos la sucesión de Mayer-Vietoris para parejas. Esto arroja el diagrama de inclusiones

$$\begin{array}{ccccc} H_q(X) & \xrightarrow{j_{1*}} & H_q(X, A) & \xleftarrow[\cong]{i_{2*}} & H_q(B, A \cap B) & \xrightarrow{\hat{\partial}_q} & H_{q-1}(A \cap B) \\ & \searrow j_{2*} & & & & \nearrow \hat{\partial}'_q & \\ & & H_q(X, B) & \xleftarrow[\cong]{i_{1*}} & H_q(A, A \cap B) & & \end{array}$$

donde i_{2*} y i_{1*} son isomorfismos por escisión. Así

$$\Delta_q = \hat{\partial}_q \circ i_{2*}^{-1} \circ j_{1*} = -\hat{\partial}'_q \circ i_{1*}^{-1} \circ j_{2*}.$$

Lema 5.40. Consideremos n puntos distintos sobre S^1 y $[\beta_1 + \cdots + \beta_n] \in H_1(S^1; R)$, donde $\beta_i : I \rightarrow S^1$ es un encaje tal que $\beta_i(0) = x_i$ y $\beta_i(1) = x_{i+1} \pmod n$. Entonces $[\beta_1 + \cdots + \beta_n]$ es un generador.

Demostración. Sea $X = S^1$, $B = \text{Im } \beta_1$ y $A = \text{Im } \beta_2 \cup \cdots \cup \text{Im } \beta_n$. Tenemos que $A \cap B = \{x_1, x_2\}$. Empleando la sucesión de Mayer-Vietoris reducida

$$\tilde{H}_1(A) \oplus \tilde{H}_1(B) \rightarrow \tilde{H}_1(S^1) \xrightarrow[\cong]{\Delta_1} \tilde{H}_0(\{x_1, x_2\}) \rightarrow 0.$$

El primer término de la sucesión es 0 por que tanto A como B se pueden contraer a un punto. Tomemos $[\beta_1] \in H_1(B, A \cap B; R)$. Basta ver que $[\beta_1 + \cdots + \beta_n] = [\beta_1] \in H_1(S^1, A; R)$. Pero

$$\beta_1 + \cdots + \beta_n - \beta_1 = \beta_2 + \cdots + \beta_n \in B_1(S^1, A)$$

por lo que

$$\Delta_1[\beta_1 + \cdots + \beta_n] = \hat{\partial}_1[\beta_1] = \partial_1(\beta_1) = x_2 - x_1$$

que es un generador pues $\epsilon(x_2 - x_1) = 1 - 1 = 0$.

Proposición 5.41. *Se satisfacen*

$$\tilde{H}_q(S^1 \times S^1; R) \cong \begin{cases} 0, & q = 0, q > 2, \\ R \oplus R, & q = 1, \\ R, & q = 2. \end{cases}$$

Demostración. Describimos a $S^1 \times S^1$ como complejo CW

$$\begin{array}{ccc} I \times I & \xrightarrow{F} & S^1 \times S^1 \\ \uparrow & & \uparrow \\ \partial(I \times I) & \longrightarrow & S^1 \vee S^1. \end{array}$$

Sea $F(s, t) = (e^{2\pi is}, e^{2\pi it})$. Claramente $F|_{I \times I \setminus \partial(I \times I)}$ es un homeomorfismo entre $I \times I \setminus \partial(I \times I)$ y $S^1 \times S^1 \setminus S^1 \vee S^1$.

Sabemos que

$$S^1 \times S^1 \cong I^2 \cup_f (S^1 \vee S^1)$$

aplicando el teorema de cálculo de homología

$$\tilde{H}_q(S^1 \times S^1; R) \cong \tilde{H}_q(S^1 \vee S^1; R) \cong \begin{cases} R \oplus R / \text{Im } f_*, & q = 1, \\ 0 & q \neq 1, 2. \end{cases}$$

Para resolver el caso para $q = 2$, necesitamos el homomorfismo

$$f_* : \tilde{H}_1(\partial(I^2); R) \cong R \rightarrow \tilde{H}_1(S^1 \vee S^1; R) \cong R \oplus R$$

y con ello, generadores explícitos de los generadores de los grupos de homología. Sean

$$\begin{aligned} i_1 : S^1 &\rightarrow S^1 \vee S^1, & i_1(z) &= (z, 1), \\ i_2 : S^1 &\rightarrow S^1 \vee S^1, & i_2(z) &= (1, z). \end{aligned}$$

Los generadores de $H_1(S^1 \vee S^1; R)$ son $i_{1*}[e]$ y $i_{2*}[e]$. Denotemos

$$\begin{aligned} i_{1*}[e] &= [\alpha], & \alpha(t) &= (e^{2\pi it}, 1), \\ i_{2*}[e] &= [\beta], & \beta(t) &= (1, e^{2\pi it}). \end{aligned}$$

Para obtener el generador para $\tilde{H}_1(\partial(I^2); R)$, aplicamos el lema anterior el generador es $[a + b + c + d] \in H_1(\partial(I^2); R)$ donde

$$a(t) = (t, 0), \quad b(t) = (1, t), \quad c(t) = (1 - t, 1), \quad d(t) = (0, 1 - t)$$

(los extremos del cuadrado). Por lo tanto

$$f_*[a + b + c + d] = [f_{\#}(a + b + c + d)] = [f \circ a + f \circ b + f \circ c + f \circ d]$$

y

$$\begin{aligned} f \circ a(t) &= (e^{2\pi it}, 1) = \alpha(t), \\ f \circ b(t) &= (1, e^{2\pi it}) = \beta(t), \\ f \circ c(t) &= (e^{2\pi i(1-t)}, 1) = \bar{\alpha}(t), \\ f \circ d(t) &= (1, e^{2\pi i(1-t)}) = \bar{\beta}(t), \end{aligned}$$

por lo que $f_*[a + b + c + d] = [\alpha] + [\beta] + [\bar{\alpha}] + [\bar{\beta}]$. Por un lema anterior

$$[\bar{\alpha}] = -[\alpha], \quad [\bar{\beta}] = -[\beta],$$

de donde $f_*[a + b + c + d] = 0$. Así

$$\tilde{H}_1(S^1 \times S^1; R) \cong \tilde{H}_1(S^1 \vee S^1, R) / \text{Im } f_* = R \oplus R.$$

y para la 2-homología

$$0 \rightarrow H_2(S^1 \vee S^1; R) = 0 \rightarrow H_2(S^1 \times S^1; R) \rightarrow \text{núc } f_* \cong R \rightarrow 0,$$

esto es, $H_2(S^1 \times S^1) \cong R$.

5.4. Otra descripción de $S^1 \times S^1$

Procedemos a describir al toro como espacio de identificación de I^2 . Consideremos al diagrama

$$\begin{array}{ccc} I \times I & \xrightarrow{q=p} & (S^1 \vee S^1) \cup_f I^2 \\ \downarrow \pi & \nearrow \cong & \\ (I \times I) / \sim & & \end{array}$$

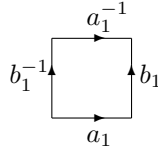
donde π es la proyección al cociente de la relación $(t, 0) \sim (t, 1)$ y $(0, t) \sim (1, t)$ para todo $t \in [0, 1]$,

$$p : S^1 \vee S^1 \amalg I^2 \rightarrow S^1 \vee S^1 \amalg_f I^2$$

y q es una identificación ya que es una función cerrada.

Ejercicio 5.42. Ver que q y π son compatibles.

Consideremos al siguiente cuadrado.



Identificamos lados con la misma letra y subíndice mediante la expresión

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}.$$

Tomemos el generador canónico de la homología de $\alpha(I^2)$ y le ponemos a cada lado un -1 si pegamos en dirección contraria al generador o lo dejamos igual si va en la misma dirección.

Definición 5.43. Una superficie es un espacio de Hausdorff que es localmente homeomorfo a D^2 .

Definición 5.44. La suma conexa de dos superficies se obtienen removiendo un disco abierto de cada una e identificando las fronteras que quedan.

Teorema 5.45.

1. Toda superficie compacta orientable es homeomorfa a S^2 , $T = S^1 \times S^1$ o a una suma conexa de toros.
2. Toda superficie compacta no orientable es homeomorfa al plano proyectivo sobre \mathbb{R} o a una suma conexa de planos proyectivos.

Corolario 5.46. Sea T_g la suma conexa de $g \geq 1$ toros.

1. La superficie T_g se obtiene tomando el producto cuña de $2g$ círculos y pegándole una 2-celda que se describe como un polígono de $4g$ lados, que pegamos mediante la expresión

$$a_1 b_1 a_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}.$$

2. Sea N_r la suma conexa de espacios proyectivos $r \geq 2$. Entonces N_r se obtienen tomando el producto cuña de r círculos y pegando un disco que se describe como un polígono de $2r$ lados mediante la expresión

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_r a_r.$$

Teorema 5.47. Se satisface lo siguiente.

$$H_q(T_g) = \begin{cases} R, & q = 0, q = 2, \\ R^{2g}, & q = 1, \\ 0, & q > 2, \end{cases}$$

$$H_q(N_k) = \begin{cases} R, & q = 0, \\ R^{k-1} \times R/2R, & q = 1, \\ R_{[2]}, & q = 2, \\ 0, & q > 2. \end{cases}$$

Demostración. Sólo probaremos el resultado para N_2 y $q = 1$ y el resto queda como ejercicio. Tenemos

$$R \xrightarrow{\phi} R \oplus R \xrightarrow{\psi} R \oplus (R/2R)$$

donde $\phi(r) = (2r, 2r)$ y $\psi(r, s) = (r - s, [s])$. Se verifica fácilmente que este último es un homomorfismo. La función ψ es suprayectiva ya que $\psi(a + b, b) = (a, [b])$. Además, $\text{Im } \phi = \text{núc } \psi$. Es claro que $\psi \circ \phi = 0$. También

$$\psi(r, s) = (r - s, [s]) = 0 \Rightarrow r - s = 0, s \in 2R \Rightarrow s = 2\ell,$$

por lo que $\phi(\ell) = (2\ell, 2\ell) = (r, s)$. En consecuencia

$$R \oplus (R/2R) \xrightarrow{\cong} R \oplus (R/\text{núc } \psi) = R \oplus (R/\text{Im } \phi).$$

5.5. Característica de Euler

Sea X un espacio topológico tal que $H_q(X; \mathbb{Z})$ es finitamente generado para cada q . Por un teorema algebraico $H_q(X; \mathbb{Z}) = F \oplus T$, donde F es un grupo libre y T es el grupo de torsión, de manera que $F \cong H_q(X; \mathbb{Z})/T$.

Definición 5.48. Al número de sumandos isomorfos a \mathbb{Z} en F se le llama el rango del grupo. En este caso, al rango se le llama q -ésimo número de Betti de X y se denota por $\beta_q(X)$.

Definimos a su vez

$$\beta(X) = \sum_q (-1)^q \beta_q(X)$$

cuando esta suma sea finita.

Ejemplo 5.49. Sea $X = S^n$. Tenemos que $\beta_0 = \beta_n = 1$ y $\beta_q = 0$ para $q \neq 0, 1$. Entonces

$$\beta(S^n) = \begin{cases} 0, n \text{ mód } 2 = 1, \\ 2, n \text{ mód } 2 = 0, \end{cases}$$

o, en otras palabras, $\beta(S^n) = 1 + (-1)^n$.

Ejercicio 5.50. Calcular $\beta(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$ y $\beta(\mathbb{R}\mathbb{P}^n)$. Comprobar que $\beta(T_g) = 2 - 2g$ y que $\beta(N_k) = 2 - k$.

Solución 5.51. Primeramente

$$\beta(T_g) = \beta_0(T_g) - \beta_1(T_g) + \beta_2(T_g) = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g$$

pues los grupos de homología a partir de 3 son cero. Además

$$\beta(N_k) = \beta_0(N_k) - \beta_1(N_k) + \beta_2(N_k) = 1 - k + 1 = 2 - k,$$

ya que los grupos de homología a partir de 3 son cero. Por último

$$\beta(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = \sum_{q=0}^{2n} \beta_q(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = n$$

y

$$\begin{aligned} \beta(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) &= \sum_{q=0}^n \beta_q(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) \\ &= \beta_0(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) + \beta_n(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) + \sum_{q=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \beta_{2q}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) \\ &= 2 + \lfloor n/2 \rfloor \text{rango núc } f_* . \end{aligned}$$

Definición 5.52. Sea X un complejo CW con un número finito de celdas. Sea $\alpha_i(X)$ el número de celdas de dimensión i . Definimos la característica de Euler de X como

$$\chi(X) = \sum_i (-1)^i \alpha_i(X).$$

Nuestro último objetivo es probar que $\beta(X) = \chi(X)$ donde $\chi(X)$ es la característica de Euler, cuando X es un complejo CW con un número finito de celdas. Como β resultará ser un invariante topológico, también $\chi(X)$ será un invariante topológico.

Proposición 5.53. La sucesión exacta de grupos abelianos finitamente generados

$$0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \rightarrow \cdots \rightarrow A_{r-1} \xrightarrow{f_{r-1}} A_r \rightarrow 0$$

satisface $\sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} \text{rango}(A_i) = 0$.

Demostración. para $r = 1$, $0 \rightarrow A_1 \rightarrow 0$ implica que $A_1 = 0$, y el resultado es trivial. Para $r = 2$, $0 \rightarrow A_1 \xrightarrow[\cong]{f_1} A_2 \rightarrow 0$, como f_1 es un isomorfismo, $\text{rango } A_1 = \text{rango } A_2$ y nuevamente el aserto se satisface. Para $r = 3$ tenemos

$$0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3 \rightarrow 0$$

sea \bar{A}_i la parte libre de A_i . Cada homomorfismo f_i manda al subgrupo de torsión en el subgrupo de torsión y por lo tanto induce $\bar{f}_i : \bar{A}_i \rightarrow \bar{A}_{i+1}$. Resulta así la sucesión

$$0 \rightarrow \bar{A}_1 \xrightarrow{\bar{f}_1} \bar{A}_2 \xrightarrow{\bar{f}_2} \bar{A}_3 \rightarrow 0$$

que no necesariamente es exacta. A manera de contraejemplo, considérese

$$0 \rightarrow 2\mathbb{Z} \xrightarrow{f_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{f_2} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

que arroja

$$0 \rightarrow 2\mathbb{Z} \xrightarrow{\bar{f}_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\bar{f}_2} 0 \rightarrow 0.$$

que no es exacta. Probaremos que \bar{f}_1 es inyectiva, que \bar{f}_2 es un epimorfismo y que $\text{núc } \bar{f}_2 / \text{Im } \bar{f}_1$ es un grupo de torsión.

Sea $[a_1] \in \bar{A}_1$ tal que $\bar{f}_1[a_1] = [f_1(a_1)] = 0$. Entonces $f_1(a_1)$ pertenece a la torsión de A_2 y por lo tanto existe n tal que $nf_1(a_1) = 0$, o lo que es lo mismo, $f_1(na_1) = 0$. Luego $na_1 = 0$, lo que significa que a_1 está en la torsión de A_1 , y con ello que $[a_1] = 0$.

Sea $[a_3] \in \bar{A}_3$. Como f_2 es suprayectiva, existe $a_2 \in A_2$ tal que $f(a_2) = a_3$, de donde $\bar{f}_2[a_2] = [f_2(a_2)] = [a_3]$.

Para ver que $\text{núc } \bar{f}_2 / \text{Im } \bar{f}_1$ es de torsión. Sea $[a_2] = \text{núc } \bar{f}_2$. Entonces $\bar{f}_2[a_2] = 0$. En consecuencia, $f_2(a_2)$ pertenece a la torsión de A_3 , por lo que existe n tal que $nf_2(a_2) = f_2(na_2) = 0$. Como la sucesión es exacta, existe $a_1 \in A_1$ tal que $f_1(a_1) = na_2$. Consideremos

$$n[a_2] = [na_2] = [f_1(a_1)] = \bar{f}_1[a_1]$$

y, consecuentemente $n[a_2] \in \text{Im } \bar{f}_1$. En conclusión $\text{núc } \bar{f}_2 / \text{Im } \bar{f}_1$ es de torsión.

Aplicando el Ejercicio 5.54, $\text{rango } A_1 = \dim \bar{A}_1 = \dim \text{Im } \bar{f}_1 = \dim \text{núc } \bar{f}_2$, y así

$$\text{rango } A_1 = \dim \text{núc } \bar{f}_2. \tag{5.2}$$

Tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \text{núc } \bar{f}_2 \rightarrow \bar{A}_2 \xrightarrow{f_2} \bar{A}_3 \rightarrow 0.$$

Como A_3 es libre, la sucesión se escinde y $\bar{f}_2 \cong \text{núc } \bar{f}_2 \oplus \bar{A}_3$, lo que acarrea que

$$\dim \bar{A}_2 = \dim \text{núc } \bar{f}_2 + \dim \bar{A}_3. \tag{5.3}$$

De (5.2) y (5.3), resulta que $\text{rango } A_2 = \text{rango } A_1 + \text{rango } A_3$.

Para el caso $r = 3v$, con $r > 3$, consideremos las sucesiones exactas

$$0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} \text{Im } f_2 \rightarrow 0$$

y

$$0 \rightarrow \text{Im } f_2 \rightarrow A_3 \xrightarrow{f_3} \dots \rightarrow A_r \rightarrow 0.$$

Por inducción, tenemos el resultado para cada una de las sucesiones. Tomamos la primera suma y le restamos la segunda, cancelándose en ellas $\text{rango Im } f_2$ quedando el resultado deseado.

Ejercicio 5.54. Sea A un grupo abeliano finitamente generado y $B \subset A$ un grupo tal que A/B es de torsión. Entonces $\text{rango } A = \text{rango } B$.

Solución 5.55. Sabemos que $A = F_1 \oplus T_1$ donde F_1 es libre y T_1 es la torsión, y análogamente $B = F_2 \oplus T_2$ con F_2 libre y T_2 la torsión. Si

$$A/B = \frac{F_1 \oplus T_1}{F_2 \oplus T_2}$$

es de torsión, quiere decir que $F_1 = F_2$, pues de lo contrario el cociente tendría una componente libre. Luego $\text{rango } F_1 = \text{rango } F_2$.

Escolio 5.56. Si $A \subset X$, $\beta(X, A) = \sum_i (-1)^i \beta_i(X, A)$ donde $\beta_i(X, A)$ es el rango de $H_i(X, A; \mathbb{Z})$ cuando $H_i(X, A; \mathbb{Z})$ son finitamente generados.

Proposición 5.57. Para una pareja (X, A) tal que $\beta(X)$, $\beta(A)$ y $\beta(X, A)$ están definidos, tenemos que $\beta(X) = \beta(X, A) + \beta(A)$.

Demostración. Consideremos la sucesión de la pareja (X, A)

$$\cdots \rightarrow H_q(A; \mathbb{Z}) \rightarrow H_q(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_q(X, A; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{q-1}(A; \mathbb{Z}) \rightarrow \cdots$$

Por la proposición anterior, la suma alternada de los rangos de estos grupos, que denotamos por Σ , es nula. Con los grupos de cada espacio, aparecen cada tres con signos distintos

$$\sigma = \pm\beta(A) \pm \beta(X) \pm \beta(X, A) = 0$$

y es claro (!) que $\beta(A)$ y $\beta(X, A)$ tienen el mismo signo. En conclusión, $\beta(X) = \beta(X, A) + \beta(A)$.

Proposición 5.58. Sea $Z = D^n \cup_f Y$ y supongamos que $\beta(Y)$ está definido. Entonces $\beta(Z) = \beta(Y) + (-1)^n$

Demostración. Ya es sabido que $F : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (Z, Y)$ induce un isomorfismo

$$F_* : H_q(D^n, S^{n-1}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_q(Z, Y; \mathbb{Z}) \quad (5.4)$$

para todo q . Por la proposición anterior

$$\beta(D^n, S^{n-1}) = \beta(D^n) - \beta(S^{n-1}) = 1 + (1 + (-1)^{n-1}) = (-1)^n$$

y nuevamente por la proposición anterior

$$\beta(Z) = \beta(Y) + \beta(Z, Y)$$

conjuntamente con (5.4), que implica que $\beta(Z, Y) = \beta(D^n, S^{n-1})$, y así $\beta(Z) = \beta(Y) + (-1)^n$.

Teorema 5.59. Sea X un complejo CW con un número finito de celdas. Entonces $\chi(X) = \beta(X)$ y por lo tanto $\chi(X)$ es un invariante homotópico.

Demostración. Si X tiene sólo una celda, tiene que ser una 0-celda, y por lo tanto $\chi(X) = 1$ y $\beta(X) = 1$. Supongamos que el teorema anterior es cierto para complejos CW con m celdas. Sea $X = D^n \cup_f Y$ con Y un complejo CW con m celdas. Por la proposición anterior, $\beta(X) = \beta(Y) + (-1)^n$, y por la hipótesis de inducción $\beta(Y) = \chi(Y)$. Como a Y le pegamos una n -celda, entonces

$$\chi(Y) + (-1)^n = \chi(X) = \beta(Y) + (-1)^n = \beta(X).$$

Corolario 5.60. *Sea X un poliedro con un número finito de simplejos. Sea α_i el número de simplejos de dimensión i , entonces $\chi(X) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \alpha_i$ no depende de la triangulación de X .*

Ejercicio 5.61. Demostrar el Corolario 5.60.

Bibliografía

- [Dol80] Dold, Albrecht: *Lectures on algebraic topology*, volumen 200 de *Gundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 1980.
- [Hat02] Hatcher, Allen: *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [LP05] Lluís Puebla, Emilio: *Álgebra homológica, cohomología de grupos y K-teoría algebraica clásica*. Sociedad Matemática Mexicana, 2005.
- [Rot88] Rotman, Joseph J.: *An introduction to algebraic topology*, volumen 119 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1988.