El Teorema de Hurewicz

Octavio Alberto Agustín Aquino

21 de febrero de 2007

Supondremos que todas las homotopías son entre caminos con idénticos extremos.

Lema 1. *Sea* $\eta : \Delta^1 \to I$ *el homeomorfismo* $(1-t)e_0 + te_1 \mapsto t$*. Existe una función bien definida*

$$\phi : \pi_1(X, x_0) \to H_1(X)$$

dada por

$$[f] \mapsto [f \circ \eta]$$

donde $f : I \to X$ *es un camino cerrado en* X *basado en* x_0*.*

Demostración. Como $f \circ \eta : \Delta^1 \to X$ es continua, es claro que $f \circ \eta$ es un 1-simplejo. Esto es, $f \circ \eta \in S_1(X)$. Más aún, $f \circ \eta \in \text{núc}\,\partial_1(X)$, pues

$$\partial_1(f \circ \eta) = f \circ \eta(e_1) - f \circ \eta(e_0) = f(1) - f(0) = 0$$

por ser f un lazo. Vale decir que $[f \circ \eta] \in H_1(X)$.

Si $u : I \to S^1$ está definido como $t \mapsto e^{2\pi i t}$, entonces $u \circ \eta$ es un 1-ciclo en S^1. Existe un mapeo $f' : S^1 \to X$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f"'] & S^1 \arrow[d, "f'"] \\ & X \end{tikzcd}$$

dado por $e^{2\pi i t} \mapsto f(t)$. Está bien definido y es continuo porque f es un lazo. Por lo tanto f' induce un homomorfismo $f'_* : H_1(S^1) \to H_1(X)$. Se sigue que

$$[f \circ \eta] = [f' \circ u \circ \eta] = f'_*[u \circ \eta] \in H_1(X).$$

Ahora supongamos que g es un camino cerrado en X respecto al punto x_0 tal que $f \simeq g$. La homotopía entre f y g sirve como homotopía entre f' y g'. En consecuencia

$$[f \circ \eta] = [f' \circ u \circ \eta] = f'_*[u \circ \eta] = g'_*[u \circ \eta] = [g' \circ u \circ \eta] = [g \circ \eta],$$

luego ϕ está bien definido. $\square$

Escolio 1. El teorema anterior significa que lazos homótopos en X deben ser homólogos.

Definición 1. *La función $\phi : \pi(X, x_0) \to H_1(X)$ del lema anterior se denomina* mapeo de Hurewicz.

Escribiremos $f \circ \eta \sim g \circ \eta$ si $f \circ \eta - g \circ \eta$ es la frontera de alguna 2-cadena.

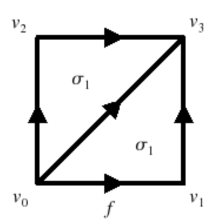
Proposición 1. *Sean f y g caminos en X.*

1. *Si f es el camino constante, entonces $f \circ \eta \sim 0$.*
2. *Si $f \simeq g$, entonces $f \circ \eta \sim g \circ \eta$.*
3. *Se satisface $(f * g) \circ \eta \sim f \circ \eta + g \circ \eta$.*
4. *Si $\overline{f}$ es el camino inverso de f, $\overline{f} \circ \eta \sim -(f \circ \eta)$.*

Demostración. Sea f un camino constante y $\sigma : \Delta^2 \to X$ el 2-simplejo dado por $\sigma(u) = f(t)$ para todo $u \in \Delta^2$. Calculando su frontera

$$\partial(\sigma) = \sigma^{(0)} - \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} = f \circ \eta - f \circ \eta + f \circ \eta = f \circ \eta,$$

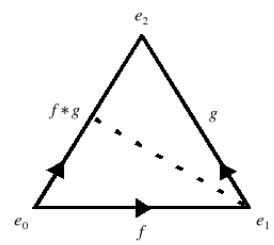
esto es, $f \circ \eta - 0 = f \circ \eta$ es frontera de σ, y por ello $f \circ \eta \sim 0$.



Si $f \simeq g$, consideremos la homotopía $H : I \times I \to X$ entre f y g. Subdivimos al cuadrado $I \times I$ de manera que obtenemos dos simplejos σ_1 y σ_2 y calculamos la frontera de $\sigma_1 - \sigma_2$

$$\partial(\sigma_1 - \sigma_2) = \mathrm{cte}_{f(1)} \circ \eta + \sigma_1^{(1)} + f \circ \eta - (g \circ \eta + \sigma_2^{(1)} + \mathrm{cte}_{f(0)} \circ \eta).$$

Como $\sigma_1^{(1)}$ y $\sigma_2^{(1)}$ coinciden, $\partial(\sigma_1 - \sigma_2) = f \circ \eta - g \circ \eta$, lo que ocasiona que $f \circ \eta \sim g \circ \eta$.



Para el caso de $(f*g)\circ\eta$, definimos $\sigma(1-t,t,0) = f\circ\eta(t)$, $\sigma(0,1-t,t) = g\circ\eta(t)$ y $\sigma(1-t,0,t) = (f*g)\circ\eta(t)$ y extendemos σ a todo Δ^2 dando el valor de $f(t)$ a todos los puntos $\lambda(1-t,t,0)+(1-\lambda)(1-t/2,0,t/2)$ y el valor de $g(t)$ a todos los puntos $\lambda(0,1-t,t)+(1-\lambda)((1-t)/2,0,(1+t)/2)$ con $\lambda\in[0,1]$. Por el lema de pegado, σ es continua, y su frontera es

$$\partial(\sigma) = g\circ\eta - (f*g)\circ\eta + f\circ\eta$$

esto es $f\circ\eta + g\circ\eta \sim (f*g)\circ\eta$.

El último punto es consecuencia de los otros tres. En efecto, aplicando el tercer inciso con $g=\overline{f}$, tenemos que $f\circ\eta+\overline{f}\circ\eta \sim (f*\overline{f})\circ\eta$. Por otro lado, $f*\overline{f}\simeq$ cte, así que por el segundo inciso $(f*\overline{f})\circ\eta\sim \text{cte}\circ\eta$, y por el primero $(f*\overline{f})\circ\eta\sim 0$. En resumen, $f\circ\eta+\overline{f}\circ\eta\sim 0$, y en consecuencia $\overline{f}\circ\eta\sim -(f\circ\eta)$. □

Corolario 1. *El mapeo de Hurewicz es un homomorfismo.*

Demostración. La proposición anterior es verdadera para lazos en particular. Así

$$\phi([f][g]) = [(f*g)\circ\eta] = [f\circ\eta + g\circ\eta] = [f\circ\eta]+[g\circ\eta] = \phi([f])+\phi([g])$$

y $\phi(1)=\phi([\text{cte}])=[\text{cte}\circ\eta]=0$. □

Lema 2. *Sea f un grupo abeliano libre con base B, $x_0,\dots,x_k$ una lista de elementos de B, posiblemente con repeticiones, y supóngase que*

$$m_0x_0 = \sum_{i=1}^{k} m_i x_i.$$

Si G es un grupo abeliano arbitrario, y si $y_0,\dots,y_k\in G$ es una lista tal que $x_i=x_j$ implica que $y_i=y_j$, entonces $m_0y_0=\sum_{i=1}^k m_iy_i$ en G.

Demostración. Definimos a $f : B \to G$ a través de

$$f(x) = \begin{cases} y_i, & x = x_i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

que está bien definido por hipótesis. Ahora bien, f se puede extender a un homomorfismo $\tilde{f} : F \to G$ definiendo

$$\tilde{f}\left(\sum_{x \in B} m_x x\right) = \sum_{x \in B} m_x f(x).$$

Entonces

$$0 = \tilde{f}\left(m_0 x_0 - \sum m_i x_i\right) = m_0 y_0 - \sum m_i y_i. \qquad \square$$

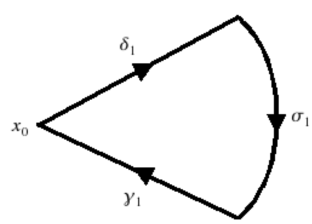
Teorema 1 (Hurewicz). *Si X es conectable por trayectorias, entonces el mapeo de Hurewicz es una suprayección con núcleo $\pi_1(X, x_0)'$, el subgrupo conmutador de $\pi_1(X, x_0)$. Por lo tanto*

$$\pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, x_0)' \cong H_1(X).$$

Demostración. Para ver que ϕ es una suprayección, sea $\zeta = \sum m_i \sigma_i$ un 1-ciclo en X. Por lo tanto

$$0 = \partial_1(\zeta) = \sum m_i(\sigma_i(e_1) - \sigma_i(e_0))$$

es una ecuación entre elementos de la base del grupo abeliano libre $S_0(X)$.



Como X es conectable por trayectorias, sea γ_i la trayectoria de x_0 a $\sigma_1(e_1)$ y δ_1 la trayectoria de x_0 a $\sigma_i(e_0)$. Si $\sigma_i(e_1) = \sigma_j(e_1)$, elegimos $\gamma_i = \gamma_j$, análogamente elegimos $\delta_i = \delta_j$. El principio de sustitución revela que

$$\sum m_i(\delta_i \circ \eta - \gamma_i \circ \eta) = 0$$

en $S_1(X)$. Así,

$$\sum m_i(\delta_i \circ \eta + \sigma_i - \gamma_i \circ \eta) = \sum m_i \sigma_i = \zeta. \tag{1}$$

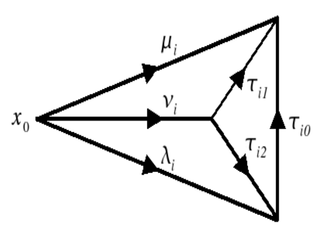
Pero $\delta_i * \sigma_i \circ \eta^{-1} * \overline{\gamma}_i$ es un lazo en X. Por la proposición,

$$\begin{aligned}
\phi\left(\prod [\delta_i * \sigma_i \circ \eta^{-1} * \overline{\gamma}_i]^{m_i}\right) &= \sum m_i \phi[\delta_i * \sigma_i \circ \eta^{-1} * \overline{\gamma}_i] \\
&= \sum m_i [(\delta_i * \sigma_i \circ \eta^{-1} * \overline{\gamma}_i) \circ \eta] \\
&= \sum m_i [\delta_i \circ \eta + \sigma_i + \overline{\gamma}_i \circ \eta] \\
&= \sum m_i ([\delta_i \circ \eta] + [\sigma_i] - [\gamma_i \circ \eta]) = [\zeta].
\end{aligned}$$

Ahora calculamos $\text{núc}\,\phi$. Como $H_1(X)$ es abeliano, $\phi(X, x_0)' \subseteq \text{núc}\,\phi$. Para la inclusión recíproca, supongamos que γ es un lazo en X basado en x_0 tal que $[\gamma] \in \text{núc}\,\phi$. Entonces existen 2-simplejos $\tau_i : \Delta^2 \to X$ con $\gamma \circ \eta = \partial(\sum n_i \tau_i)$. Si denotamos la j-ésima cara de τ_i como τ_{ij} entonces $\partial_2(\tau_i) = \tau_{i0} - \tau_{i1} + \tau_{i2}$ y

$$\gamma \circ \eta = \sum n_i(\tau_{i0} - \tau_{i1} + \tau_{i2}). \tag{2}$$

Como $\gamma \circ \eta$ también es un 1-simplejo, debe cumplirse que $\gamma \circ \eta = \tau_{pq}$.



Conectemos ahora x_0 con $\tau_{i0}(e_0)$, $\tau_{i1}(e_1)$ y $\tau_{i2}(e_0)$ a través de sendas trayectorias λ_i, μ_i y ν_i, eligiendo $\lambda_i = \lambda_j$ si $\tau_{i0}(e_0) = \tau_{j0}(e_0)$, etcétera y constantes en caso de que $\tau_{i0}(e_0) = x_0$, etcétera. Defínanse

$$\begin{aligned}
L_{i0} &= [\lambda_i * \tau_{i0} \circ \eta^{-1} * \overline{\mu_i}], \\
L_{i1} &= [\nu_i * \tau_{i1} \circ \eta^{-1} * \overline{\mu_i}], \\
L_{i2} &= [\nu_i * \tau_{i2} \circ \eta^{-1} * \overline{\lambda_i}].
\end{aligned}$$

Aplicando el principio de sustitución a (2) con el cociente de $\pi_1(X, x_0)$ y su subgrupo conmutador, tenemos

$$\overline{L}_{pq} = \prod (\overline{L}_{i0} \overline{L}_{i1}^{-1} \overline{L}_{i2})^{n_i},$$

donde la barra representa el elemento del grupo cociente. Como $\gamma \circ \eta = \tau_{pq}$ es un lazo basado en x_0, entonces $L_{pq} = [\alpha * \tau_{pq} \circ \eta^{-1} * \beta] = [\tau_{pq} \circ \eta^{-1}] = [\gamma]$, pues α y β pueden elegirse como caminos constantes en x_0. Finalmente

$$
\begin{aligned}
&L_{i0}L_{i1}^{-1}L_{12} \\
&\qquad = [\lambda_i * \tau_{i0} \circ \eta^{-1} * \overline{\mu}_i * \mu_i * \overline{(\tau_{i1} \circ \eta^{-1})} * \overline{\nu}_i * \nu_i * \tau_{i2} \circ \eta^{-1} * \overline{\lambda}_i] \\
&\qquad\qquad\qquad = [\lambda_i * \tau_{i0} \circ \eta^{-1} * \overline{(\tau_{i1} \circ \eta^{-1})} * \tau_{i2} \circ \eta^{-1} * \overline{\lambda}_i] = 1
\end{aligned}
$$

pues $\overline{\mu}_i * \mu_i$ y $\overline{\nu}_i * \nu_i$ son lazos homótopos a la constante y τ es un simplejo. Se sigue que $\overline{L}_{pq} = \prod(\overline{L}_{i0}\overline{L}_{i1}^{-1}\overline{L}_{i2})^{n_i} = 1$ en $\pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, x_0)'$, luego $[\overline{\gamma}] = \overline{L_{pq}} = 1$ en $\pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, x_0)'$, esto es $[\overline{\gamma}] \in \pi_1(X, x_0)'$. $\square$

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "1-p"' near start] & 0 \\
1 \arrow[r, "p"'] \arrow[ur, "1-p" near start] & 1.
\end{tikzcd}
$$