# Ejercicios de análisis funcional

Octavio Alberto Agustín Aquino
Universidad Tecnológica de la Mixteca

4 de marzo de 2006

## Índice



# 1. Espacios de Hilbert

Tomamos las definiciones y resultados de [Fet97].

## 1.1. Algunos resultados preliminares

**Teorema 1.1.** *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) > \epsilon > 0$, entonces existe un intervalo abierto $I_0$ tal que*

$$f(x) > \epsilon \tag{1}$$

*para $x \in I_0$.*

*Demostración.* Por la continuidad de la función, sabemos que para todo $\xi > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$, con $x_0 \in [a, b]$, entonces

$$|f(x) - f(x_0)| < \xi.$$

Podemos escoger $\xi = f(x_0) - \epsilon$, de donde

$$-f(x_0) + \epsilon < f(x) - f(x_0) < f(x_0) - \epsilon,$$

lo que implica que $f(x) > \epsilon$ siempre que $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) := I_0$, lo que demuestra el aserto. Q. E. D.

**Corolario 1.1.** *Bajo las hipótesis del teorema anterior y suponiendo que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, se tiene que*

$$\int_a^b f(x)\, dx > 0.$$

*Demostración.* Por la desigualdad (1) sabemos que

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\, dx > \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \epsilon\, dx = 2\epsilon\delta > 0. \quad \text{Q. E. D.}$$

Teniendo las demostraciones de este teorema y su corolario en mente, podemos hacer una generalización para funciones con dominio en $\mathbb{R}^n$.

**Teorema 1.2.** *Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua y existe $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) > \epsilon > 0$, entonces existe una región abierta $I_0$ tal que*

$$f(x) > \epsilon \tag{2}$$

*para $x \in I_0$.*

*Demostración.* Ya que la función es continua, para todo $\xi > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < \|x - x_0\| < \delta$, con $x_0 \in A$, entonces

$$|f(x) - f(x_0)| < \xi.$$

Escogemos $\xi = f(x_0) - \epsilon$, y así

$$-f(x_0) + \epsilon < f(x) - f(x_0) < f(x_0) - \epsilon,$$

lo que implica que $f(x) > \epsilon$ siempre que $x \in \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x_0\| < \delta\} := I_0$, lo que demuestra el aserto. Q. E. D.

**Corolario 1.2.** *Bajo las hipótesis del teorema anterior y suponiendo que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in A$, se tiene que*

$$\int_A f(x)\, dx_1 \cdots dx_n > 0.$$

*Demostración.* Por la desigualdad (2) sabemos que

$$\int_A f(x)\, dx_1 \cdots dx_n \geq \int_{I_0} f(x)\, dx_1 \cdots dx_n > \int_{I_0} \epsilon\, dx_1 \cdots dx_n > 0. \quad \text{Q. E. D.}$$

**Proposición 1.1.** *Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ converge y $a_n < \mu$ para $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = a \leq \mu$.*

*Demostración.* En efecto, el conjunto $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotado, y por lo tanto posee un supremo $M$. Este supremo puede o puede no ser igual a $a$. Si lo es, entonces es claro que $M = a \leq \mu$. Si no lo es, entonces $a < M$. De ocurrir que $a > M$, entonces existe $K$ tal que siempre que $n > K$, $|a_n - a| < a - M$, luego $a_n > M$, lo que contradice que $M$ es el supremo. En todos los casos $a \leq \mu$. Q. E. D.

**Definición 1.1.** *Sea $(X, d)$ un espacio métrico. Si $A$ es un subconjunto de $X$ y $x \in X$, definimos la distancia entre $x$ y $A$ como* $\operatorname{dist}(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$.

**Ejercicio 1.1.** *Se satisface* $\operatorname{dist}(x, A) = \operatorname{dist}(x, \overline{A})$*, donde $\overline{A}$ es la cerradura de $A$.*

*Demostración.* Como siempre ocurre que $A \subseteq \overline{A}$ entonces, para cada $y \in A$, $d(x, y) \geq \operatorname{dist}(x, \overline{A})$, lo que implica que $\operatorname{dist}(x, A) \geq \operatorname{dist}(x, \overline{A})$. Si $A = \overline{A}$, entonces la inclusión $A \supseteq \overline{A}$ arroja $\operatorname{dist}(x, A) \leq \operatorname{dist}(x, \overline{A})$, implicando que $\operatorname{dist}(x, A) = \operatorname{dist}(x, \overline{A})$. Supongamos ahora que $A \subset \overline{A}$, y que $\operatorname{dist}(x, A) > \operatorname{dist}(x, \overline{A})$. Sea $y \in \overline{A} \setminus A$; este elemento es necesariamente un punto de acumulación de $A$. Por lo tanto, para $\epsilon = \operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(x, \overline{A}) > 0$ existe un $z \in A$ tal que

$$d(z, y) < \epsilon = \operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(x, \overline{A}).$$

En particular,

$$d(z, y) < \operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(x, \overline{A}) \leq d(x, z) - \operatorname{dist}(x, \overline{A}),$$

luego

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(x, y) \leq d(z, y) + \operatorname{dist}(x, \overline{A}) < d(x, z),$$

es decir, $d(x, z) > d(x, z)$, lo cual es una contradicción. Tal contradicción provino de suponer que $\operatorname{dist}(x, A) > \operatorname{dist}(x, \overline{A})$. Luego siempre se cumple que $\operatorname{dist}(x, A) = \operatorname{dist}(x, \overline{A})$. Q. E. D.

## 1.2. Ejemplos

1. Sea $H_1 = \mathbb{C}^n$. Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $y = (y_1, \ldots, y_n)$ con $x_k, y_k \in \mathbb{C}$ para $k = 1, \ldots, n$ definimos

   $$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}.$$

   Con este producto interior, $H_1$ es prehilbertiano. Demostremos que $H_1$ es completo y, por lo tanto, hilbertiano. Sea $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}^n$ una sucesión de Cauchy, donde $x_j = (x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)})$. Esto significa que para cada $\epsilon > 0$ existe $K$ tal que si $m > k > K$ entonces $\|x_m - x_k\| < \epsilon$. En particular, puesto que

   $$|x_j^{(m)} - x_j^{(k)}| \leq \left( \sum_{s=1}^{n} |x_s^{(m)} - x_s^{(k)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|x_m - x_k\| < \epsilon$$

se sigue que también cada sucesión $\{x_j^{(s)}\}_{s=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ es de Cauchy. Como $\mathbb{C}$ es completo, entonces $\{x_j^{(s)}\}_{s=1}^{\infty}$ converge, digamos a $\chi_j$. Sea $\chi = (\chi_1, \ldots, \chi_n) \in \mathbb{C}^n$. Ahora bien, existe $K$ tal que siempre que $s > K$, entonces $|x_j^{(s)} - x_j| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$ para $j = 1, \ldots, n$, por lo cual

$$\|x_m - \chi\| = \left( \sum_{s=1}^{n} |x_s^{(m)} - \chi_s|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \left( \sum_{s=1}^{n} \frac{\epsilon^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}} = \epsilon,$$

de donde se sigue que $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ converge a $\chi$.

2. Sea $H_2 = \{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} : \text{existe } N \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_n = 0 \text{ si } n > N\}$. Si $a, b \in H_2$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$ y $b = (b_1, \ldots, b_n)$, definimos

$$(a, b) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n.$$

El espacio $H_2$ no es hilbertiano. Obsérvese primeramente que si $a \in H_2$, $a = \{a_1, a_2, \ldots\}$ y $\{a^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \subset H_2$ converge a $a$ donde $a^{(n)} = \{a_m^{(n)}\}_{m=1}^{\infty}$, entonces para cada $m$

$$|a_m - a_m^{(n)}| \leq \left( \sum_{j=1}^{\infty} |x_j - x_j^{(n)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left\| a - a^{(n)} \right\|,$$

que, de manera análoga al ejemplo anterior, implica que $\lim_{n\to\infty} a_m^{(n)} = a_m$. Sea ahora la sucesión $\{a^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \subset H_2$, donde $a^{(n)} = \{a_m^{(n)}\}_{m=1}^{\infty}$, definida a través de

$$a_m^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{si } 1 \leq m \leq n, \\ 0 & \text{si } n < m. \end{cases}$$

Observemos que si $n < k$,

$$a_m^{(n)} - a_m^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq m \leq n, \\ -\frac{1}{m} & \text{si } n < m \leq k, \\ 0 & \text{si } k < m, \end{cases}$$

lo que nos permite concluir que

$$\left\| a^{(n)} - a^{(k)} \right\| = \left[ \sum_{m=n+1}^{k} \left( \frac{1}{m} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Sabemos que la sucesión $\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m}\right)^2$ es sumable, y por lo tanto la sucesión de sus sumas parciales $s_n = \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{1}{m}\right)^2$ converge y es de Cauchy. Puesto que $\sum_{m=n+1}^{k} \left(\frac{1}{m}\right)^2 = s_k - s_n$, se sigue de la ecuación (3) que $\{a^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Es claro que para cada $m$ se cumple que $\lim_{n\to\infty} a_m^{(n)} = \frac{1}{m}$, pero la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ no pertenece a $H_2$.

3. Sea $H_3 = \{f : [a, b] \to \mathbb{C} : f \text{ es continua}\}$. Si $f, g \in H_3$, definamos

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx. \tag{4}$$

**Ejercicio 1.2.** *Demostrar que el producto definido por* (4) *es un producto interior.*

*Demostración.* Primeramente,

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx = \int_a^b \overline{\overline{f(x)}g(x)}\, dx = \overline{\int_a^b g(x)\overline{f(x)}\, dx} = \overline{(g, f)},$$

lo que comprueba la primera propiedad. Además, si $h \in H_3$

$$\begin{aligned}
(f + h, g) &= \int_a^b [f(x) + h(x)]\, \overline{g(x)}\, dx = \int_a^b \left[f(x)\overline{g(x)} + h(x)\overline{g(x)}\right] dx, \\
&= \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx + \int_a^b h(x)\overline{g(x)}\, dx = (f, g) + (h, g), \\
(\lambda f, g) &= \int_a^b \lambda f(x)\overline{g(x)}\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx = \lambda(f, g),
\end{aligned}$$

por lo que se cumplen la tercera y cuarta propiedad. Ahora atendemos al hecho de que

$$(f, f) = \int_a^b f(x)\overline{f(x)}\, dx = \int_a^b |f(x)|^2\, dx,$$

y, dado que $|f(x)|^2$ es una función real no negativa, entonces $(f, f) \geq 0$. Si $f$ es idénticamente nula, es claro que $(f, f) = 0$. Si existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) \neq 0$, por el corolario 1.1 se sigue que $(f, f) > 0$. Por lo tanto $(f, f) = 0$ si, y sólo si, $f = 0$, lo que prueba la segunda propiedad. Q. E. D.

**Ejercicio 1.3.** *Demostrar que $H_3$ no es hilbertiano.*

*Demostración.* Las funciones definidas a través de

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

son continuas en $[0, 2]$, por lo que pertenecen todas a $H_3$ con $a = 0$ y $b = 2$. Además, si $m > n$,

$$f_m(x) - f_n(x) = \begin{cases} x^m - x^n & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

luego

$$\begin{aligned}\|f_m(x) - f_n(x)\|^2 &= \int_0^1 (x^m - x^n)^2 \, dx, \\ &= \frac{1}{2m+1} - \frac{2}{mn+1} + \frac{1}{2n+1} < \frac{2}{n},\end{aligned}$$

lo que implica que la sucesión $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Sin embargo,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

pues $x^n$ puede hacerse arbitrariamente pequeño para $n$ suficientemente grande, siempre que $0 \leq x < 1$. No hay función continua $g(x) : [a, b] \to \mathbb{C}$ tal que

$$\|g(x) - f(x)\|^2 = \int_0^2 |g(x) - f(x)|^2 \, dx = 0.$$

Por lo tanto $H_3$ no es completo. Q. E. D.

4. Sea $H_4 = \{f \in C_0^\infty(\Omega) : \Omega \text{ es un conjunto abierto en } \mathbb{R}^3\}$. Aquí $C_0^\infty(\Omega)$ representa al conjunto de las funciones infinitamente diferenciables de soporte compacto en $\Omega$ con valores complejos. Si $f, g \in H_4$, definimos

$$\begin{aligned}(f, g) &= \int_\Omega \left( f\overline{g} + \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \overline{g}}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial \overline{g}}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial \overline{g}}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3. \quad (5) \\ &= \int_\Omega [f\overline{g} + \nabla f (\nabla g)^*] \, dx_1 dx_2 dx_3\end{aligned}$$

donde $z^*$ es el conjugado transpuesto de un vector $z \in \mathbb{C}^3$, visto como vector fila.

**Lema 1.1.** *Si $f \in C_0^\infty(\Omega)$, entonces*

$$\int_\Omega f(x) \, dx_1 dx_2 dx_3 < \infty$$

*Demostración.* Como $f$ es continua en un conjunto compacto y nula fuera de él, entonces es acotada. Esto significa que $f(x) < M$ para alguna $M$. Sea $\Omega_0 = \text{sop} f$. Tenemos que $\Omega_0$ es compacto. Por lo tanto está contenido dentro de algún paralelepípedo $L \subset \mathbb{R}^3$, lo que nos permite escribir

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x) \, dx_1 dx_2 dx_3 &= \int_{\Omega_0} f(x) \, dx_1 dx_2 dx_3 \\ &\leq \int_L M \, dx_1 dx_2 dx_3 \\ &\leq M\Lambda < \infty,\end{aligned}$$

donde $\Lambda$ es el volumen del paralelepípedo $L$. Q. E. D.

**Ejercicio 1.4.** *La operación descrita por* (5) *define un producto interior en* $H_4$.

*Demostración.* Por el lema 1.1 se tiene que la operación está bien definida. Puesto que

$$\begin{aligned}(f,g) &= \int_\Omega \left[f\overline{g} + \nabla f(\nabla g)^*\right] dx_1dx_2dx_3 \\ &= \int_\Omega \left[\overline{g\overline{f}} + (\nabla g(\nabla f)^*)^*\right] dx_1dx_2dx_3 \\ &= \int_\Omega \overline{\left[g\overline{f} + (\nabla g(\nabla f)^*)^t\right]} dx_1dx_2dx_3 \\ &= \overline{(g,f)}.\end{aligned}$$

entonces se cumple la primera propiedad. Ahora bien, para $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}(\lambda f,g) &= \int_\Omega \left[\lambda f\overline{g} + \nabla \lambda f(\nabla g)^*\right] dx_1dx_2dx_3 \\ &= \int_\Omega \lambda\left[f\overline{g} + \nabla f(\nabla g)^*\right] dx_1dx_2dx_3 \\ &= \lambda\int_\Omega \left[f\overline{g} + \nabla f(\nabla g)^*\right] dx_1dx_2dx_3 \\ &= \lambda(f,g),\end{aligned}$$

y también, si $h \in H_4$,

$$\begin{aligned}(f+h,g) &= \int_\Omega \left[(f+h)\overline{g} + \nabla (f+h)(\nabla g)^*\right] dx_1dx_2dx_3 \\ &= \int_\Omega \left[f\overline{g} + h\overline{g} + \nabla f(\nabla g)^* + \nabla h(\nabla g)^*\right] dx_1dx_2dx_3 \\ &= (f,g)+(h,g),\end{aligned}$$

por lo que se cumplen la tercera y cuarta propiedad. Es claro, a partir de la positividad del integrando en la definición, que $(f,f) \geq 0$ para todo $f \in H_4$. Finalmente, si $f = 0$, entonces $(f,f) = 0$. Si

$$\begin{aligned}(f,f) &= \int_\Omega \left(|f(x)|^2 + |\nabla f|^2\right) dx_1dx_2dx_3 \\ &= \int_\Omega |f(x)|^2 dx_1dx_2dx_3 + \int_\Omega |\nabla f|^2 dx_1dx_2dx_3 \\ &= 0\end{aligned}$$

entonces, al ser tanto $|f|^2$ como $|\nabla f|^2$ cantidades positivas, debe ser

$$\int_\Omega |f(x)|^2 dx_1dx_2dx_3 = 0$$

y, por el corolario 1.2, se tiene que $f = 0$, y esto demuestra que se cumple la segunda propiedad. Q. E. D.

## 1.3. Ley del paralelogramo

Seguimos aquí de cerca a [Yos80].

**Ejercicio 1.5.** *Demostrar que si $H$ es un espacio de Hilbert complejo con producto interior $(\cdot,\cdot)$ y $x, y \in H$, entonces*

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2\right). \tag{6}$$

*Demostración.* Por un lado tenemos que,

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 &= (x+y, x+y) - (x-y, x-y)\\
&= 2(x,y) - 2(y,x)\\
&= 2\left[(x,y) + \overline{(x,y)}\right]\\
&= 4\mathrm{Re}(x,y),
\end{aligned}$$

y por otro,

$$\begin{aligned}
\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2 &= (x+iy, x+iy) - (x-iy, x-iy)\\
&= -2i(x,y) + 2i(y,x)\\
&= 2i\left[\overline{(x,y)} - (x,y)\right]\\
&= 4\mathrm{Im}(x,y).
\end{aligned}$$

Luego

$$\mathrm{Re}(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

e

$$\mathrm{Im}(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right).$$

Puesto que $(x,y) = \mathrm{Re}(x,y) + i\mathrm{Im}(x,y)$, se sigue la ecuación (6). Q. E. D.

**Lema 1.2.** *Sea $H$ un espacio normado, real y completo cuya norma satisface la ley del paralelogramo. Defínase, para cualquier $x, y \in H$,*

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

*Entonces se satisfacen las siguientes propiedades.*

1. $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$.
2. $(x+y, z) = (x,z) + (y,z)$.
3. $(x,y) = (y,x)$.
4. $(x,x) = \|x\|^2$.

*Demostración.* Las dos últimas son claras a partir de la definición. Consideremos que

$$(x,z)+(y,z)=\frac{1}{4}\left(\|x+z\|^2-\|x-z\|^2+\|y+z\|^2-\|y-z\|^2\right),$$

y que, según la ley del paralelogramo, esto equivale a

$$\begin{aligned}(x,z)+(y,z)=\frac{1}{4}&\left[\frac{1}{2}\left(\|x+y+2z\|^2+\|x-y\|^2\right)\right]\\ &-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\left(\|x+y-2z\|^2+\|x-y\|^2\right)\right].\end{aligned}$$

Haciendo las manipulaciones pertinentes obtenemos

$$\begin{aligned}(x,z)+(y,z) &= \frac{1}{2}\left(\left\|\frac{x+y}{2}+z\right\|^2-\left\|\frac{x+y}{2}-z\right\|^2\right)\\ &= 2\left(\frac{x+y}{2},z\right),\end{aligned}$$

y podemos escoger $y=0$, lo que nos conduciría a $(x,z)=2\left(\frac{x}{2},z\right)$, lo cual implica que

$$(x,z)+(y,z)=2\left(\frac{x+y}{2},z\right)=(x+y,z),$$

y que se satisface el segundo inciso. Por lo tanto $(2x,y)=(x+x,y)=(x,y)+(x,y)=2(x,y)$. Suponiendo que se cumpla

$$((n-1)x,y)=(n-1)(x,y),$$

con $n\in\mathbb{N}$, entonces, usando el segundo inciso, para $n$ se tiene que

$$(nx,y)=((n-1)x,y)+(x,y)=(n-1)(x,y)+(x,y)=n(x,y), \tag{7}$$

lo que concluye el argumento inductivo que prueba que la primera propiedad es válida para $\alpha\in\mathbb{N}$. Además,

$$(x,y)=\left(\frac{n}{n}x,y\right)=n\left(\frac{1}{n}x,y\right),$$

luego la primera propiedad se cumple para todo racional por (7). De la desigualdad

$$|\|\alpha x+y\|-\|\beta x+y\||\leq\|(\alpha-\beta)x\|=|\alpha-\beta|\,\|x\|$$

se tiene que $\|\alpha x+y\|$ es continua en $\alpha$. La densidad de los racionales en $\mathbb{R}$ nos garantiza ahora que para todo $\alpha\in\mathbb{R}$ existe una sucesión de racionales $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$. Se sigue que

$$(\alpha x,y)=\left(\lim_{n\to\infty}\alpha_n x,y\right)=\lim_{n\to\infty}\alpha_n(x,y)=\alpha(x,y). \quad \text{Q. E. D.}$$

**Ejercicio 1.6.** *Sea $H$ un espacio normado completo en el cual la norma satisface la ley del paralelogramo. Demuestre que $H$ es un espacio de Hilbert.*

*Demostración.* Definamos en $H$ para cualesquiera $x, y \in H$

$$(x, y)_1 = (x, y) + i(x, iy).$$

Por lo demostrado en el lema 1.2, para que tal operación sea un producto interior sólo falta demostrar que $(x, y)_1 = \overline{(y, x)_1}$ y que $(ix, y)_1 = i(x, y)_1$. Atendamos primero al hecho de que

$$\begin{aligned}(ix, iy) &= \frac{1}{4}\left(\|ix+iy\|^2 - \|ix-iy\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)\\ &= (x, y).\end{aligned}$$

Ahora bien,

$$(x, iy) = (-iix, iy) = (-ix, y) = -(ix, y) = -(y, ix),$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}(x, y)_1 &= (x, y) + i(x, iy)\\ &= (y, x) - i(y, ix)\\ &= \overline{(y, x)_1}.\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}(ix, y)_1 &= (ix, y) + i(ix, iy)\\ &= (ix, -iiy) + i(x, y)\\ &= (x, -iy) + i(x, y)\\ &= -(x, iy) + i(x, y)\\ &= i(x, y)_1,\end{aligned}$$

que, junto con lo ya demostrado, implica que $H$ es un espacio con producto interior y, por lo tanto, de Hilbert. Q. E. D.

**Ejercicio 1.7.** *Sean $H$ un espacio de Hilbert, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones en $H$ y $x \in H$.*

1. *Si $x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada, entonces $(x_n, y_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$.*
2. *Si $\|x_n\| \underset{n\to\infty}{\to} \|x\|$ y $(x_n, x) \underset{n\to\infty}{\to} (x, x)$, entonces $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x$.*

*Demostración.* Para demostrar el primer inciso, tenemos que existe $M < \infty$ tal que $y_n < M$ para cada $n = 1, 2, \ldots$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |(x_n, y_n)| &\leq \|x_n\| \|y_n\| \\ &\leq \|x_n\| M, \end{aligned}$$

pero $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, y por la continuidad del valor absoluto, se obtiene que

$$\lim_{n\to\infty} |(x_n, y_n)| = 0,$$

lo que implica lo pedido.

Puesto que

$$\begin{aligned} (x_n - x, x_n - x) &= \|x_n\|^2 - (x_n, x) - (x, x_n) + \|x\|^2 \\ &= \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}(x, x_n) \end{aligned}$$

al tomar límites de ambos lados, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|^2 = 2\|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\,\|x\|^2 = 2\|x\|^2 - 2\|x\|^2 = 0,$$

lo que implica que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Q. E. D.

## 1.4. Sumabilidad

**Ejercicio 1.8.** *Sea $A$ un conjunto infinito y $\{y_\alpha\}_{\alpha\in A} \in \mathbb{C}$ tal que $\sum_{\alpha\in A} y_\alpha$ converge. Entonces el conjunto de índices para los cuales $y_\alpha$ es distinto de cero es a lo más numerable.*

Para resolver este ejercicio, demostraremos el caso para $\mathbb{R}$, pues $y_a = \mathrm{Re}y_\alpha + i\mathrm{Im}y_a$. Aquí la exposición es conforme a [Hou03] y a [Hal51].

**Definición 1.2.** *Para todo conjunto $X$ definimos*

$$\mathcal{F}_X = \{F \subset X : |F| < \infty\},$$

*donde $|F|$ es la cardinalidad del conjunto $F$.*

**Definición 1.3.** *Sea $X$ un conjunto y $u : X \to \mathbb{R}$. Para cada conjunto finito $F \in \mathcal{F}_X$ la suma*

$$s_F = s_F(u) := \sum_{x\in F} u_x,$$

*donde $u_x := u(x)$, se dice una suma parcial de $u$. Decimos que $u$ (o la correspondiente serie no ordenada $\sum_{x\in X} u_x$) es sumable si existe un número $s \in \mathbb{R}$ tal que*

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists F_\epsilon \in \mathcal{F}_X)(\forall F \in \mathcal{F}_X)(F \supset F_\epsilon \Longrightarrow |s_F - s| < \epsilon).$$

*El número $s$ también se llama la suma (no ordenada) de $u$ (sobre $X$) y escribimos*

$$s = \sum_{x\in X} u_x.$$

**Proposición 1.2.** *Si $u : X \to \mathbb{R}$ es no negativa, entonces $u$ es sumable si, y sólo si, sus sumas parciales son uniformemente acotadas, es decir, existe $M$ finita tal que $s_F \leq M$ para todo $F \in \mathcal{F}_X$. En tal caso, tenemos*

$$s = \sum_{x \in X} u_x = \sup\{s_F : F \in \mathcal{F}_X\}. \tag{8}$$

*Demostración.* Si $u$ es sumable con suma $s$, entonces para $\epsilon = 1$ podemos encontrar $F_1 \in \mathcal{F}_X$ tal que $F \supset F_1$, con $F \in \mathcal{F}_X$, implique $|s - s_F| < 1$, y de aquí que $s_F < s + 1$. Si ahora $F \in \mathcal{F}_X$, entonces $F_1 \cup F \supset F_1$, y por lo tanto $s_F \leq s_{F_1 \cup F} \leq s + 1$, pues $u$ es no negativa. Por lo tanto, todas las sumas parciales están acotadas por $M := s + 1$. Recíprocamente, si $M$ es una cota superior de todas las sumas parciales y si $s$ se define a través de (8), entonces, por la definición de supremo, para cada $\epsilon > 0$ podemos encontrar $F_\epsilon \in \mathcal{F}_X$ tal que $s - 2\epsilon < s_{F_\epsilon} \leq s$. Naturalmente, si $F \in \mathcal{F}_X$, y $F_\epsilon \subseteq F$, entonces $s - 2\epsilon < s_{F_\epsilon} \leq s_F \leq s$, por la no negatividad de $u$ y la definición de $s$. Pero entonces $-\epsilon < s_F - s \leq \epsilon$, lo que implica que $|s_F - s| < \epsilon$, y que corresponde a la definición de sumabilidad. Q. E. D.

Para $a \in \mathbb{R}$, definimos $a^+ := \text{máx}\{a, 0\} = \frac{|a|+a}{2}$ y $a^- := \text{máx}\{-a, 0\} = \frac{|a|-a}{2}$. Es obvio que

$$|a| = a^+ + a^-, \quad a = a^+ - a^- = 2a^+ - |a|\,.$$

**Teorema 1.3.** *Para una función $u : X \to \mathbb{R}$, lo siguiente es equivalente.*

1. *La función $u$ es sumable.*
2. *La función $u$ es absolutamente sumable (es decir, $|u|$ es sumable).*
3. *Existe $M > 0$ tal que para todo $F \in \mathcal{F}_X$ tenemos que $\sum_{x \in F} |u_x| < M$.*

*Demostración.* Probemos que el segundo inciso implica al primero. Si $\sum_{x \in X} |u_x|$ es sumable, entonces también lo es $\sum_{x \in X} u_x^+$, pues $0 \leq u_x^+ \leq |u_x|$ para cada $x \in X$, y las sumas parciales de $|u|$ están acotadas según el teorema anterior. Pero entonces también $u = 2u_x^+ - |u_x|$ es sumable.

Ahora demostremos que el primer inciso implica al segundo, suponiendo primero que $\sum_{x \in X} u_x = s$. Podemos escoger $F_1 \in \mathcal{F}_X$ tal que si $F \in \mathcal{F}_X$ y $F_1 \subseteq F$ entonces

$$\left| \sum_{x \in F} u_x - s \right| < 1,$$

y por lo tanto $\left|\sum_{x \in F} u_x\right| < 1 + |s|$. Ahora, dado cualquier $F \in \mathcal{F}_X$, tenemos

$$\sum_{x \in F} u_x = \sum_{x \in F \cup F_1} u_x - \sum_{x \in F_1 \setminus F} u_x \leq 1 + |s| + \sum_{x \in F_1} |u_x|\,.$$

Haciendo $F^+ := \{x \in F : u_x \geq 0\}$, entonces (8) implica

$$\sum_{x \in F} u_x^+ = \sum_{x \in F^+} u_x \leq 1 + |s| + \sum_{x \in F_1} |u_x|\,,$$

y por lo tanto $\sum_{x\in X} u_x^+$ es sumable. Como $|u_x| = 2u_x^+ - u_x$, se sigue que $|u|$ es sumable.

Que el segundo inciso equivale al tercero es consecuencia de la proposición 1.2, pues $|u|$ es no negativa. Q. E. D.

**Corolario 1.3.** *Cualquier función sumable $u$ tiene sumas parciales acotadas. Esto es, existe un número $M > 0$ tal que $|s_F| < M$ para toda $F \in \mathcal{F}_X$.*

**Definición 1.4.** *Decimos que $u : X \to \mathbb{R}$ satisface el criterio de Cauchy si*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists F_\epsilon \in \mathcal{F}_X)(\forall F \in \mathcal{F}_X)(F \cap F_\epsilon = \emptyset \Longrightarrow |s_F| < \epsilon).$$

**Ejercicio 1.9.** *Sea $u : X \to \mathbb{R}$. Demostrar lo siguiente.*

1. *Si $u$ satisface el criterio de Cauchy, entonces también lo satisface la restricción $u|_Y$ para todo $Y \subset X$. Deducir que las funciones $u^+ := \sup\{u, 0\}$ y $u^- := \sup\{-u, 0\}$ también satisfacen el criterio de Cauchy.*

2. *Si $u$ satisface el criterio de Cauchy, entonces tiene sumas parciales acotadas. Esto es, existe $M > 0$ con $\left|\sum_{x\in F} u_x\right| < M$ para cada $F \in \mathcal{F}_X$.*

3. *Si $u$ es sumable, entonces $u$ satisface el criterio de Cauchy.*

*Demostración.* Sea $F \in \mathcal{F}_Y$. Entonces $F$ es finito y $F \subset Y \subset X$, y por lo tanto $F \in \mathcal{F}_X$, es decir, $\mathcal{F}_Y \subset \mathcal{F}_X$. Para $\epsilon > 0$ existe $F_\epsilon \in \mathcal{F}_X$ tal que para todo $F \in \mathcal{F}_X$, si $F \cap F_\epsilon = \emptyset$, entonces $|s_F| < \epsilon$. Hagamos $F'_\epsilon = Y \cap F_\epsilon \in \mathcal{F}_Y$. Ahora se tiene que siempre que $G \in \mathcal{F}_Y$, si $G \cap F'_\epsilon = \emptyset$, entonces $|s_G| < \epsilon$. Esto es porque $G \cap F'_\epsilon = \emptyset$ implica que $G \cap F_\epsilon = \emptyset$. En particular, para los conjuntos $X^+ = \{x \in X : u_x \geq 0\}$ y $X^- = \{x \in X : u_x \leq 0\}$ se tiene que $u^+ = u|_{X^+}$ y $u^- = u|_{X^-}$. Esto prueba la primera afirmación.

Demostremos la segunda afirmación. Existe $F_1$ tal que para $F \in \mathcal{F}_X$, si $F \cap F_1 = \emptyset$, entonces $|s_F| < 1$. Tomemos $M = \max\{\left|\sum_{x\in F} u_x\right| : F \subseteq F_1\}$, el cual es finito pues $F_1$ es finito. Ahora se tiene que $|s_F| < M + 2$ para cualquier $F \in \mathcal{F}_X$, pues $F = (F \cap F_1) \cup (F \setminus F_1)$, lo que implica que

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{x\in F} u_x\right| &= \left|\sum_{x\in F\cap F_1} u_x + \sum_{x\in F\setminus F_1} u_x\right| \\
&\leq \left|\sum_{x\in F\cap F_1} u_x\right| + \left|\sum_{x\in F\setminus F_1} u_x\right| \\
&\leq M + 1 < M + 2.
\end{aligned}$$

Finalmente, probemos la tercera afirmación. Sea $s = \sum_{x\in X} u(x)$ y tómese $F_\epsilon \in \mathcal{F}_X$ de modo que $|s - s_F| < \frac{\epsilon}{2}$ para toda $F \supset F_\epsilon$, con $F \in \mathcal{F}_X$. Sea $\epsilon > 0$; si $F \in \mathcal{F}_X$ y $F \cap F_\epsilon = \emptyset$, observamos que

$$\begin{aligned}
|s_F| &= |s_{F\cup F_\epsilon} - s_{F_\epsilon}| = |s_{F\cup F_\epsilon} - s + s - s_{F_\epsilon}| \\
&\leq |s_{F\cup F_\epsilon} - s| + |s - s_{F_\epsilon}| \leq \epsilon. \quad \text{Q. E. D.}
\end{aligned}$$

**Corolario 1.4.** *Una función $u : X \to \mathbb{R}$ es sumable si, y sólo si, satisface el criterio de Cauchy.*

*Demostración.* La necesidad es consecuencia del tercer inciso del ejercicio 1.9. La suficiencia también es consecuencia del mismo ejercicio 1.9, pues tenemos que si $u$ satisface el criterio de Cauchy, entonces también $u^+$ y $u^-$ lo satisfacen y $u = u^+ - u^-$. Pero tanto $u^+$ como $u^-$ tienen sumas parciales acotadas, y por lo tanto son sumables. Q. E. D.

Tenemos ahora las herramientas necesarias para probar el ejercicio 1.8.

*Demostración del ejercicio 1.8.* Como $y$ es absolutamente sumable, tenemos que $s := \sum_{\alpha\in A} |y_\alpha| < \infty$. Sean $D := \{\alpha \in A : |y_\alpha| > 0\}$ y $D_n := \{\alpha \in A : |y_\alpha| > \frac{1}{n}\}$ para $n \in \mathbb{N}$. Entonces $D_n$ es finito, pues de lo contrario la suma $\sum_{\alpha\in D_n} |y_\alpha|$ podría hacerse arbitrariamente grande. De hecho, $|D_n| < ns$, pues

$$ns = \sum_{\alpha\in A} n\,|y_\alpha| \geq \sum_{\alpha\in D_n} n\,|y_\alpha| > \sum_{\alpha\in D_n} 1 = |D_n|\,.$$

Como $D = \cup_{n=1}^{\infty} D_n$, el ejercicio se sigue. Q. E. D.

**Ejercicio 1.10.** *Utilizando el criterio de Cauchy, deducir el ejercicio 1.8.*

*Demostración.* Como $y$ es sumable, entonces satisface el criterio de Cauchy. Sea $D := \{\alpha \in A : |y_\alpha| > 0\}$. Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $F_{\frac{1}{n}} \in \mathcal{F}_A$ tal que siempre que $\alpha \notin F_{\frac{1}{n}}$, con $\alpha \in A$, entonces $|y_\alpha| < \frac{1}{n}$ o, equivalentemente, si $|y_\alpha| \geq \frac{1}{n}$, entonces $\alpha \in F_{\frac{1}{n}}$. Para todo $\alpha \in A$, siempre que $|y_\alpha| > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|y_\alpha| \geq \frac{1}{n}$, de donde se sigue que $\cup_{n=1}^{\infty} F_{\frac{1}{n}} \supseteq D$. Como $\cup_{n=1}^{\infty} F_{\frac{1}{n}}$ es, a lo más, numerable, se sigue que también $D$ es, a lo sumo, numerable. Q. E. D.

## 1.5. Conjuntos ortonormales

**Ejercicio 1.11.** *Sean $H$ un espacio de Hilbert y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $H$.*

1. *Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión ortogonal tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty$ entonces $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde $y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$, es una sucesión de Cauchy.*

2. *Demostrar que la hipótesis de ortogonalidad en el inciso anterior es necesaria.*

*Demostración.* Para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $m > n \geq N$, entonces

$\sum_{i=n}^{m} \|x_i\|^2 < \epsilon^2$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\|y_m - y_n\| &= \left\| \sum_{i=n+1}^{m} x_i \right\| \\
&= \left[ \left( \sum_{k=n+1}^{m} x_k, \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left( \sum_{k=n+1}^{m} \sum_{k=n+1}^{m} (x_k, x_j) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left( \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon,
\end{aligned}$$

lo que implica que $y_n$ es de Cauchy.

Ahora bien, si $H$ es un espacio trivial, la segunda afirmación no tiene sentido, porque entonces todas las sucesiones en el espacio serían ortogonales. Consideremos $H$ un espacio de Hilbert no trivial y $x \in H$, el cual podemos suponer unitario. Formemos la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \frac{1}{n}x$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$. Sin embargo, para la sucesión $y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$,

$$\begin{aligned}
\|y_m - y_n\| &= \left\| \sum_{i=n+1}^{m} \frac{1}{n} x \right\| \\
&= \left\| x \sum_{i=n+1}^{m} \frac{1}{n} \right\| \\
&= \left( \sum_{i=n+1}^{m} \frac{1}{n} \right) \|x\| \\
&= \sum_{i=n+1}^{m} \frac{1}{n},
\end{aligned}$$

y las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ no son una sucesión de Cauchy, pues la serie armónica no converge. Q. E. D.

**Ejercicio 1.12.** *Supongamos que* $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión ortonormal en un espacio de Hilbert* $H$ *y que* $x \in H$ *es tal que* $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, \psi_n)|^2$. *Entonces* $x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, \psi_n) \psi_n$.

*Demostración.* Como $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un conjunto ortonormal, puede extenderse a una base ortonormal $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in A} \supseteq \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$del espacio de Hilbert. Ahora podemos escribir

$$x = \sum_{\alpha \in A} (x, \psi_\alpha) \psi_\alpha.$$

Como $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \{\psi_\alpha\}_{\alpha\in A}$, existe una función inyectiva $\phi : \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty} \to \{\psi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de modo que $\psi_\alpha \in \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ si, y sólo si, $\psi_\alpha = \phi(\psi_n)$ para algún único $n \in \mathbb{N}$. Esto a su vez implica que existe una función inyectiva $\kappa : \mathbb{N} \to A$ tal que $\psi_\alpha \in \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ si, y sólo si, $\kappa(n) = \alpha$ para algún único $n \in \mathbb{N}$. Haciendo $A' = \kappa(\mathbb{N})$, tenemos que $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in A'} = \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ahora

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |(x,\psi_n)|^2 = \sum_{\alpha\in A} |(x,\psi_\alpha)|^2 \\ &= \sum_{\alpha\in A'} |(x,\psi_\alpha)|^2 + \sum_{\alpha\in A\setminus A'} |(x,\psi_\alpha)|^2, \end{aligned}$$

lo que implica que $\sum_{\alpha\in A\setminus A'} |(x,\psi_\alpha)|^2 = 0$, porque las series son absolutamente convergentes. Por lo tanto, $(x,\psi_\alpha) = 0$ para toda $\alpha \in A \setminus A'$ (dado que $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es linealmente independiente y no puede tener combinaciones lineales finitas no triviales de 0), de donde

$$x = \sum_{\alpha\in A} (x,\psi_\alpha)\,\psi_\alpha = \sum_{\alpha\in A'} (x,\psi_\alpha)\,\psi_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} (x,\psi_n)\,\psi_n,$$

pues todas las series de la ecuación son absolutamente convergentes. Q. E. D.

**Ejercicio 1.13.** *Si $M$ es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $H$, entonces $\left(M^{\perp}\right)^{\perp} = M$.*

*Demostración.* Sea $x \in M$. Entonces, para todo $y \in M^{\perp}$, se tiene que $(x,y) = 0$. Por lo tanto $M \subseteq \left(M^{\perp}\right)^{\perp}$. Ahora sea $x \in \left(M^{\perp}\right)^{\perp}$. Existen proyecciones $P : H \to M$, $Q : H \to M^{\perp}$, $R : H \to \left(M^{\perp}\right)^{\perp}$ tales que $x = Px + Qx = Qx + Rx$, lo que quiere decir que $Px = Rx = x$, pues $x \in \left(M^{\perp}\right)^{\perp}$, pero $Px = x$ implica que $x \in M$. Luego $M \supseteq \left(M^{\perp}\right)^{\perp}$, de donde se desprende la afirmación. Q. E. D.

**Ejercicio 1.14.** *Sea $M$ un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $H$. El cociente $H/M$ es un espacio de Hilbert dotándolo con la norma*

$$\|\widetilde{x}\| = \inf\{\|x+h\| : h \in M\}. \tag{9}$$

*Demostración.* Como $M$ es un subgrupo del grupo abeliano $H$ bajo la suma de vectores, se sigue que $M$ es normal en $H$, lo que significa que el cociente $H/M$ es también un grupo abeliano. La multiplicación por un escalar $\lambda \in K$ se preserva también, pues $\lambda(h+M) = \lambda h + M$ con $h \in H$. La operación está bien definida, pues si

$$h_1 + M = h_2 + M \tag{10}$$

para $h_1, h_2 \in H$, entonces $h_1 + m_1 = h_2 + m_2$ para $m_1, m_2 \in M$, luego $\lambda h_1 + \lambda m_1 = \lambda h_2 + \lambda m_2$, pero al ser $M$ subespacio, se sigue que $\lambda h_1 + M = \lambda h_2 + M$. El resto de las propiedades del producto por escalar se heredan de las propiedades de $H$. Se tiene que, si tenemos dos elementos de $H/M$ como en la ecuación (10), entonces para la proyección $P$ de $H$ sobre $M$,

$$\begin{aligned}
\|h_1 - Ph_1\| &= \inf\{\|h_1 + x\| : x \in M\} \\
&= \inf\{\|h_1 + m_1 - m_2 + x\| : m_1 - m_2 + x \in M\} \\
&= \inf\{\|h_2 + x\| : x \in M\}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor de (9) de una clase lateral no depende del representante que se escoja, y tal valor está bien definido, según el teorema de mejor aproximación. Ahora bien,

$$\left\|\widetilde{0}\right\| = \inf\{\|h\| : h \in M\} = 0,$$

pues el cero está en $M$. Ahora bien, si $\|\widetilde{x}\| = \inf\{\|x+h\| : h \in M\} = 0$, es porque para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $h_n \in M$ tal que $\|x + h_n\| \leq \frac{1}{n}$, luego $x = -\lim_{n\to\infty} h_n$, pero como el espacio $H$ es completo, se sigue que $x \in H$, lo que implica que $\widetilde{x} = 0$. Observemos ahora que, para cualesquiera $x \in \widetilde{x}$ e $y \in \widetilde{y}$ existen $h_0, h_1 \in M$ tales que

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{x}\| + \|\widetilde{y}\| &= \|x + h_0\| + \|y + h_1\| \\
&\geq \|x + y + h_0 + h_1\| \geq \inf_{h\in M} \{\|x + y + h\|\} = \|\widetilde{x} + \widetilde{y}\|
\end{aligned}$$

lo que significa que (9) satisface la desigualdad del triángulo, y por lo tanto define una norma en $H/M$. Veamos que $H/M$ es completo.

Tenemos que $H/M$ es isomorfo a $M^{\perp}$. Sabemos que, siendo $P$ la proyección de $H$ sobre $M$, se tiene

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{x}\| &= \inf\{\|x + h\| : h \in M\} \qquad (11)\\
&= \|x - Px\| = \|Qx\|,
\end{aligned}$$

donde $Q = I - P$ es la proyección de $H$ sobre $M^{\perp}$. Tal hecho sugiere que, definiendo $F : H/M \to M^{\perp}$ a través de

$$F\widetilde{x} = Qx,$$

obtendremos la isometría buscada. Primeramente, $F$ está bien definida, pues si $\widetilde{x}_1 = \widetilde{x}_2$, entonces $x_1 = x_2 + m$ para algún $m \in M$, luego

$$\begin{aligned}
F\widetilde{x}_1 &= Qx_1 \\
&= Q(x_2 + m) \\
&= Qx_2 + Qm \\
&= Qx_2 = F\widetilde{x}_2.
\end{aligned}$$

La función $F$ es inyectiva: si $\widetilde{x} \in \text{nuc}F$, entonces $F\widetilde{x} = Qx = 0$, lo que implica que $x \in \text{nuc}Q = M$, por lo tanto $\widetilde{x} = \widetilde{0}$, y de aquí que $\text{nuc}F = \left\{\widetilde{0}\right\}$.

También $F$ es suprayectiva, pues para cada $x \in M^{\perp}$ tenemos que $\widetilde{x}$ es tal que $F\widetilde{x} = Qx = x$. Finalmente, $F$ es una isometría, pues

$$\|F\widetilde{x}\| = \|Qx\| = \|\widetilde{x}\|,$$

por la ecuación (11). Como el conjunto $M^{\perp}$ es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert, entonces también es un espacio de Hilbert. Por lo tanto, $H/M$ es un espacio de Hilbert. Q. E. D.

**Lema 1.3.** *La función $\|\cdot\| : H^* \to \mathbb{R}$ definida en el dual $H^*$ de un espacio de Hilbert $H$ mediante*

$$\|L\|_1 = \sup_{\|h\|=1} \{|Lh|\}$$

*para cada $L \in H^*$, es una norma en $H^*$.*

*Demostración.* Puesto que $L$ es continua, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$|Lx| \leq c\,\|x\|,$$

en particular, si $\|x\| = 1$, entonces

$$\sup_{\|x\|=1} |Lx| \leq c,$$

así que $\|L\|_1$ está bien definida. Además, si $O$ es el operador nulo, entonces $\|Ox\| = 0$ para todo $x$ tal que $\|x\| \leq 1$, luego $\|O\|_1 = 0$. Por otro lado, si $\|L\|_1 = 0$, es porque $\|Lx\| = 0$ para todo $\|x\| \leq 1$, y para cualquier $y \in H$, $\left\|L\frac{y}{\|y\|}\right\| = 0$, luego $\|Ly\| = 0$, lo que implica que $L = O$.

También, para $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \|\lambda L\|_1 &= \sup_{\|x\|=1} \{|\lambda Lx|\} \\ &= \sup_{\|x\|=1} \{|\lambda|\,|Lx|\} \\ &= |\lambda| \sup_{\|x\|=1} \{|Lx|\} = |\lambda|\,\|L\|_1 . \end{aligned}$$

Ahora, si $L, N \in H^*$, se satisface siempre que $x \in H$ y $\|x\| = 1$ y que

$$\begin{aligned} |(L+N)x| &\leq |Lx| + |Nx| \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} \{|Lx|\} + \sup_{\|x\|=1} \{|Nx|\} = \|L\|_1 + \|N\|_1 , \end{aligned}$$

luego $\|L+N\|_1 = \sup_{\|x\|=1} \{|(L+N)x|\} \leq \|L\|_1 + \|N\|_1$. Esto comprueba que $\|\cdot\|_1$ es una norma en $H^*$. Q. E. D.

**Notación 1.1.** *Sea $H$ un espacio de Hilbert. Denotamos por $\mathcal{B}(H)$ al conjunto de los operadores lineales continuos de $H$ en $H$.*

**Ejercicio 1.15.** *El conjunto $\mathcal{B}(H)$ es un espacio normado completo. La norma de $T \in \mathcal{B}(H)$ está definida por*

$$\|T\|_1 = \sup\{\|Tx\| : x \in H, \|x\| \leq 1\}.$$

*Demostración.* Como $T$ es continua, existe $c \in R$ tal que para toda $x \in H$

$$\|Lx\| \leq c\|x\|,$$

en particular, si $\|x\| \leq 1$ entonces

$$\|Lx\| \leq c.$$

Por lo tanto, el valor $\|T\|_1$ está bien definido. Además, si $O$ es el operador nulo, entonces $\|Ox\| = 0$ para todo $x$ tal que $\|x\| \leq 1$, luego $\|O\|_1 = 0$. Por otro lado, si $\|T\|_1 = 0$, es porque $\|Tx\| = 0$ para todo $\|x\| \leq 1$, y para cualquier $y \in H$, $\left\|T\frac{y}{\|y\|}\right\| = 0$, luego $\|Ty\| = 0$, lo que implica que $T = O$.

También, para $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \|\lambda T\|_1 &= \sup_{\|x\|\leq 1}\{\|\lambda Tx\|\} \\ &= \sup_{\|x\|\leq 1}\{|\lambda|\,\|Tx\|\} \\ &= |\lambda|\sup_{\|x\|\leq 1}\{\|Tx\|\} = |\lambda|\,\|T\|_1. \end{aligned}$$

Ahora, si $S, T \in \mathcal{B}(H)$, se satisface siempre que $x \in H$ y $\|x\| < 1$ y que

$$\begin{aligned} \|(T+S)x\| &\leq \|Tx\| + \|Sx\| \\ &\leq \sup_{\|x\|\leq 1}\{\|Tx\|\} + \sup_{\|x\|\leq 1}\{\|Sx\|\} = \|T\|_1 + \|S\|_1, \end{aligned}$$

luego $\|T+S\|_1 = \sup_{\|x\|\leq 1}\{\|(T+S)x\|\} \leq \|T\|_1 + \|S\|_1$. Esto comprueba que $\|\cdot\|_1$ es una norma en $\mathcal{B}(H)$. Finalmente, veamos que $\mathcal{B}(H)$ es completo. Para ello, sea $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy. Para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, siempre que $m > n > N$, se satisface $\|T_m - T_n\|_1 < \epsilon$. Para cualquier $y \in H$ no nulo,

$$\left\|T_m\frac{y}{\|y\|} - T_n\frac{y}{\|y\|}\right\| \leq \|T_m - T_n\|_1 < \epsilon,$$

luego

$$\|T_m y - T_n y\| < \epsilon\|y\|,$$

esto implica que la sucesión $\{T_n y\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ es de Cauchy, por lo cual tiene un límite $Ty$. Ahora el operador $T$ en $H$ definido a través de

$$Ty = \lim_{n\to\infty} T_n y,$$

es lineal (obsérvese que $T(0) = \lim_{n\to\infty} T_n(0) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$), pues

$$\begin{aligned} T(x+\lambda y) &= \lim_{n\to\infty} T_n(x+\lambda y) \\ &= \lim_{n\to\infty} T_n x + \lambda \lim_{n\to\infty} T_n y \\ &= Tx + \lambda T y. \end{aligned}$$

Por la continuidad de la norma en $H$, tenemos que, siempre que $n > N$,

$$\|Ty - T_n y\| < \epsilon \|y\|, \tag{12}$$

por lo cual $T - T_n$ es un operador continuo, luego $T = T_n + (T - T_n)$ también es continuo. De la ecuación (12) se sigue que, para $y \in H$ con $\|y\| \leq 1$, siempre que $n > N$,

$$\|Ty - T_n y\| < \epsilon,$$

lo que implica que $\|T - T_n\|_1 \leq \epsilon$, y por lo tanto $\lim_{n\to\infty} \|T - T_n\|_1 = 0$, y de aquí que $\lim_{n\to\infty} T_n = T$. Q. E. D.

## 1.6. Operador adjunto

**Teorema 1.4.** *Sea $T \in \mathcal{B}(H)$. Se cumple lo siguiente.*

1. *El operador $T$ es normal si, y sólo si, $\|Tx\| = \|T^*x\|$ para toda $x \in H$.*
2. *Si $T$ es normal, entonces $\mathrm{nuc}(T) = \mathrm{nuc}(T^*) = R(T^*)^{\perp}$.*
3. *Si $T$ es normal y para alguna $x \in H$ y alguna $\alpha \in \mathbb{C}$ se cumple $Tx = \alpha x$, entonces $T^*x = \overline{\alpha}x$.*

*Demostración.* Demostremos el primer inciso. Si $T$ es normal, se satisface $TT^* = T^*T$. Luego para toda $x \in H$,

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= (Tx, Tx) \\ &= (x, T^*Tx) \\ &= (x, TT^*x) \\ &= (T^*x, T^*x) = \|T^*x\|^2, \end{aligned}$$

es decir,

$$\|Tx\| = \|T^*x\|. \tag{13}$$

Supongamos ahora que se cumple (13). Entonces, para toda $x \in H$,

$$\begin{aligned} (T^*x, T^*x) &= \|T^*x\|^2 = \|Tx\|^2 = (Tx, Tx) \\ (x, TT^*x) &= (x, T^*Tx), \end{aligned}$$

se sigue que $T^*Tx = TT^*x$ para toda $x \in H$, lo que implica que $T^*T = TT^*$ y, consecuentemente, $T$ es normal.

Pasamos ahora al segundo inciso. Ya sabemos que $R(T^*)^\perp = \text{nuc}(T)$ para todo $T \in \mathcal{B}(H)$. Supongamos que $T$ es normal, entonces

$$\begin{aligned}(x \in \text{nuc}T) &\iff (Tx = 0) \iff (\|Tx\| = 0) \iff \\ &\iff (\|T^*x\| = 0) \iff (T^*x = 0) \iff (x \in \text{nuc}T^*)\,,\end{aligned}$$

o, lo que es lo mismo, $\text{nuc}T = \text{nuc}T^*$. Para probar el tercer inciso, observemos que, si $I$ es la identidad de $\mathcal{B}(H)$ y $x, y \in H$,

$$\begin{aligned}(y, I^*x) &= (Iy, x) \\ &= (y, x)\end{aligned}$$

por lo tanto $I = I^*$. Ahora, se tiene que $Tx = \alpha x$ para alguna $x \in H$ y alguna $\alpha \in \mathbb{C}$ si, y sólo si, $x \in \text{nuc}\,(T - \alpha I)$. Si probamos que $(T - \alpha I)$ es normal, entonces se concluirá lo requerido. En efecto,

$$\begin{aligned}(T - \alpha I)\,(T^* - \overline{\alpha} I) &= TT^* - \overline{\alpha} T - \alpha T^* - \alpha\overline{\alpha} I \\ &= T^*T - \alpha T^* - \overline{\alpha} T - \overline{\alpha}\alpha I \\ &= (T^* - \overline{\alpha} I)\,(T - \alpha I)\,. \quad \text{Q. E. D.}\end{aligned}$$

**Ejercicio 1.16.** *Sean $H$ un espacio de Hilbert y $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$ una base ortonormal en $H$. Si para $n = 0, 1, 2, \ldots$, $a_n = \phi_{2n}$, $b_n = \phi_{2n} + \frac{1}{n+1}\phi_{2n+1}$, $X$ es la cerradura del espacio vectorial* $\text{gen}\,\{a_n\}_{n=0}^\infty$ *generado por $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ y $Y$ es la cerradura de* $\text{gen}\,\{b_n\}_{n=0}^\infty$, *entonces*

1. *se cumple $X \cap Y = \{0\}$,*
2. *se satisface $X + Y$ es denso en $H$ pero no es un conjunto cerrado.*

*Demostración.* Sea $u \in X \cap Y$. Entonces, por ser $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$ una base ortonormal y $u \in \overline{\text{gen}\,\{a_n\}_{n=0}^\infty} \cap \overline{\text{gen}\,\{b_n\}_{n=0}^\infty}$

$$\begin{aligned}u &= \sum_{i=0}^\infty \alpha_i \phi_{2i} \\ &= \sum_{i=0}^\infty \beta_i \left(\phi_{2i} + \frac{1}{i+1}\phi_{2i+1}\right) \\ &= \sum_{i=0}^\infty \beta_i \phi_{2i} + \sum_{i=0}^\infty \frac{\beta_i}{i+1}\phi_{2i+1},\end{aligned}$$

lo que implica que

$$0 = \sum_{i=0}^\infty (\alpha_i - \beta_i)\,\phi_{2i} + \sum_{i=0}^\infty \frac{\beta_i}{i+1}\phi_{2i+1},$$

de donde $\beta_i = 0$, dada la representación única del 0 en la base ortonormal, y de aquí que $\alpha_i = 0$. Luego $u = 0$.

Para cualquier $v \in H$ y $\epsilon > 0$, existe $M$ tal que

$$\left| v - \sum_{n=0}^{M} \hat{v}(n)\phi_n \right| \leq \epsilon,$$

pero

$$\sum_{n=0}^{M} \hat{v}\,(n)\,\phi_n = \sum_{n=0}^{M} \left(\hat{v}(2n) - (n+1)\hat{v}(2n+1)\right)\phi_{2n}$$
$$+ \sum_{n=0}^{M} (n+1)\hat{v}\,(2n+1)\left(\phi_{2n} + \frac{1}{n+1}\phi_{2n+1}\right) \in X + Y,$$

así que definiendo

$$x_M = \sum_{n=0}^{M} \left(\hat{v}(2n) - (n+1)\hat{v}(2n+1)\right)\phi_{2n},$$
$$y_M = \sum_{n=0}^{M} (n+1)\hat{v}\,(2n+1)\left(\phi_{2n} + \frac{1}{n+1}\phi_{2n+1}\right)$$

se tiene que

$$|v - (x_M + y_M)| \leq \epsilon$$

luego $X + Y$ es denso en $H$. Sin embargo, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\hat{v}(2n+1)\phi_{2n}$$

no convergerá para el elemento $v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}\phi_{2k+1} \in H$. Luego $X + Y$ no es cerrado. Q. E. D.

**Ejercicio 1.17.** *Sean $S, T \in \mathcal{B}(H)$. Pruebe que si $S^* \circ S + T^* \circ T = 0$, entonces $S = T = 0$.*

*Demostración.* Sean $x \in H$ arbitrario. Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= (x, (S^*S + T^*T)\,x) = (x, S^*Sx) + (x, T^*Tx) \\ &= (Sx, Sx) + (Tx, Tx) = \|Sx\|^2 + \|Tx\|^2\,, \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\|Sx\| = \|Tx\| = 0,$$

luego $Sx = Tx = 0$ para todo $x$, que no es otra cosa que decir que $S = T = 0$. Q. E. D.

**Ejercicio 1.18.** *Sea $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base ortonormal en $H$ y sea $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ una sucesión acotada con $M = \sup\{|\lambda_n| : n = 1, 2, \ldots\}$. Existe un operador $T$, único, tal que $T\phi_n = \lambda_n\phi_n$ para $n = 1, 2, \ldots$. Además, $T$ es normal y satisface $\|T\| = M$.*

*Demostración.* Todo elemento $x \in H$ se puede escribir como

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x}_n \phi_n.$$

Extendemos entonces la definición del operador a través de

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x}_n T\phi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \widehat{x}_n \phi_n.$$

Al ser $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ acotada, existe $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| > 0$, lo que implica que el operador $T$ está bien definido sobre todo $H$, pues

$$\|Tx\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \widehat{x}_n \phi_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n \widehat{x}_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} M |\widehat{x}_n|^2 \leq M \|x\|^2 .$$

De aquí obtenemos, además, que $\|T\| \leq M$. Por ser $M$ el supremo de $\{|\lambda_n|\}_{n=1}^{\infty}$, se sigue que para todo $\epsilon > 0$ existe $k$ tal que

$$M - \epsilon < \|T\phi_k\| = \|\lambda_k\| ,$$

de donde se deduce que $\|T\| \geq M$, y por lo tanto $\|T\| = M$. Afirmamos que este operador es único, pues de existir $U$ tal que $U\phi_n = \lambda_n \phi_n$, para toda $\phi_i \in \{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ tenemos que

$$(T - U)\, \phi_i = \lambda_i \phi_i - \lambda_i \phi_i = 0,$$

y por lo tanto $(T - U)\, x = 0$ para todo $x \in H$, lo que implica que $T = U$, es decir, $T$ es único. Finalmente, afirmamos que

$$T^* x = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda_n} \widehat{x}_n \phi_n,$$

y que $T$ es normal. En efecto, para todo $x, y \in H$ se tiene

$$\begin{aligned} (x, Ty) &= \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x}_n \overline{\lambda_n \widehat{y}_n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda_n} \widehat{x}_n \overline{\widehat{y}_n} \\ &= (T^* x, y) , \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} (x, TT^* y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x}_n \lambda_n \overline{\lambda_n \widehat{y}_n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x}_n \overline{\lambda_n} \lambda_n \overline{\widehat{y}_n} \\ &= (x, T^* T y) , \end{aligned}$$

y estas identidades verifican la afirmación. Q. E. D.

**Ejercicio 1.19.** *Si $S$ y $T$ son operadores unitarios en un espacio de Hilbert, también lo es $S \circ T$.*

*Demostración.* En efecto, si $S$ y $T$ son operadores unitarios entonces

$$\begin{aligned}(S \circ T)(S \circ T)^* &= (S \circ T)(T^* \circ S^*) \\ &= (S \circ (T \circ T^*)) \circ S^* \\ &= (S \circ I) \circ S^* = S \circ S^* = I,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(S \circ T)^* (S \circ T) &= (T^* \circ S^*)(S \circ T) \\ &= (T^* \circ (S^* \circ S)) \circ T \\ &= (T^* \circ I) \circ T = T^* \circ T = I,\end{aligned}$$

lo que implica que $S \circ T$ es unitario. Q. E. D.

**Lema 1.4.** *El producto de dos operadores autoadjuntos $S$ y $T$ es autoadjunto si, y sólo si,*

$$S \circ T = T \circ S.$$

*Demostración.* Sean $S$ y $T$ operadores autoadjuntos. Supongamos que $S \circ T$ es autoadjunto. Entonces

$$\begin{aligned}S \circ T &= (S \circ T)^* \\ &= T^* \circ S^* \\ &= T \circ S,\end{aligned}$$

es decir, $S$ y $T$ conmutan.

Ahora, si $S$ y $T$ conmutan, entonces

$$\begin{aligned}(S \circ T)^* &= T^* \circ S^* \\ &= T \circ S \\ &= S \circ T,\end{aligned}$$

lo que significa que $S \circ T$ es autoadjunto. Q. E. D.

**Definición 1.5.** *Un operador $T \in \mathcal{B}(H)$ se llama positivo si $(Tx, x) \geq 0$ para toda $x \in H$, y se escribe $T \geq 0$.*

**Ejercicio 1.20.** *Sea $T \in \mathcal{B}(H)$. Demostrar las siguientes afirmaciones.*

1. *Se cumple $T^* \circ T \geq 0$.*
2. *Si $T$ es positivo y $S \in \mathcal{B}(H)$, entonces $S^* \circ T \circ S \geq 0$.*

   *Si $H$ es un espacio de Hilbert complejo y $T$ es positivo, entonces:*

*3.* *El operador $T$ es autoadjunto.*

*4.* *Se satisface $|(Tx,y)|^2 \leq (Tx,x)\,(Ty,y)$ para toda $x, y \in H$.*

*5.* *Se cumple $Tx = 0$ si, y sólo si, $(Tx,x) = 0$.*

*Demostración.* Procederemos punto por punto.

1. Como para toda $x \in H$ y todo $T \in \mathcal{B}(H)$ tenemos $0 \leq \|Tx\|^2 = (Tx,Tx) = (T^*Tx,x)$, se sigue lo requerido.

2. Dado que $T$ es positivo, para toda $x \in H$ se tiene $(Tx,x) \geq 0$. En particular, para todo $x \in H$,

$$0 \leq (T\,(Sx)\,,Sx) \leq (S^*TSx,x)\,,$$

lo que implica lo que se pedía.

3. En virtud de que $(Tx,x) \geq 0$, debe ser que $(Tx,x)$ es real para todo $x \in H$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}(Tx,x) &= (x,T^*x)\\ &= \overline{(T^*x,x)}\\ &= (T^*x,x)\,,\end{aligned}$$

lo que significa que $Tx = T^*x$ para toda $x \in H$, es decir, $T = T^*$, y con ello que $T$ es autoadjunto.

4. Si $(Tx,y) = 0$, el resultado es inmediato. Supongamos entonces que $(Tx,y) \neq 0$, y por ello se satisface para toda $\lambda \in \mathbb{C}$, por el hecho de ser $T$ positivo, la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}0 \leq (T\,(x-\lambda y)\,,x-\lambda y) =&\\ &(Tx,x) - \overline{\lambda}\,(Tx,y) - \lambda\,(Ty,x) + \lambda\overline{\lambda}\,(Ty,y)\,. \quad (14)\end{aligned}$$

Sea $\lambda_0 = \frac{|(Tx,y)|}{(Ty,x)} = \frac{|(y,Tx)|}{(Ty,x)} = \frac{|(T^*y,x)|}{(Ty,x)} = \frac{|(Ty,x)|}{(Ty,x)}$, (pues sabemos que $T$ es autoadjunto). Claramente $|\lambda_0| = 1$, y si en la desigualdad (14) tomamos $\lambda = \lambda_0 r$, con $r \in \mathbb{R}$, obtenemos

$$0 \leq (Tx,x) - 2r\,|(Ty,x)| + r^2\,(Ty,y)\,.$$

Haciendo $f(r) = (Tx,x) - r\,|(Ty,x)| + r^2\,(Ty,y)$, vemos que $f$ alcanza su mínimo cuando $r = \frac{|(Ty,x)|}{(Ty,y)}$, de lo cual se desprende que

$$\begin{aligned}0 &\leq (Tx,x) - 2\frac{|(Ty,x)|}{(Ty,y)}\,|(Ty,x)| + \left(\frac{|(Ty,x)|}{(Ty,y)}\right)^2 (Ty,y)\\ &\leq (Tx,x) - 2\frac{|(Ty,x)|^2}{(Ty,y)} + \frac{|(Ty,x)|^2}{(Ty,y)}\\ &\leq (Tx,x) - \frac{|(Ty,x)|^2}{(Ty,y)},\end{aligned}$$

y de aquí se obtiene lo pedido, $|(Tx,y)|^2 \leq (Tx,x)\,(Ty,y)$.

5. Si $Tx = 0$, es claro que $(Tx,x) = 0$. Supongamos ahora que $(Tx,x) = 0$, excluyendo el caso trivial en el que $x = 0$. Por el inciso anterior, para toda $y \in H$ se cumple que
$$|(Tx,y)|^2 \leq 0,$$
lo que implica que
$$(Tx,y) = 0,$$
por lo cual $Tx = 0$. Q. E. D.

# 2. Espacios normados y de Banach

En esta sección denotaremos por $\mathbb{K}$ a un campo, que puede ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

## 2.1. Ejemplos

1. Sea $X$ un espacio topológico no vacío. Entonces
$$C(X) = \left\{ f : X \in \mathbb{K} : f \text{ es continua y } \sup_{t\in X} |f(t)| < \infty \right\}$$
es un espacio vectorial y la expresión $\|f\| = \sup_{t\in X} |f(t)|$ define una norma.

2. Sea $c_0$ el espacio vectorial de las sucesiones de escalares $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que convergen a 0, con las operaciones coordenada a coordenada, dotado con la norma $\|x\| = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i|$.

3. Sea $\ell^\infty$ el espacio vectorial de las sucesiones acotadas $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $x_n \in \mathbb{K}$ para cada $n = 1, 2, \ldots$, con la norma $\|x\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i|$.

4. Dado $1 \leq p < \infty$, se define $\ell^p$ como el espacio vectorial de las sucesiones $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$, con las operaciones coordenada a coordenada, dotado con la norma $\|x\| = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$.

**Ejercicio 2.1.** *Probar que $C(X)$ es un espacio de Banach.*

*Demostración.* Sea $f \in C(X)$. Si $\|f\| = \sup_{t\in X} |f(t)| = 0$, entonces $f(t) = 0$ para todo $t$, lo que implica que $f = 0$. Adicionalmente, para $\alpha \in \mathbb{K}$, se tiene
$$\begin{aligned} \|\alpha f\| &= \sup_{t\in X} |\alpha f(t)| \\ &= |\alpha| \sup_{t\in X} |f(t)| = |\alpha| \, \|f\|. \end{aligned}$$

Sea $g \in C(X)$. La desigualdad del triángulo se sigue de
$$|f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| \leq \sup_{t\in X} |f(t)| + \sup_{t\in X} |f(t)| = \|f\| + \|g\|,$$

porque entonces $\sup_{t\in X} |f(t)+g(t)| = \|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$.

Probemos que el espacio es completo. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy. Para $\epsilon$ positivo y arbitrario existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m > n > N$, se cumple

$$|f_m(t) - f_n(t)| \le \|f_m - f_n\| < \frac{\epsilon}{3}, \tag{15}$$

lo cual es válido para toda $t \in X$. Ahora $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy para cada $t \in X$ fija, lo que significa que converge a $f(t)$.

Como cada función $f_n$ es continua para cada $n = 1, 2, \ldots$, para $\frac{\epsilon}{3}$ existe una vecindad $U$ de $t$ tal que, si $s \in U$ entonces

$$|f_n(t) - f_n(s)| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{16}$$

Puesto que la desigualdad (15) vale para todo $t \in X$, y el valor absoluto es continuo, se tiene que siempre que $n > N$, entonces

$$|f(t) - f_n(t)| < \frac{\epsilon}{3},$$

cualquier $t \in X$. Ahora podemos ver que $f$ es continua. En efecto, si $s$ está en la vecindad $U$ de $t$ y $n > N$, entonces

$$\begin{aligned} |f(t) - f(s)| &\le |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - f_n(s)| + |f_n(s) - f(s)| \\ &\le \epsilon. \end{aligned}$$

Falta ver que también es acotada. Como la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, entonces es acotada. Esto es, existe $M > 0$ tal que $\|f_n\| < M$ para $n = 1, 2, \ldots$. De la desigualdad (16), válida para todo $t \in X$, se obtiene

$$|f(t)| < \frac{\epsilon}{3} + |f_n(t)| < \frac{\epsilon}{3} + M,$$

de donde $|f(t)| \le M$ para todo $t \in X$. De aquí que $f \in C(X)$. En virtud de que

$$|f_m(t) - f_n(t)| < \|f_m - f_n\|,$$

entonces, por las mismas condiciones bajo las cuales se cumple (15) se cumple también

$$\lim_{m\to\infty} |f_m(t) - f_n(t)| = |f(t) - f_n(t)| \le \epsilon,$$

luego

$$\|f - f_n\| = \sup_{t\in X} |f(t) - f_n(t)| \le \epsilon,$$

por lo que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Q. E. D.

**Ejercicio 2.2.** *Probar que $c_0$ es un espacio de Banach.*

*Demostración.* Sea $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in c_0$. Si $\|x\| = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i| = 0$, entonces $x_i = 0$ para cada $i$ en los naturales, luego $x = 0$. También, para $\alpha \in K$,

$$\begin{aligned} \|\alpha x\| &= \sup_{i\in\mathbb{N}} |\alpha x_i| \\ &= |\alpha| \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i| \\ &= |\alpha| \, \|x\| . \end{aligned}$$

Sea $y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty} \in c_0$. Al tenerse

$$|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i| + \sup_{i\in\mathbb{N}} |y_i| = \|x\| + \|y\| ,$$

se sigue que $\sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i + y_i| = \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, y se cumple la desigualdad del triángulo. Supongamos que $\left\{x^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty} \subset c_0$ es una sucesión de Cauchy. Sea $\epsilon > 0$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, siempre que $m > n > N$, se satisface

$$\left|x_i^{(m)} - x_i^{(n)}\right| \leq \left\|x^{(m)} - x^{(n)}\right\| < \epsilon$$

para todo $i$ en los naturales. Por lo tanto las sucesión $\left\{x_i^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy y converge a $x_i$. Veamos que la sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a 0. En efecto, para $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $n > N$, se cumplen

$$\left|x_i - x_i^{(n)}\right| < \frac{\epsilon}{2}$$

y

$$\left|x_i^{(n)}\right| < \frac{\epsilon}{2},$$

y por lo tanto,

$$|x_i| \leq \left|x_i - x_i^{(n)}\right| + \left|x^{(n)}\right| < \epsilon,$$

es decir, $x_i \to 0$ cuando $i \to \infty$. Observamos también que para cada $i \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\lim_{m\to\infty} \left|x_i^{(m)} - x_i^{(n)}\right| = \left|x_i - x_i^{(n)}\right| \leq \epsilon,$$

y así

$$\left\|x - x^{(n)}\right\| = \sup_{i\in\mathbb{N}} \left|x_i - x_i^{(n)}\right| \leq \epsilon,$$

y de aquí que $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = x$. Q. E. D.

**Ejercicio 2.3.** *El espacio $\ell^{\infty}$ es un espacio de Banach bajo la norma*

$$\|x\| = \sup_{i\in\mathbb{N}} \frac{|x_i|}{i}, \tag{17}$$

*donde $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell^{\infty}$*

*Demostración.* La expresión (17) define una norma en $\ell^\infty$, pues si $x \in \ell^\infty$, entonces

$$\|x\| = \sup_{i \in N} \frac{|x_i|}{i} = 0,$$

de donde $\frac{|x_i|}{i} = 0$ para toda $i \in \mathbb{N}$, lo que implica que $x_i = 0$ para $i = 1, 2, \ldots$. Luego $x = 0$. Además, para $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} \|\alpha x\| &= \sup_{i \in \mathbb{N}} \frac{|\alpha x_i|}{i} \\ &= \sup_{i \in \mathbb{N}} |\alpha| \frac{|x_i|}{i} \\ &= |\alpha| \sup_{i \in \mathbb{N}} \frac{|x_i|}{i} = |\alpha| \, \|x\| . \end{aligned}$$

Ahora, sea $\{x^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de Cauchy en $\ell^\infty$, con $x^{(n)} = \left\{x_i^{(n)}\right\}_{i=1}^\infty$. Como toda sucesión de Cauchy es acotada, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $\left\|x^{(n)}\right\| < M$ para alguna $M$ positiva. Ahora, para $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, siempre que $m > n > N$, se satisface

$$\epsilon > \left\|x^{(m)} - x^{(n)}\right\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} \frac{\left|x_i^{(m)} - x_i^{(n)}\right|}{i} \geq \frac{\left|x_i^{(m)} - x_i^{(n)}\right|}{i}, \tag{18}$$

para cada $i \in \mathbb{N}$. Entonces la sucesión $\left\{\frac{x_i^{(n)}}{i}\right\}_{n=1}^\infty$ es de Cauchy para cada $i = 1, 2, \ldots$. De aquí se deduce que tiene límite $x_i = \frac{1}{i} \lim_{n\to\infty} x_i^{(n)}$. Probemos ahora que la sucesión $x = \{x_i\}_{i=1}^\infty$ pertenece a $\ell^\infty$. Sea $i \in \mathbb{N}$. Para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, sin $n > N$, se cumple $\left|x_i - \frac{x_i^{(n)}}{i}\right| < \epsilon$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |x_i| &= \left|x_i - \frac{x_i^{(n)}}{i}\right| + \left|\frac{x_i^{(n)}}{i}\right| \\ &\leq \epsilon + \left\|x^{(n)}\right\| < \epsilon + M, \end{aligned}$$

de donde se sigue que $|x_i| \leq M$, y así $x \in \ell^\infty$. En virtud de que

$$\frac{\left|x_i^{(m)} - x_i^{(n)}\right|}{i} < \left\|x^{(m)} - x^{(n)}\right\|,$$

si se cumplen las condiciones para las cuales es verdadera (18), entonces se cumple también que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\left|x_i^{(m)} - x_i^{(n)}\right|}{i} = \frac{\left|x_i - x_i^{(n)}\right|}{i} \leq \epsilon,$$

luego

$$\left\|x - x^{(n)}\right\| = \sup_{t\in X} \frac{\left|x_i - x_i^{(n)}\right|}{i} \leq \epsilon,$$

por lo que $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = x$. Q. E. D.

**Ejercicio 2.4.** *Probar que $\ell^p$ es un espacio de Banach.*

*Demostración.* Sea $x \in \ell^p$. Si $\|x\| = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} = 0$, es por que $x_n = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, y por consecuencia $x = 0$. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|\alpha x\| &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha|^p |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(|\alpha|^p \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\alpha| \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \|x\|.
\end{aligned}$$

La desigualdad del triángulo es consecuencia de la desigualdad de Minkowski. Sea $\left\{x^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty} \subset \ell^p$ una sucesión de Cauchy. Para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $m > n > N$, se satisface

$$\left|x_i^{(m)} - x_i^{(n)}\right| < \left\|x^{(m)} - x^{(n)}\right\| < \epsilon$$

para cada $i \in \mathbb{N}$. Entonces la sucesión $\left\{x_i^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy para cada $i \in \mathbb{N}$, por lo que converge a $x_i$. La sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es tal que $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$, pues para $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $j > N$ se cumple

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|x_n - x_n^{(j)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|x_n^{(j)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&< \epsilon + \left\|x^{(j)}\right\| < \epsilon + M,
\end{aligned}$$

pues $\sum_{n=1}^{\infty} \left|x_n^{(j)}\right|^p < M^p$ para alguna $M$ positiva, de aquí que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \leq M$, y por lo tanto $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ pertenece a $\ell^p$. Finalmente, para $\frac{\epsilon}{k^2} > 0$ (con $k \in \mathbb{N}$) existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m > n > N$ entonces se cumple

$$\lim_{m\to\infty} \left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right| = \left|x_k - x_k^{(n)}\right| \leq \frac{\epsilon}{k^2},$$

y por lo tanto, si $j > N$ entonces

$$\begin{aligned} \left\| x - x^{(j)} \right\| &= \left( \sum_{k=1}^{\infty} \left| x_k - x_k^{(j)} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon^p}{k^{2p}} \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \epsilon \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p}} \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

y esto implica que $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = x$, pues la suma

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p}}$$

converge para todo $p$ mayor o igual a 1. Q. E. D.

## 2.2. Operadores lineales

**Teorema 2.1.** *Sean $X$ e $Y$ espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

1. *El operador $T$ es continuo.*
2. *El operador $T$ es continuo en $0$.*
3. *El operador $T$ es continuo en algún punto de $X$.*
4. *Existe una constante $C > 0$ tal que $\|Tx\| \leq C \|x\|$ para toda $x \in X$.*

*Demostración.* Claramente $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$.

$3 \Rightarrow 2$ Sea $x \in X$ el punto donde $T$ es continuo. Entonces, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que,

$$\|x - y\| \leq \delta \Rightarrow \|Tx - Ty\| = \|T(x - y)\| \leq \epsilon.$$

Supongamos que para $u \in X$ se tiene $\|u\| < \delta$. Sea $y = x - u$. Ahora

$$\|u\| = \|x - y\| \leq \delta,$$

lo que implica que

$$\|T(x - y)\| = \|Tu\| \leq \epsilon,$$

y de aquí que $T$ es continuo en 0.

$3 \Rightarrow 4$ Al cumplirse que $T$ es continuo en $X$, sabemos ya que es continuo en 0. Por lo tanto, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $u \in X$ y $\|u\| \leq \delta$, entonces se satisface $\|Tu\| \leq \epsilon$. Sea $v \in X$ arbitrario y no nulo (si $v = 0$, entonces $\|v\| = 0 < \delta$, y dada la linealidad de $T$, se tiene $\|Tv\| = 0 < \epsilon$). Tomemos $\lambda = \frac{\delta}{\|v\|}$. Ahora

$$\delta \geq \lambda \|v\| = \|\lambda v\|,$$

y de aquí que

$$\epsilon \geq \|T(\lambda v)\| = \lambda \|Tv\| = \frac{\delta}{\|v\|} \|Tv\|,$$

luego

$$\frac{\epsilon}{\delta} \|v\| \geq \|Tv\|.$$

Tomando a $C = \frac{\epsilon}{\delta}$ obtenemos la desigualdad deseada.

$4 \Rightarrow 1$ Sea $\epsilon > 0$. Si $\|x - y\| < \frac{\epsilon}{C}$ con $x, y \in X$, entonces

$$\|Tx - Ty\| = \|T(x - y)\| < C \|x - y\| < \epsilon,$$

luego $T$ es continuo. Q. E. D.

**Ejercicio 2.5.** *Sean $X$ e $Y$ espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal continuo. Definimos*

$$A = \{C : \|Tx\| \leq C \|x\| \ \textit{para todo } x \in X\}$$

*y*

$$B = \{\|Tx\| : x \in X, \|x\| \leq 1\},$$

*entonces*

$$\inf A = \sup B.$$

*Demostración.* Sea $C \in A$. Entonces para cualquier $x$ tal que $\|x\| \leq 1$ se tiene que

$$\|Tx\| \leq C,$$

por lo que $\sup B \leq \inf A$. Para toda $\epsilon > 0$, tenemos que existe $x \in X$ con $\|x\| = 1$ tal que

$$\|Tx\| > \inf A - \epsilon$$

y, como $\|Tx\| \in B$, luego

$$\sup B \geq \|Tx\| > \inf A - \epsilon.$$

Por la arbitrariedad del $\epsilon$, se concluye que $\sup B \geq \inf A$, y con ello, que $\sup B = \inf A$. Q. E. D.

# Referencias


[Fet97] Helga Fetter Nathansky. *Introducción al análisis funcional y a la geometría de espacios de Banach*. Grupo Editorial Iberoamérica, 1997.

[Hal51] Paul Richard Halmos. *Introduction to Hilbert Space and the theory of spectral multiplicity*. Chelsea, 1951.

[Hou03] Sorab Houshang. *Basic real analysis*. Birkhäuser, 2003.

[Yos80] Kôsaku Yosida. *Functional analysis*. Grundlehren der Mathematischen Weissenschaften. Springer-Verlag, 6th edition, 1980.