Marcelo Aguilar
Octavio Alberto Agustín Aquino

Cohomología y Haces Fibrados

SUNEO
México

Índice general

1

Cohomología homotópica

1.1. Introducción

Definición 1.1. *Una función continua $f : X \to Y$ es una equivalencia homotópica débil si para cada $x \in X$,*

$$f_{\#} : \pi_q(X, x) \to \pi_q(Y, f(x))$$

es un isomorfismo para toda $q \geq 0$.

Escolio 1.2. Para $q = 0$, los elementos de $\pi_0(X, x)$ están en correspondencia biunívoca con el número de componentes conectables por trayectorias del espacio X, y $f_{\#}$ es una biyección entre las componentes conectables por trayectorias de X y las de Y. En efecto, como $S^0 = \{-1, 1\}$, y uno de estos puntos (digamos, 1) ya tiene una imagen fija, entonces cuando $f(-1), g(-1)$ caen en la misma componente conectable por trayectorias tienen la misma clase de homotopía. La homotopía entre f y g está dada por la trayectoria que conecta a $f(-1)$ y $g(-1)$.

Teníamos que

$$(X, x_0) \mapsto \pi_q(X, x_0) = [(S^q, *), (X, x_0)]$$

es invariante topológico (e incluso homotópico) que es muy bueno por el siguiente teorema.

Teorema 1.3 (J. H. C. Whitehead). *Sea $f : X \to Y$ una equivalencia homotópica débil, donde X e Y son complejos CW (o del tipo de homotopía de un complejo CW). Entonces f es una equivalencia homotópica.*

Sin embargo, sabemos que esta clase de invariantes son difíciles de calcular en general.

Teorema 1.4 (J. P. Serre). *Sea X un complejo CW compacto y conexo. Supongamos que $\pi_1(X) = 0$ y que existe alguna q tal que $\pi_q(X) \neq 0$. Entonces hay una infinidad de dimensiones n tales que $\pi_n(X) \neq 0$.*

1.2. Invariantes topológicos contravariantes

Si tenemos una función continua $f : X \to Y$, deseamos un invariante topológico (y, si se puede, homotópico) que sea contravariante

$$h(Y) \xrightarrow{f^*:=h(f)} h(X).$$

¿Cuál sería un candidato? Sea G un grupo abeliano y $h(X) = C(X, G)$, el conjunto de todas las funciones continuas $\phi : X \to G$. Al conjunto $C(X, G)$ lo convertimos en grupo abeliano definiendo la suma como

$$(\phi + \psi)(x) = \phi(x) + \psi(x)$$

y la identidad

$$\Theta(x) = e,$$

donde e es el neutro de G, para todo $x \in X$. Así definidas las operaciones, hacemos

$$\begin{aligned} f^* : h(Y) &\to h(X), \\ \alpha &\mapsto \alpha \circ f. \end{aligned}$$

Por propiedades categóricas, h es un funtor de **Top** en **Ab**, y por lo tanto $h(X)$ es un invariante topológico.

A efectos de cálculo, supondremos que X es localmente conexo. Definimos una equivalencia en X diciendo que $x \sim y$ si, y sólo si, x e y están en la misma componente conexa. Consideremos ahora el espacio cociente $p : X \to X/\sim$, donde claramente $X/\sim$ es el conjunto de componentes conexas de X. Dotamos a X con la topología cociente. Como X es localmente conexo, las componentes conexas son abiertas y cerradas, luego $X/$ tiene la topología discreta.

Aplicando el funtor h, tenemos que $f^* : C(X/\sim, G) \to C(X, G)$. Si $\phi : X \to G$ es una función continua, pasa al cociente, pues ϕ es constante sobre cada componente conexa. Esto es, existe $\overline{\phi}$ tal que $\overline{\phi} \circ p = \phi$, pero $\overline{\phi} \circ p = p^*(\phi)$. Luego p^* es suprayectiva. Es incluso inyectiva, pues si $p^*(\psi_1) = p^*(\psi_2)$, entonces $\psi_1 \circ p = \psi_2 \circ p$, lo que implica que $\psi_1 = \psi_2$ al ser p suprayectiva. Por lo anterior, p^* es un isomorfismo de grupos.

Dada que tanto $X/\sim$ como G tienen la topoogía discreta, entonces $C(X/\sim, G) = \mathrm{Fun}(X/\sim, G)$, que coincide con $\prod G$, con un factor por cada componente conexa.

Resultó entonces este un buen invariante, pues mide las componentes conexas de un espacio topológico. Para mejorarlo, sería bueno reemplazar a G por algo un poco más complicado. Por ejemplo, podríamos tratar con $h_{\mathbb{R}}(X, \mathbb{R}) = C(X, \mathbb{R})$. Estos grupos son abelianos nuevamente, pero ahora incluso son anillos, definiendo $(\phi \cdot \psi)(x) = \phi(x) \cdot \psi(x)$. De hecho, obtenemos un invariante demasiado bueno para ser cierto.

Teorema 1.5 (Gelfand-Kolmogorov). *Sean X e Y espacios de compactos de Hausdorff. Entonces X es homeomorfo a Y si, y sólo si, $C(X,\mathbb{R}) \cong C(Y,\mathbb{R})$.*

En el teorema anterior es cierto también para espacios que no son compactos, o que son completamente regulares y Lindelöf.

¿Cómo hacemos de $C(X,G)$ algo más manejable? Una posiblidad es considerar ahora $G=\mathbb{R}$, es decir, $[X,\mathbb{R}]$; el problema es que $\mathbb{R}$ es contraíble y por eso $[X,\mathbb{R}]=0$. Otro grupo topológico es S^1, y tiene la ventaja de que no es contraíble, por lo que el invariante $\mathbb{H}^1(X)=[X,S^1]$ no es trivial. De hecho, a este invariante se le denomina primer grupo de cohomología homotópica. Incluso tiene la propiedad de ser invariante homotópico.

Lema 1.6. *Sean $f_0, f_1 : X \to Y$ funciones continuas y homótopas. Se satisface lo siguiente.*

1. *Si $X \xrightarrow{f_0,f_1} Y \xrightarrow{g} X$ y g es continua, entonces $g \circ f_0 \simeq g \circ f_1$.*
2. *Si $W \xrightarrow{h} X \xrightarrow{f_0,f_1} Y$ y h es continua, entonces $f_0 \circ h \simeq f_1 \circ h$.*

Demostración. Dado que existe la homotopía $H : f_0 \simeq f_1$, entonces $F = H \circ (g \times \mathrm{id}_I)$ es una homotopía entre $f \circ f_0$ y $g \circ f_1$, pues es continua y $F(s,0) = f_0 \circ g(s)$ y $F(s,1) = f_1 \circ g(s)$. La composición $F' = (h \times \mathrm{id}_I) \circ H$ demuestra el otro aserto. □

Proposición 1.7. *El grupo $\mathbb{H}^1(X,\mathbb{Z})$ es un invariante homotópico.*

Demostración. Recordemos que si $f : X \to Y$ es continua

$$\begin{aligned} f^* : \mathbb{H}^1(Y) &\to \mathbb{H}^1(X) \\ [\phi] &\mapsto [\phi \circ f]. \end{aligned}$$

Si $f_0 \simeq f_1$, entonces $f_0^*[\phi] = [\phi \circ f_0]$ y $f_1^*[\phi] = [\phi \circ f_1]$. Por el Lema 1.6

$$f_0^*[\phi] = [\phi \circ f_0] = [\phi \circ f_1] = f_1^*[\phi],$$

como se quería. □

Tratando de generalizar $\mathbb{H}^1$ para $q \in \mathbb{Z}$ (pues sacamos mucho partido a tener homología para cada índice entero no negativo), podríamos intentar definir $[X, S^q]$. Sin embargo, S^q es un grupo topológico sólo si $q = 0,1,3$, sin mencionar que la homotopía de S^q es bastante complicada en general.

Proposición 1.8. *Se satisface*

$$\pi_q(S^q) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 1, \\ 0, & q \neq 1. \end{cases}$$

Demostración. Consideremos a la función

$$e : \mathbb{R} \to S^1 : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t},$$

que hace ver que $\mathbb{R}$ es un espacio cubriente de S^1. Como $\mathbb{R}$ es conectable por trayectorias, la acción de $\pi_1(\mathbb{R}, 0)$ es transitiva sobre $e^{-1}(1) = \mathbb{Z}$. Luego, usando el Ejercicio 1.1,

$$\mathbb{Z} \cong \pi_1(\mathbb{R}, 0)/e_\# \pi_1(\mathbb{R}, 0) \cong \pi_1(S^1, 1),$$

(obsérvese que el isomorfismo de grupos es posible solamente tomando la fibra $e^{-1}(1) \ni 0$). Por el Ejercicio 1.2, $\pi_q(S^1, 1) \cong \pi_q(\mathbb{R}, 0)$ para $q \geq 2$. Como $\mathbb{R}$ es contraíble, todos sus grupos de homotopía son triviales. □

No podemos, pues, usar a S^q. Aún así, el caso particular $q = 1$ resulta revelador. Sería ideal definir

$$\mathbb{H}^q(X, \mathbb{Z}) = [X, K_q]$$

donde K_q es un grupo abeliano con una estructura homotópica simple. Esto es, que sólo tenga un grupo de homotopía no trivial.

Definimos al grupo abeliano libre generado por un conjunto basado (S, s_0) en $\mathbb{Z}$ como

$$F(S; \mathbb{Z}) = \{v : S \to \mathbb{Z} : v(s) = 0 \text{ para casi todo } s \in S, v(s_0) = 0\};$$

también definimos

$$F_k(S; \mathbb{Z}) = \{v : S \to \mathbb{Z} : v(s_0) = 0, \forall \{s_i\}_{i=1}^k, v(s_i) = 0\}.$$

Sea (X, x_0) un espacio topológico basado, y consideremos a $F(X, \mathbb{Z})$. Para darle una topología a $F(X, \mathbb{Z})$, primero consideremos a $(\mathbb{Z} \times X)^k \xrightarrow{\mu_k} F_k(X, \mathbb{Z})$ dado por $((n_i, x_i)) \mapsto \sum n_i x_i$. A $F_k(X; \mathbb{Z})$ le damos la topología cociente, y así a

$$F(X; \mathbb{Z}) = \bigcup_{k \geq 0} F_k(X, \mathbb{Z})$$

lo dotamos con la topología límite (o coherente), donde un subconjunto A es abierto si $A \cap F_k(X; \mathbb{Z})$ es abierto para cada $k \geq 0$.

¿Cómo demostrar que $F(X; \mathbb{Z})$ es un grupo topológico? No será posible a menos que hagamos algunas suposiciones adicionales. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
(\mathbb{Z} \times X)^k \times (\mathbb{Z} \times X)^\ell & \xrightarrow{\cong} & (\mathbb{Z} \times X)^{k+\ell} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mu_k \times \mu_\ell} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mu_{k+\ell}} \\
F_k(X; \mathbb{Z}) \times F_\ell(X; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{+} & F_{k+l}(X; \mathbb{Z}).
\end{array}$$

Para ver que la suma es continua, es necesario que la suma para cada k y para cada ℓ sea continua. Sin embargo, aunque μ_k y μ_ℓ son identificaciones, $\mu_k \times \mu_\ell$ no es una identificación en general. Hay dos formas de resolver esto.

1. Trabajar en una categoría de espacios topológicos donde el producto tiene una topología que convierte a $\mu_k \times \mu_\ell$ en una identificación. Esta categoría se construye con variantes de "k-espacios", es decir, espacios de Hausdorff con la topología coherente con la familia de subespacios compactos.
2. Restringir a X, utilizando solamente poliedros con una cantidad numerable de simplejos.

En cuanto a la segunda opción, se puede demostrar que si X es un poliedro con una cantidad numerable de simplejos entonces $F(X,\mathbb{Z})$ es un complejo CW con una cantidad numerable de celdas. El producto de dos complejos CW numerables vuelve a ser un complejo CW, lo que en general no sucede.

Bajo estas hipótesis, $\mu_k \times \mu_\ell$ es una identificación y por lo tanto la suma es continua.

El caso del inverso es mucho más sencillo porque en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{Z} \times X)^k \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mu_k"] & (\mathbb{Z} \times X)^k \arrow[d, "\mu_k"] \\
F_k(X;\mathbb{Z}) \arrow[r, "?^{-1}"] & F_k(X;\mathbb{Z}).
\end{tikzcd}$$

donde $f((n_i, x_i)) = ((-n_i, x_i))$, f es un homeomorfismo y μ_k es una identificación, así que tomar inversos es una operación continua. Eso por esto que optando por la segunda solución tenemos que $F(X,\mathbb{Z})$ es un grupo topológico.

Resta ahora buscar X tal que $F(X,\mathbb{Z})$ tenga una estructura homotópica simple, y para esto necesitamos calcular $\pi_q(F(X,\mathbb{Z}))$.

Teorema 1.9 (Ley exponencial). *Si X, Y y Z son espacios topológicos y Y es localmente compacto y Hausdorff, entonces la asociación*

$$\begin{gathered}\phi : C(X \times Y, Z) \to C(X, C(Y,Z)),\\ f(r,s) \mapsto (f(r))(s)\end{gathered}$$

es una biyección.

Lema 1.10. *Sea $P = X \times \{0\} \cup X \times \{1\} \cup \{x_0\} \times I$. La biyección ϕ de la ley exponencial induce la biyección de mapeos basados*

$$C((X \times I, P), (Z, z_0)) \xrightarrow{\phi} C\left((X, x_0), C((I, \partial I), (Z, z_0))\right)$$

donde el punto base del lado derecho (que no escribimos para acortar la notación) es la función constante $\omega_{z_0}(t) = z_0$.

Demostración. Sea $F : X \times I \to Z$. Entonces

$$\phi(F(x,0)) = (F(x))(0) = z_0 \quad \text{y} \quad \phi(F(x,1)) = (F(x))(1) = z_0$$

pues en $X \times \{0\}$ y $X \times \{1\}$ el espacio $X \times I$ es envíado al punto z_0. También

$$\forall t \in I, \quad \phi(F(x_0, t)) = (F(x_0))(t) = z_0,$$

pues en $S(X, x_0)$ el conjunto $\{x_0\} \times I$ es mapeado z_0. Dado que ϕ es biyección, podemos tomar para

$$h : (X, x_0) \to C((I, \partial I), (Z, z_0))$$

su imagen inversa $\phi^{-1}(h)[x, t] = h(x)(t)$, que debe satisfacer

$$\forall t, \phi^{-1}(h)[x_0, t] = h(x_0)(t) = z_0$$
$$\phi^{-1}(h)[x, 0] = h(x)(0) = z_0 = h(x)(1) = \phi^{-1}(h)[x, 1],$$

lo que comprueba que efectivamente $\phi^{-1}(h) \in C((S(X, x_0), *), (Z, z_0))$. □

Lema 1.11. *Sea $P = X \times \{0\} \cup X \times \{1\} \cup \{x_0\} \times I$. Consideremos la suspensión basada*

$$S(X, x_0) = (X \times I)/P.$$

Existe una biyección

$$C((S(X, x_0), *), (Z, z_0)) \xleftrightarrow{p^{\#}} C((X \times I, P), (Z, z_0)).$$

Demostración. Sea p la función identificación del cociente $X \times I$ y $S(X, x_0)$. Para $h : S(X, x_0) \to Z$, definimos $p^{\#}(h) = h \circ p$. Esto está bien definido porque

$$h \circ p(P) = h(p(P)) = h[P] = z_0.$$

La función $p^{\#}$ es inyectiva pues si $p^{\#}(h_1) = p^{\#}(h_2)$, entonces $h_1 \circ p = h_2 \circ p$, y dada la suprayectividad de p, se sigue que $h_1 = h_2$.

Para ver que $p^{\#}$ es suprayectiva, sea $F : X \times I \to Z$ tal que $F(P) = z_0$. Entonces la función $\overline{F}[x] = F(p^{-1}[x])$ está bien definida, pues

$$\overline{F}[x] = F(p^{-1}[x]) = \begin{cases} F(x), & x \notin P, \\ F(P) = z_0, & x \in P, \end{cases} = F(x)$$

y dado que p es una identificación, se sigue $\overline{F}$ es continua. Además,

$$p^{\#}(\overline{F})(x) = \overline{F} \circ p(x) = F(p^{-1}[x]) = F(x).$$

Esto verifica el aserto. □

Corolario 1.12. *Existe una biyección*

$$C((S(X, x_0), P), (Z, z_0)) \overset{\phi}{\leftrightarrow} C((X, x_0), (\Omega(Z, z_0), \omega_{z_0})),$$

donde

$$\Omega(Z, z_0) = C((I, \partial I), (Z, z_0)) = C((I/\partial I, *), (Z, z_0))$$

y la última igualdad es resultado del Ejercicio 1.3.

Este resultado nos lleva al concepto de funtores adjuntos. Consideremos la categoría de espacios basados $\mathbf{Top}_\bullet$. Vamos a definir dos funtores $S : \mathbf{Top}_\bullet \to \mathbf{Top}_\bullet$ y $\Omega : \mathbf{Top}_\bullet \to \mathbf{Top}_\bullet$.

Para el caso del primer funtor, consideremos a una función basada $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ y definimos $Sf : (SX, *) \to (SY, *)$ mediante el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} X \times I & \xrightarrow{f \times \mathrm{id}_I} & Y \times I \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ SX & \xrightarrow[Sf]{} & SY. \end{array}$$

Debe satisfacerse

$$(q \circ f \times \mathrm{id}_I)(s,t) = q(f(s),t) = [f(s),t]$$

y

$$(Sf \circ p)(s,t) = Sf(p(s,t)) = Sf[s,t],$$

así que definimos, para hacer conmutar el diagrama

$$\begin{aligned} Sf : SX &\to SY, \\ [s,t] &\mapsto [f(s),t]. \end{aligned}$$

Esto está bien definido, pues

$$\begin{aligned} \forall t\, Sf[x_0,t] &= [f(x_0),t] = [y_0,t], \\ Sf[s,0] &= [f(s),0] = [y,0], \\ Sf[s,1] &= [f(s),1] = [y,1], \end{aligned}$$

y como p es identificación, Sf es continua.

Para el caso del segundo funtor es sencillo definirlo en las funciones continuas $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$

$$\begin{aligned} \Omega f : (\Omega X, *) &\to (\Omega Y, *) \\ \sigma &\mapsto f \circ \sigma, \end{aligned}$$

pero es más difícil ver que Ωf es continua. Aquí sale en nuestro auxilio la correspondencia ϕ dada por la ley exponencial haciendo $X = C(S^1, W)$, $Y = S^1$ (lo cual es posible porque S^1 es un espacio compacto y Hausdorff)

$$C(C(S^1, W) \times S^1, Z) \leftrightarrow C(C(S^1, W), C(S^1, Z)).$$

Consideremos a la función $C(S^1, W) \times S^1 \xrightarrow{\mathrm{ev}} W \xrightarrow{f} Z$, donde $\mathrm{ev}(g, w) = g(w)$. Por el Ejercicio 1.4, ev es continua, luego $f \circ \mathrm{ev}$ es continua. Dado $\sigma \in C(S^1, W)$, tenemos que

$$(\phi(f \circ \mathrm{ev}))(\sigma) = (f \circ \mathrm{ev})(\sigma, ?) = f(\mathrm{ev}(\sigma, ?)) = f \circ \sigma = (\Omega f)(\sigma),$$

lo que implica que $\Omega(f)$ es continua, dadas las propiedades de la correspondencia.

Tenemos los diagramas

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[d, "g"'] & C(SX,Z) \arrow[r, "\phi\circ p^{\#}", "\cong"'] \arrow[d, "g_*"'] & C(X,\Omega Z) \arrow[d, "\Omega g_*"] \\ Z' & C(SX,Z') \arrow[r, "\phi\circ p^{\#}", "\cong"'] & C(X,\Omega Z') \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

y

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[d, "f"'] & C(SX,Z) \arrow[r, "\phi\circ p^{\#}", "\cong"'] & C(X,\Omega Z) \\ X & C(SX',Z) \arrow[r, "\phi\circ p^{\#}", "\cong"'] \arrow[u, "Sf^*"] & C(X',\Omega Z) \arrow[u, "f^*"'] \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

donde para $h \in C(SX, Z)$

$$\begin{aligned} g_* : C(SX,Z) &\to C(SX,Z'), \\ h &\mapsto g \circ h, \end{aligned}$$

y para $\theta \in C(X', \Omega Z)$,

$$\begin{aligned} f^* : C(X',\Omega Z) &\to C(X,\Omega Z), \\ \theta &\mapsto \theta \circ f. \end{aligned}$$

Cuando se tienen un par de funtores entre las categorías $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, bend left, "S"] & \mathbf{D} \arrow[l, bend left, "\Omega"] \end{tikzcd}$$

tales que existe una biyección

$$\mathbf{D}(SX, Y) \leftrightarrow \mathbf{C}(X, \Omega Y)$$

y tanto

$$\begin{tikzcd} \mathbf{D}(SX,Z) \arrow[r] \arrow[d, "\mathbf{D}(SX,g)"'] & \mathbf{C}(X,\Omega Z) \arrow[d, "\mathbf{C}(X,\Omega g)"] \\ \mathbf{D}(SX,Z') \arrow[r] & \mathbf{C}(X,\Omega Z') \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

como

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{D}(SX, Z) \arrow[r] & \mathbf{C}(X, \Omega Z) \\
\mathbf{D}(SX', Z) \arrow[r] \arrow[u, "\mathbf{D}(Sf,Z)"] & \mathbf{C}(X', \Omega Z) \arrow[u, "\mathbf{C}(f,\Omega Z)"']
\end{tikzcd}
\tag{1.4}
$$

conmutan, se dice que los funtores S y Ω son adjuntos. En particular, se dice que S es adjunto izquierdo de Ω y Ω adjunto derecho de S.

Ejemplo 1.13. Consideremos

$$
\begin{tikzcd}
R\text{-}\mathbf{M\acute{o}d} \arrow[r, bend left, "U"] & \mathbf{Conj} \arrow[l, bend left, "F"]
\end{tikzcd}
$$

donde U es el funtor olvidadizo y F es el funtor que envía al conjunto C al R-módulo libre FC generado por C. Estos funtores son adjuntos, y tenemos que existe una correspondencia biunívoca

$$\mathrm{Hom}_R(FX, M) \leftrightarrow \mathrm{Fun}(X, UM),$$

es decir, cuando hay un homomorfismo R-lineal entre un módulo libre y un R-módulo, existe una correspondiente función entre la base del módulo y el conjunto subyacente del módulo libre.

Queremos pasar ahora esta adjunción entre la suspensión y el espacio de lazos a la categoría $\mathbf{HTop}_\bullet$. En otras palabras, deseamos definir S, Ω : $\mathbf{HTop}_\bullet \to \mathbf{HTop}_\bullet$ que sean adjuntos.

Sean $f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ tales que $f \simeq g$ (las homotopías son basadas) y $Sf, Sg : (SX, *) \to (SY, *)$ y nos preguntamos si $Sf \simeq Sg$. Consideremos la homotopía $H : X \times I \to Y$ entre f y g, y tratemos de construir a partir de ella una homotopía $F : SX \times I \to SY$.

Antes de eso, describiremos una construcción que facilita escribir las suspensiones. Si (X, x_0) y (Y, y_0) son espacios basados, definimos su producto reducido (*smash*) como $X \vee Y = X \times Y$ donde

$$X \vee Y = \{x_0\} \times Y \cup X \times \{y_0\}.$$

Para funciones continuas basadas $f : X_1 \to Y_1$ y $g : X_2 \to Y_2$, definimos

$$
\begin{aligned}
f \wedge g : X_1 \wedge X_2 &\to Y_1 \wedge Y_2 \\
x_1 \wedge x_2 &\mapsto f(x_1) \wedge g(x_2)
\end{aligned}
$$

donde $x_1 \wedge x_2 = [(x_1, x_2)]$, que es continua ya que tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
X_1 \times X_2 \arrow[r, "f \times g"] \arrow[d, "p"'] & Y_1 \times Y_2 \arrow[d, "q"] \\
X_1 \vee X_2 \arrow[r, "f \vee g"'] & Y_1 \vee Y_2
\end{tikzcd}
$$

y al ser $f \times g$ continua y p una identificación, $f \vee g$ es continua. Nótese que del Ejercicio 1.6 se sigue que $SS^n \cong S^n \wedge S^1 \cong S^{n+1}$.

Sean $H : f \simeq g$ tal que H es basada. Definimos

$$\begin{aligned} F : (X \times S^1) \times I &\to Y \times S^1 \\ f((x, s), t) &\mapsto (H(x, t), s); \end{aligned}$$

pasando a las suspensiones

$$\begin{tikzcd} (X \times S^1) \times I \arrow[r, "F"] \arrow[d, "p\times \mathrm{id}_I"'] & Y \times S^1 \arrow[d, "q"] \\ (X \wedge S^1) \times I \arrow[r, "\overline{F}"'] & Y \wedge S^1, \end{tikzcd}$$

se puede demostrar que $p \times \mathrm{id}_I$ es una identificación. Como la homotopía es basada, F pasa al cociente como $\overline{F}$.

Definición 1.14. *El n-ésimo espacio de lazos $\Omega^n(X, x_0)$ se define como*

$$\Omega^n(X, x_0) = \Omega(\Omega^{n-1}(X, x_0)).$$

Supongamos que $H : f \simeq g$. Definimos $T : \Omega X \times I \to \Omega Y$ como $T(\alpha, t)(s) = H(\alpha(s), t)$. Se satisface

$$T(\alpha, 0)(s) = H(\alpha(s), 0) = f(\alpha(s)) = (\Omega(f))(\alpha)(s),$$

ya que habíamos definido $(\Omega f)(\alpha) = f \circ \alpha$. Asímismo, $T(\alpha, 1) = (\Omega(g))(\alpha)(s)$. Si T fuera continua, sería una homotopía entre Ωf y Ωg. Para esto, consideremos la biyección

$$C(\Omega X \times I, C(S^1, Y)) \overset{\phi}{\leftrightarrow} C(\Omega X \times I \times S^1, Y)$$

que lo es porque S^1 es localmente compacta y Hausdorff. Así, $\phi^{-1}(T)$ es la composición

$$\begin{tikzcd} \Omega X \times I \times S^1 \arrow[r, "\phi^{-1}(T)"] \arrow[d, "\mathrm{ev}"'] & Y \\ X \times I \arrow[ur, "H"'] & \end{tikzcd}$$

Como ev es continua y H es continua, $\phi^{-1}(T)$ es continua y de aquí que T es continua.

Proposición 1.15. *Las asociaciones $S, \Omega :$ **HTop$_\bullet$** $\to$ **HTop$_\bullet$** son funtores.*

Teorema 1.16. *Más aún S, Ω son funtores adjuntos.*

Demostración. Necesitamos demostrar que existe una biyección

$$[(SX,*),(Z,z_0)] \leftrightarrow [(X,x_0),(\Omega Z,*)]$$

que de hecho está inducida por ϕ. Esto es, que ϕ manda funciones homótopas en funciones homótopas. Sean $f,g : SX \to Z$ funciones basadas tales que $H : f \simeq g$. Consideremos la composición

$$\begin{tikzcd} X \times S^1 \times I \arrow[d, "p\times \mathrm{id}_I"'] \arrow[dr, "F"] & \\ SX \times I \arrow[r, "H"'] & Z. \end{tikzcd}$$

En virtud de que

$$C(X \times S \times I, Z) \leftrightarrow C(X \times I, C(S^1, Z)),$$

debemos definir $F = \phi(H \circ (p \times \mathrm{id}_I))$. Entonces

$$F(x,0)(s) = H(x \wedge s, 0) = f(x \wedge s) = \phi(f)(x)(s),$$
$$F(x,1)(s) = H(x \wedge s, 1) = g(x \wedge s) = \phi(g)(x)(s)$$

y

$$F(x_0,t)(s) = H(x_0 \wedge s, t) = H(*,t) = z_0,$$
$$F(x,t)(s_0) = H(x \wedge s_0, t) = H(*,t) = z_0.$$

Ahora consideremos funciones homótopas $f,g : (X,x_0) \to (\Omega Z,*)$ bajo H. Veamos que efectivamente $\phi^{-1}(H(s,t)) = H(s \wedge t)$, donde $s \in X$, $t \in I$, es una homotopía. En efecto,

$$H(s \wedge 0) = \phi^{-1}(H(s,0)) = \phi^{-1}(f(s)),$$
$$H(s \wedge 1) = \phi^{-1}(H(s,1)) = \phi^{-1}(g(s)),$$

y

$$H(x_0,t) = \phi^{-1}(H(x_0,t)) = \phi^{-1}(\omega_{z_0}),$$

como se quería. □

Proposición 1.17. *Se satisface*

$$\pi_q(X,x_0) = \pi_{q-1}(\Omega(X,x_0),*).$$

Demostración. Ciertamente,

$$\begin{aligned} \pi_q(X,x_0) &= [(S^q,*),(X,x_0)] \\ &= [S(S^{q-1},*),(X,x_0)] \\ &= [(S^{q-1},*),(\Omega(X,x_0),*)] \\ &= \pi_{q-1}(\Omega(X,x_0),*), \end{aligned}$$

que es lo afirmado. □

Corolario 1.18. *Se satisface* $\pi_q(X, x_0) = \pi_0(\Omega^q(X, x_0), *)$.

Queríamos todo esto para calcular

$$\pi_q(F(X;\mathbb{Z}), \Theta) = [(S^q, *), (F(X;\mathbb{Z}), \Theta)];$$

para esto veamos la siguiente función:

$$\begin{aligned} h : F(X;\mathbb{Z}) &\to \Omega F(SX;\mathbb{Z}), \\ \sum n_i z_i &\mapsto \sum n_i x_i \wedge t. \end{aligned}$$

Teorema 1.19. *Sea* X *un poliedro numerable. Entonces* $h : F(X;\mathbb{Z}) \to \Omega F(SX;\mathbb{Z})$ *es una equivalencia homotópica.*

Corolario 1.20. *Los grupos de homotopía de* $F(X;\mathbb{Z})$ *satisfacen*

$$\pi_q(F(X;\mathbb{Z})) \cong \pi_q(\Omega F(SX;\mathbb{Z})) \cong \pi_{q+1}(F(SX;\mathbb{Z})).$$

Ejemplo 1.21. Consideremos

$$F(S^0;\mathbb{Z}) = \{u : S^0 \to \mathbb{Z} : u(1) = 0\}.$$

Esto es isomorfo a $\mathbb{Z}$ bajo el isomorfismo $u \mapsto u(-1)$. Como $F(S^0;\mathbb{Z})$ es discreto $\pi_q(F(S^0;\mathbb{Z})) = 0$ para $q \neq 0$. pues cualquier función continua de S^0 en $\mathbb{Z}$ es constante.

Definición 1.22. *Un espacio topológico* X *es un espacio de Eilenberg-Mac Lane de tipo* (R, n) *si*

$$\pi_q(X) = \begin{cases} R, & q = n, \\ 0, & q \neq n. \end{cases}$$

Teorema 1.23. *Los espacios* $F(S^n, \mathbb{Z})$ *son espacios de Eilenberg-Mac Lane de tipo* $(\mathbb{Z}, n)$*, esto es,*

$$\pi_q(F(S^n;\mathbb{Z})) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = n, \\ 0 & q \neq 0. \end{cases}$$

Demostración. Para $n = 0$, es el ejemplo anterior. Supongamos entonces que $F(S^{n-1}, \mathbb{Z})$ es un espacio de Eilenberg-Mac Lane de tipo $(\mathbb{Z}, n-1)$. Entonces

$$\begin{aligned} \pi_q(F(S^n;\mathbb{Z})) &= \pi_q(F(SS^{n-1};\mathbb{Z})) \\ &= \pi_{q-1}(F(S^{n-1};\mathbb{Z})) \\ &= \begin{cases} \mathbb{Z}, & q-1 = n-1, \\ 0, & q-1 \neq n-1, \end{cases} \end{aligned}$$

según la hipótesis de inducción. □

Estamos en posición de definir lo que sigue.

Definición 1.24. *El n-ésimo anillo de cohomología homotópica está definido como*

$$\mathbb{H}^n(X;\mathbb{Z}) = [X, F(S^n;\mathbb{Z})].$$

Para $n = 1$, podemos elegir tanto $F(S^1;\mathbb{Z})$ como S^1, pues la función

$$S^1 \to F(S^1;\mathbb{Z}) : s \mapsto 1s$$

es una equivalencia homotópica. Al ser ambos espacios de Eilenberg-Mac Lane de tipo $(\mathbb{Z}, 1)$, los dos definen a la 1-cohomología con coeficientes en $\mathbb{Z}$.

Para el caso $n = 0$,

$$\mathbb{H}^0(X;\mathbb{Z}) = [X, \mathbb{Z}],$$

pero recordemos que habiamos definido el primer invariante topológico como el funtor que asocia a X el anillo $C(X, \mathbb{Z})$. En realidad, coiciden.

Teorema 1.25. *Se satisface que* $C(X, \mathbb{Z}) \cong [X, \mathbb{Z}]$.

Demostración. Sea $C(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{p} [X, \mathbb{Z}]$ definida por $p(f) = [f]$, donde esto último denota su clase de homotopía. Evidentemente, p es suprayectiva. Supongamos que existe una homotopía $H \times I \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ entre f y g. Sea $x_0 \in X$ y $\alpha_{x_0} : I \to \mathbb{Z}$ la restricción de H en $\{x_0\} \times I$. Por ser una composición de una inclusión y una función continua, α_{x_0} es continua. Sin embargo, $\mathbb{Z}$ es discreto, así que α_{x_0} está obligada a ser constante. En particular, $g(x_0) = f(x_0)$. Dado que x_0 era arbitrario, $f = g$, luego p es un isomorfismo. □

Lo que hemos hecho hasta ahora es, a partir del primer ejemplo de invariante $X \rightsquigarrow C(X, \mathbb{Z}) = [X; \mathbb{Z}]$, construir un invariante para cada $n > 0$ que es $\mathbb{H}^n(X;\mathbb{Z}) = [X, F(S^n;\mathbb{Z})]$. Recordemos que $\mathbb{H}^0(X;\mathbb{Z})$ mide las componentes conexas de X.

Sin embargo, lo anterior no considera los puntos base, así que también podemos definir

$$\tilde{\mathbb{H}}^0(X;\mathbb{Z}) := C((X, x_0), (\mathbb{Z}, 0)) \quad \text{y} \quad \tilde{\mathbb{H}}^n(X;\mathbb{Z}) = [(X, x_0), (F(S^n;\mathbb{Z}), \Theta)],$$

y esta definición permite la existencia del isomorfismo de suspensión como sigue.

Proposición 1.26. *Hay un isomorfismo* $\sigma : \tilde{\mathbb{H}}^n(X;\mathbb{Z}) \to \tilde{\mathbb{H}}^{n+1}(SX;\mathbb{Z})$ *llamado* isomorfismo de suspensión.

Demostración. Ya sabemos, por adjunción, que

$$[(SX, *), (F(S^{n+1};\mathbb{Z}), \Theta)] \cong [(X, x_0), (\Omega F(S^{n+1};\mathbb{Z}), *)].$$

Ahora necesitamos ver que relación hay entre $F(S^n;\mathbb{Z})$ y $\Omega F(S^{n+1}, \mathbb{Z})$. El espacio $\Omega F(S^{n+1}, \mathbb{Z})$ es un espacio de Eilenberg-Mac Lane de tipo $(\mathbb{Z}, n)$ ya que

$$\pi_q(\Omega F(S^{n+1}, \mathbb{Z})) \cong \pi_{q+1}(F(S^{n+1}, \mathbb{Z})) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q+1 = n+1, \\ 0, & q+1 \neq n+1 \end{cases}$$

pues, por un corolario anterior, $\pi_q(X, x_0) \cong \pi_{q+1}(\Omega X)$, y por lo tanto

$$\pi_q(\Omega F(S^{n+1}, \mathbb{Z})) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = n, \\ 0, & q \neq n. \end{cases}$$

Con más precisión: teníamos una equivalencia homotópica $h : F(X; \mathbb{Z}) \to \Omega F(SX; \mathbb{Z})$. En particular, para $X = S^n$, tenemos

$$h : F(S^n; \mathbb{Z}) \to \Omega F(SS^n; \mathbb{Z}) = \Omega F(S^{n+1}; \mathbb{Z}),$$

de manera que σ está dada por la composición, es decir,

$$[(X, x_0), (F(S^n; \mathbb{Z}), \Theta)] \overset{h_*}{\leftrightarrow} [(X, x_0), (\Omega F(S^{n+1}; \mathbb{Z}), *)]$$

y esto último es isomorfo a $[(SX, *), F(S^{n+1}; \mathbb{Z})]$, por adjunción. □

Proposición 1.27. *Los anillos* $\mathbb{H}^n(?, \mathbb{Z})$ *son invariantes homotópicos.*

Escolio 1.28. El isomorfismo $\tilde{\mathbb{H}}^0(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sigma} \tilde{\mathbb{H}}^1(SX; \mathbb{Z})$ no existe en general si las funciones no son basadas, como en el caso para $X = S^0$.

Proposición 1.29. *Se satisface*

$$\mathbb{H}^n(*; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Demostración. Tenemos

$$\mathbb{H}(*; \mathbb{Z}) = [*, F(S^n; \mathbb{Z})] = \begin{cases} C(*, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}, & n = 0, \\ [*, F(S^n; \mathbb{Z})], & n \neq 0, \end{cases}$$

pues $\pi_0(F(S^n; \mathbb{Z})) = 0$, lo que implica que $F(S^n; \mathbb{Z})$ son conectables por trayectorias. □

Escolio 1.30. Para la teoría hay que calcular los coeficientes, que son

$$\tilde{\mathbb{H}}^n(S^0; \mathbb{Z}) \cong \pi_0(F(S^n; \mathbb{Z})) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, \\ 0, & n = 0. \end{cases}$$

1.3. Otros coeficientes

Sea G un grupo abeliano. ¿Cómo definir $\tilde{\mathbb{H}}^q(X;G)$? Recordemos que

$$\tilde{\mathbb{H}}^0(X;\mathbb{Z}) = [(X,x_0),(\mathbb{Z},0)] = C((X,x_0),(\mathbb{Z},0)).$$

Algo razonable y análogo es

$$\mathbb{H}^q((X,x_0);G) = [(X,x_0),(F(S^q;G),\Theta)]$$

donde

$$F(S^q;G) = \{u : S^q \to G : u(s) = 0 \text{ para casi toda } s \in S^q, u(*) = 0\}$$

es un grupo abeliano, con la suma definida por $(u+v)(s) = u(s)+v(s)$. La esfera no tiene nada de especial por ahora, así que podríamos definir

$$F(Z;G) = \{u : Z \to G : u(s) = 0 \text{ para casi toda } s \in Z, u(z_0) = 0\}.$$

Dotamos a $F(Z;G)$ de una topología como sigue: para cada $z \in Z$, con $z \neq z_0$ y para cada $g \in G$ definimos $gz \in F(Z;G)$ a través de

$$gz(z') = \begin{cases} g, & z' = z, \\ 0, & z' \neq z. \end{cases}$$

Claramente, si $u \in F(Z;G)$ existen $z_1,\ldots,z_k \in Z$ tales que $g_i = u(z_i) \neq 0$ y $u(z) = 0$ si $z = z_i$ para algún i, y así $u = \sum_{i=1}^n g_i z_i$. Tenemos nuevamente

$$(G\times Z)^k \xrightarrow{\mu_k} F_k(Z;G),$$
$$\mu_k((g_i,z_i))_{i=1}^k \mapsto \sum_{i=1}^k g_i z_i.$$

A $(G\times Z)^k$ le damos la topología producto y a $F_k(Z,G)$ la topología cociente. Como $F_k(Z;G) \subseteq F_{k+1}(Z;G) \subseteq \cdots$, entonces $F(Z;G) = \bigcup_{k=0}^\infty F_k(Z;G)$. Así, dotamos a $F(Z;G)$ de la topología coherente (o colímite).

Se nos presenta otra vez el problema de que $F(Z;G)$ sea un grupo topológico. Ponemos las restricciones sobre el espacio Z de modo $\mu_k \times \mu_\ell$ sea continua (recordemos que con el inverso no hay problema, pues siempre es continuo), lo que hará que la suma sea continua y con ello que $F(Z;G)$ sea un grupo topológico. Hasta cierto punto también es necesario que G sea numerable.

Escolio 1.31. Frecuentemente vamos a tomar $Z = S^q$, que es un espacio conforme a las restricciones. Si G no es numerable, $F(S^q,G)$ no es un grupo topológico. Pero esto no importa ya que vamos a considerar principalmente a $\tilde{\mathbb{H}}^q(X;G)$ cuando X es un complejo CW. Si X es un complejo CW, la propiedad de $F(S^q;G)$ para cualquier G es que es un grupo topológico débil.

Combinando todo esto, se puede demostrar que $[(X,x_0),(F(S^q;G),\Theta)]$ es un grupo abeliano, pues en la composición

$$X \xrightarrow{\phi,\psi} F(S^q;G)\times F(S^q;G) \xrightarrow{+} F(S^q;G)$$

puede elegirse una topología en $F(S^q;G)\times F(S^q;G)$ tal que μ sea continua (que es precisamente lo que significa que $F(S^q;G)$ sea un grupo topológico débil), y así $X\to F(S^q;G)$ es continua.

Proposición 1.32. *Se satisface que*

$$\pi_q(F(S^n;G)) = \begin{cases} G, & q=n,\\ 0, & q\neq n.\end{cases}$$

Demostración. El grupo $F(S^0;G)$ es isomorfo a G, lo que significa que

$$\pi_q(F(S^0;G)) = \begin{cases} G, & q=0,\\ 0, & q\neq 0.\end{cases}$$

Supongamos que $F(S^{n-1};G)$ es un espacio de Eilenberg-Mac Lane de tipo $(n-1,G)$. Tenemos que

$$\pi_q(F(Z;G))\cong\pi_q(\Omega F(SZ;G))\cong\pi_{q+1}(F(SZ;G))$$

y en particular

$$\begin{aligned}\pi_q(F(S^n;G)) &\cong \pi_q(F(SS^{n-1};G))\\ &\cong \pi_{q-1}(F(S^{n-1};G))\\ &= \begin{cases} G, & q-1=n-1,\\ 0, & q-1\neq n-1,\end{cases}\end{aligned}$$

donde lo último se deduce de la hipótesis de inducción. □

De manera completamente análoga para a como se hizo para $\mathbb{Z}$, se demuestra que $\mathbb{H}^*(?;G)$ es un invariante homotópico.

1.4. Sucesión exacta

Sea (X,A) una pareja basada en $a_0\in A$ y consideremos

$$(A,a_0)\overset{i}{\hookrightarrow}(X,a_0)\overset{p}{\hookrightarrow}(X/A,*);$$

aplicando cohomología, resulta

$$\widetilde{\mathbb{H}}^q(X/A;G)\xrightarrow{p^*}\widetilde{\mathbb{H}}^q(X;G)\xrightarrow{i^*}\widetilde{\mathbb{H}}^q(A;G).$$

Queremos ver que esta sucesión es exacta, esto es, $\operatorname{Im} p^* = \operatorname{núc} i^*$ Tenemos que

$$p^*[\phi] = [\phi \circ p], \quad i^* \circ p^*[\phi] = [\phi \circ p \circ i],$$

pero $p \circ i(A) = p(A)$ es el punto base de X/A, luego $[\phi \circ p \circ i] = 0$, lo que quiere decir que $\operatorname{Im} p^* \subseteq \operatorname{núc} i^*$.

Ahora sea $\psi : X \to F(S^q; G)$ tal que $i^*[\psi] = 0$, esto es, $[\psi \circ i] = 0$. Esto significa que $\psi \circ i \simeq \mathrm{cte}_\Theta$. Si esto último fuera una igualdad en lugar de simplemente una equivalencia homotópica, entonces ψ pasaría al cociente X/A y así $\operatorname{Im} p^* \supseteq \operatorname{núc} i^*$.

Esto en general no sucede, y cuando es así recibe un nombre especial.

Definición 1.33. *Decimos que $i : A \hookrightarrow X$ es una* cofibración *si dado el diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, hook, "i"'] & A \times I \arrow[d, hook, "j \times \mathrm{id}_I"] \arrow[ddr, bend left, "H"] & \\
X \arrow[r, hook, "j"'] \arrow[drr, bend right, "f"'] & X \times I, & \\
 & & Y
\end{tikzcd} \tag{1.5}$$

donde $j(x) = (x, 0)$, existe una función continua $\tilde{H}$ tal que

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, hook, "i"'] & A \times I \arrow[d, hook, "i \times \mathrm{id}_I"] \arrow[ddr, bend left, "H"] & \\
X \arrow[r, hook, "j"'] \arrow[drr, bend right, "f"'] & X \times I \arrow[dr, "\tilde{H}"] & \\
 & & Y
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Si en la definición tomamos al espacio $Y = F(S^q; G)$ y $f = \psi$, veamos qué sale de la homotopía $H : \psi \circ i \simeq \mathrm{cte}_\Theta$. Del diagrama tenemos que $\tilde{H}_0 = \tilde{H} \circ j = \psi$, y $\tilde{H}_1 \circ i \times \mathrm{id}_I = H(x, 1) = \mathrm{cte}_\Theta$. Más aún

$$\tilde{H}_0|_A = \tilde{H} \circ j \circ i = \psi \circ i$$

por lo tanto $\tilde{H}$ es una homotopía entre ψ y una función que es constante sobre A; $\tilde{H}_1$, precisamente. En otras palabras $[\psi] = [\tilde{H}_1]$. Siendo así, $\tilde{H}_1$ pasa al cociente, esto es

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\tilde{H}_1"] \arrow[d, "p"'] & F(S^q, G) \\ X/A, \arrow[ur, "\overline{H}_1"'] & \end{tikzcd}$$

de aquí que

$$p^*[\overline{H}_1] = [\overline{H}_1 \circ p] = [\tilde{H}_1] = [\psi],$$

lo que implica que $\text{núc}\, i^* \subseteq \operatorname{Im} p^*$. Sólo falta ver que $\tilde{H}_1 \simeq \psi \operatorname{rel} a_0$. Se satisface $H(a_0, t) = \Theta$ para todo $t \in I$ por ser H una homotopía basada. Luego $\tilde{H}(a_0, t) = \tilde{H} \circ i \times \mathrm{id}_I(a_0, t) = H(a_0, t) = \Theta$ para todo $t \in I$, y en consecuencia $\tilde{H}$ es una homotopía basada.

Tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} (A, a_0) \arrow[r, hook, "i"] & (X, a_0) \arrow[r, "p"] \arrow[dr, hook] & (X/A, *) \arrow[d, dashed, "\tilde{H}"] \\ & & (X \cup CA, *) \end{tikzcd}$$

cuando A es cofibración, es decir $X/A \simeq X \cup CA$.

Necesitamos criterios para ver si una inclusión $A \overset{i}{\hookrightarrow} X$ es cofibración.

Proposición 1.34. *La inclusión* $A \overset{i}{\hookrightarrow} X$ *es una cofibración si, y sólo si, existe una retracción* $r : X \times I \to X \times \{0\} \cup A \times I$.

Demostración. Hagamos $Y = X \times \{0\} \cup A \times I$. Supongamos que i es cofibración. Definimos $f : X \to Y : x \mapsto (x, 0)$ y $H : A \times I \to Y : (a, t) \mapsto (a, t)$. Entonces $f \circ i = (a, 0) = H \circ j$, donde $j(a) = (a, 0)$. Siendo i cofibración, existe $\tilde{H}$ continua tal que $\tilde{H} \circ j = f$ y $H = \tilde{H} \circ i \times \mathrm{id}_I$. Entonces

$$r(x, 0) = \tilde{H}(x, 0) = \tilde{H} \circ j(x, 0) = f(x) = (x, 0)$$

y

$$r(a, t) = \tilde{H}(a, t) = \tilde{H} \circ i \times \mathrm{id}_I = H(a, t) = (a, t).$$

Recíprocamente, supongamos existe la retracción $r : X \times I \to X \times \{0\} \cup A \times I$. Queremos ver uqe $A \overset{i}{\hookrightarrow} X$ es cofibración. Dados H y f tales que (1.5) conmuta, definimos $\tilde{H} : X \times I \to Y$ como sigue

$$\tilde{H}(x, t) = \begin{cases} f \circ i \circ r(x, t), & (x, t) \in r^{-1}(X \times \{0\}), \\ H \circ r(x, t), & (x, t) \in r^{-1}(A \times I). \end{cases}$$

Esto está bien definido. Sea $(a, 0) \in r^{-1}(X \times \{0\}) \cap r^{-1}(A \times I)$. Entonces

$$f \circ p_X \circ r(a, 0) = f \circ p_X(a, 0) = f(a)$$

y

$$H(r(a,0)) = H(a,0)$$

pero ya que (1.5) conmuta, $H(a,0) = f(a)$, confirmándose el aserto.

Aunque es cierto en general, probaremos la continuidad de $\tilde{H}$ bajo la hipótesis de que A es o bien cerrado o bien abierto (un caso importante es cuando X es cerrado; siendo A es una retracción, A es cerrado). Tanto $X \times \{0\}$ como $A \times \{0\}$ son cerrados (o bien, abiertos) en $X \times I$, y como coinciden en la intersección, $\tilde{H}$ es continua. □

Definición 1.35. *Se dice que $A \subseteq X$ es retracto por deformación de una vecindad de X si existe una vecindad $A \hookrightarrow V \hookrightarrow X$ y una homotopía $H : V \times I \to X$ tal que*

$$\begin{aligned} \forall x \in V, &\quad H(x,0) = x, \\ \forall a \in A, t \in I, &\quad H(a,t) = a, \\ \forall x \in V, &\quad H(x,1) \in A. \end{aligned}$$

Teorema 1.36. *Sea X un espacio topológico completamente normal y Hausdorff. Sea $A \subseteq X$ cerrado que es retracto por deformación de una vecindad de X. Entonces $A \overset{i}{\hookrightarrow} X$ es una cofibración.*

A modo de ejemplo, sea X una variedad diferenciable y cerrada. Sea $A \subseteq X$ una subvariedad compacta. En este caso A es cofibración según el teorema anterior pues A tiene una vecindad tubular.

1.5. Clases basadas y no basadas

Denotamos por $[(X,x_0),(Y,y_0)]$ a las clases de homotopía basadas y por $[X,Y]$ a las clases de homotopía no basadas. ¿Qué relación hay entre ellas?

Definición 1.37. *Un espacio basado (Y,y_0) se dice que está bien basado (o bien punteado) si la inclusión $\{y_0\} \hookrightarrow Y$ es una cofibración.*

Sea (X,x_0) un espacio bien basado. Definimos una acción de $\pi_1(Y,y_0)$ en $[(X,x_0),(Y,y_0)]$ que escribiremos como $[f]_\bullet \cdot [\sigma]$, donde $[f]_\bullet$ es la clase de homotopía basada. Si en el diagrama (1.5) tomamos a $A = \{x_0\}$ y $H = \tilde{\sigma}(x_0,t) = \sigma(t)$. Ahora $F = \tilde{H}$ es una homotopía que empieza en f y termina en alguna función F_1 que satisface $F_1(x_0) = F(x_0,1) = \sigma(1) = y_0$, que permite definir $[f]_\bullet \cdot [\sigma] = [F_1]$. Pero F es una homotopía no basada en general por que

$$F(x_0,t) = \tilde{\sigma}(x_0,t) = \sigma(t),$$

a menos que $\sigma(t)$ sea el lazo constante. Se puede demostrar que esta acción está bien definida.

Proposición 1.38. *Sea (X,x_0) un espacio bien basado, entonces hay una biyección*
$$[(X,x_0),(Y,x_0)]/\pi_1(Y,y_0) \leftrightarrow [(X,x_0),(Y,y_0)]_N$$
donde $[(X,x_0),(Y,y_0)]_N$ representa a las clases de homotopía no basadas.

Demostración. Sea θ la inclusión de $[(X,x_0),(Y,x_0)]$ en $[(X,x_0),(Y,x_0)]_N$. Tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}[(X,x_0),(Y,y_0)] \arrow[r, two heads, "\theta"] \arrow[d, two heads, "p"'] & {[(X,x_0),(Y,y_0)]_N} \\ {[(X,x_0),(Y,y_0)]/\pi_1(Y,y_0),} \arrow[ur, dashed, "\overline{\theta}"'] & \end{tikzcd}$$

que indica que θ pasa al cociente pues si tomamos $[f]_\bullet$ y $[f]_\bullet \cdot [\sigma] = [F_1]$, ciertamente que $[f] = [F_1]$ pues $F_0 = f$.

Es claro que $\overline{\theta}$ es suprayectiva, así que sólo resta ver que es inyectiva. Sean $f,g : (X,x_0) \to (Y,y_0)$ tales que $\theta[f]_\bullet = \theta[g]$. Entonces $[f] = [g]$. Luego existe $H : X \times I \to Y$ tal que $H : f \simeq g$. Consideremos a $H_{x_0} : I \to Y$ definido por $H_{x_0}(0) = H(x_0,0) = f(x_0) = y_0$ y que satisface $H_{x_0}(1) = H(x_0,1) = g(x_0) = y_0$. Luego $[f]_\bullet \cdot [H_{x_0}] = [g]_\bullet$. □

Proposición 1.39. *Sea (X,x_0) un espacio bien basado y Y conectable por trayectorias. Entonces hay una biyección*

$$[(X,x_0),(Y,y_0)]_N \leftrightarrow [X,Y].$$

Demostración. Claramente $[(X,x_0),(Y,y_0)]_N \hookrightarrow [X,Y]$. Sólo falta ver que esta inclusión es suprayectiva. Sea $[f] \in [X,Y]$. Como Y es conectable por trayectorias. Sea $\sigma : I \to Y$ tal que $\sigma(0) = y_0$ y $\sigma(1) = f(x_0)$. Como (X,x_0) está bien basado, en el diagrama (1.5) con $A = \{x_0\}$ y $H = \widetilde{sigma}(x_0,t) = \sigma(t)$. Entonces haciendo $F = \tilde{H}$, se satisface $F_1(x_0) = F(x_0,1) = \tilde{\sigma}(x_0,1) = \sigma(1) = y_0$, y podemos tomar $F_1 \in [(X,x_0),(Y,y_0)]$. Así, $[F_1] = [f]$, pues la homotopía F no es basada. □

Corolario 1.40. *Sea (X,x_0) un espacio bien basado y Y un espacio conectable por trayectorias. Entonces existe una biyección*

$$[(X,x_0),(Y,y_0)]/\pi_1(Y,y_0) \leftrightarrow [X,Y].$$

Proposición 1.41. *Sea (X,x_0) un espacio bien basado y Y un grupo topológico conectable por trayectorias. Entonces $[(X,x_0),(Y,y_0)] \leftrightarrow [X,Y]$.*

Demostración. Supongamos que el punto base y_0 de Y es su neutro. Sea $[f]_\bullet \in [(X,x_0),(Y,y_0)]$ y $[\sigma] \in \pi_1(Y,y_0)$. Entonces $[f]_\bullet \cdot [\sigma]$ se puede dar como sigue. Definimos $F : X \times I \to Y$ a través de $F(x,t) = f(x)\sigma(t)$. La función F es continua pues es la composición $X \times I \xrightarrow{f\times\sigma} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y$. Tenemos que $F(x,0) = f(x)\sigma(0) = f(x)$ y $F(x_0,t) = f(x_0)\sigma(t) = \sigma(t) = \tilde{\sigma}(x_0,t)$. Por definición $[f]_\bullet \cdot [\sigma] = [F_1]$ y $F_1(X) = F(x,1) = f(x)\sigma(1) = f(x)$ lo que quiere decir que $[f]_\bullet \cdot [\sigma] = [f]$. Por lo tanto las clases bajo la acción son las mismas que sin ella. □

Escolio 1.42. Podemos relajar las hipótesis de que Y sea grupo topológico a que Y posea un producto continuo con neutro y_0. Incluso basta que sea H-espacio donde hay un neutro unilateral salvo homotopía.

Corolario 1.43. *Si* (X, x_0) *está bien basado,* $\mathbb{H}^q(X;G) \cong \mathbb{H}^q(X;G)$ *para todo* $q \geq 1$.

Demostración. Tenemos que $F(S^q;G)$ es un grupo topológico conectable por trayectorias y $\pi_0(F(S^q,G)) = 0$, luego cumple las hipótesis de la proposición anterior. □

Definición 1.44. *Un espacio de Hausdorff* X *es* compactamente generado *si un subespacio* $C \subseteq X$ *es cerrado cuando* $C \cap K$ *es cerrado para cada compacto* $K \subseteq X$.

Hay un funtor que asocia a cada espacio Hausdorff un espacio compactamente generado $k(X)$ poniéndole la topología coherente con su familia de compactos. La identidad $\mathrm{id} : k(X) \to X$ es continua pues $\mathrm{id}|_K$ para cada compacto $K \subseteq X$ es de hecho $\mathrm{id}_K : K \to X$ un inclusión homeomórfica.

Dados X e Y espacios de Hausdorff, denotamos como $X \times_k Y$ al producto con la topología compactamente generada.

Proposición 1.45. *Sean* $p_1 : X_1 \to Y_1$ *y* $p_2 : X_2 \to Y_2$ *identificaciones, con todos los espacios en cuestión compactamente generados. Entonces* $p_1 \times p_2 : X_1 \times_k X_2 \to Y_1 \times_k Y_2$ *es una identificación.*

Observemos que si X es compactamente generado, $k(X) = X$ e $\mathrm{id} : k(X) \to X$ es una equivalencia homotótopica débil. Entonces, si en la composición

$$X \xrightarrow{\phi,\psi} F(S^q;G) \times F(S^q;G) \xrightarrow{+} F(S^q;G)$$

aplicamos el funtor k con X compactamente generado,

$$X \xrightarrow{\phi,\psi} F(S^q;G) \times_k F(S^q;G) \xrightarrow{+} F(S^q;G)$$

haciéndose $+$ continua, pues ahora $\mu_k \times \mu_\ell$ es una identificación, incluso cuando G no es numerable. Además, como k preserva la estructura homotópica de los espacios, esto no afecta a la estructura de $\mathbb{H}^q(X;G)$.

Teorema 1.46. *Toda función continua* $f : X \to Y$ *se puede factorizar por una cofibración y una equivalencia homotópica.*

Demostración. La idea es cambiar a Y por un espacio del mismo tipo de homotopía de Y para reemplazar a f por una cofibración. El espacio a considerar es $\mathrm{Cil}(f)$ que se define como sigue

$$\mathrm{Cil}(f) = (X \times I \amalg Y)/\sim$$

donde $(x,1) \sim f(x)$. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "f"] \arrow[dr, hook, "j"'] & Y \arrow[d, shift left, "\iota"] \\ & \mathrm{Cil}(f) \arrow[u, shift left, "r"] \end{tikzcd}$$

donde $\iota(y) = [y] := q(y)$ y $j(x) = [x,0] := q(x,0)$, mientras que r está inducida en el cociente por

$$r(s) = \begin{cases} f(x), & s = (x,t) \\ s, & s \in Y. \end{cases}$$

Tenemos que $r \circ j[x] = r[x,0] = f(x)$. También $r \circ \iota[y] = r[y] = y$, luego $r \circ \iota = \mathrm{id}_Y$. Para comprobar que $i \circ r \simeq \mathrm{id}_{\mathrm{Cil}(f)}$ consideremos la homotopía H inducida por

$$h(u) = \begin{cases} (x, s+t-st), & u = ((x,s),t), \\ u, & u \in Y \times I. \end{cases}$$

Tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} (X \times I \amalg Y) \times I \arrow[r, two heads, "h"] \arrow[d, "q \times \mathrm{id}_I"'] & X \times I \amalg Y \arrow[d, "q"] \\ \mathrm{Cil}(f) \times I \arrow[r, "H"'] & \mathrm{Cil}(f), \end{tikzcd}$$

y como h es continua y $q \times \mathrm{id}_I$ es continua, entonces H es continua. Ahora bien

$$H([x,s],0) = [x,s], \quad H([y],0) = [y],$$

luego $H_0 = \mathrm{id}_{\mathrm{Cil}(f)}$ y

$$\iota \circ r(x,1) = H([x,s],1) = [x,1] = [f(x)], \quad H([y],1) = [y],$$

esto es, $H_1 = \iota \circ r$. Finalmente, j es una cofibración. En efecto, sea $H : X \times I \to Z$ y $g : \mathrm{Cil} f \to Z$ tal que $g \circ j(x) = H(x,0)$. Definimos

$$F : (X \times I) \times I \to Z,$$
$$(x,s,t) \mapsto \begin{cases} g[x, \frac{2s-t}{2-t}], & 0 \leq t \leq 2s \\ H(x, t-2s), & 2s \leq t \leq 1, \end{cases}$$

lo cual es continuo porque en $t = 2s$, $H(x, 0) = F(x, s, t) = g[x, 0] = g \circ j(x)$. Definimos asimismo $G : Y \times I \mapsto Z : (y, t) \mapsto g[y]$. Las funciones G y F pegan bien pues $(x, 1, t) \mapsto g[x, 1]$ y $(f(x), t) \mapsto g[f(x)]$, pero $[x, 1] = [f(x)]$, así que F y G coinciden en la intersección de sus dominios. Luego $\tilde{H} = F \amalg G$ es continua y pasa al cociente. Además

$$\tilde{H}([x, s], 0) = g[x, s], \quad \tilde{H}([y], 0) = g[y]$$

esto es, $\tilde{H}_0 = g$ y

$$\tilde{H} \circ j \times \mathrm{id}_I(x, t) = \tilde{H}([x, 0], t) = H(x, t)$$

lo que significa que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook] \arrow[d, hook, "j"'] & X \times I \arrow[d, hook, "j \times \mathrm{id}_I"] \arrow[ddr, bend left, "H"] & \\
\mathrm{Cil}(f) \arrow[r, hook] \arrow[drr, bend right, "g"'] & \mathrm{Cil}(f) \times I \arrow[dr, "\tilde{H}"] & \\
& & Z
\end{tikzcd}$$

conmuta, y con ello que $X \overset{j}{\hookrightarrow} \mathrm{Cil}(f)$ es una cofibración. □

1.6. Cofibraciones y puntos base

Supongamos que $i : A \hookrightarrow X$ es una cofibración y supongamos que además i es basada en a_0. Sea $f : (X, a_0) \to (Y, y_0)$ y $H : (A, a_0 \times I) \to (Y, y_0)$ son tales que el diagrama (1.5) conmuta. Existe entonces $\tilde{H} : X \times I \to Y$ que tal diagrama permanece conmutativo. Pero $\tilde{H}$ es incluso basada, pues $\tilde{H}(a_0, t) = H(a, t) = y_0$ para todo $t \in I$. Podemos decir entonces que i es una cofibración basada, pues la $\tilde{H}$ inducida por la propiedad universal también es basada. Es verdad entonces que toda cofibración es cofibración basada, pero el recíproco es falso. A menos, por ejemplo, que a_0 sea un buen punto base.

Sea $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$. Construímos el cilindo reducido

$$\tilde{\mathrm{Cil}}(f) = ((X \times I / \{x_0\} \times I) \amalg Y) / \sim$$

donde $[x, 1]_{X \times I} \sim f(x)$.

Proposición 1.47. *Sea $i : (A, a_0) \to (X, a_0)$ una cofibración basada. Entonces para cada espacio (Y, y_0) se satisface la siguiente sucesión exacta*

$$[(X/A, *), (Y, y_0)] \xrightarrow{p^*} [(X, a_0), (Y, y_0)] \xrightarrow{i^*} [(A, a_0), (Y, y_0)]$$

es decir, $\mathrm{Im}\, p^* = \mathrm{núc}\, i^*$*, donde por núcleo se entiende la imagen inversa bajo i^* del punto base, es decir, de la función constante de A en Y con valor y_0.*

En este caso decimos que la sucesión $(A, a_0) \xrightarrow{i} (X, x_0) \xrightarrow{p} (X/A, *)$ es H-coexacta.

Demostración. En principio $i^* \circ p^*[\phi] = [\phi \circ p \circ i]$, pero $\phi \circ p \circ i(a) = y_0$ para todo $a \in A$, luego $\operatorname{Im} p^* \subseteq \operatorname{núc} i^*$. Sea $f : (X, a_0) \to (Y, y_0)$ tal que $i^*[f] = [f \circ i] = [\text{cte}]$. Tomando $\tilde{H}_1 : (X, a_0) \to (Y, y_0)$ donde $\tilde{H}$ es la homotopía inducida por la cofibración, sabemos que es constante sobre A. Por lo tanto, pasa al cociente, y define $\overline{H}_1$ tal que $p^*[\tilde{H}_1] = [\tilde{H}_1] = [f]$. □

Definición 1.48. *Sea $f : X \to Y$ continua. Definimos la cofibra homotópica o cono de aplicación de f como $C(f) = \mathrm{Cil}(f)/j(X)$. Si la función es basada se tiene el cilindro reducido y el cono reducido de f, que denotamos como $\tilde{C}(f)$.*

Vamos a considerar una inclusión $i : (A, a_0) \hookrightarrow (X, x_0)$, y en este caso $\tilde{C}(i) = X \cup \tilde{C}A$.

Teorema 1.49. *Sea (X, A, a_0) una pareja basada. Entonces la sucesión*

$$(A, a_0) \to (X, x_0) \to (X \cup \tilde{C}A, *)$$

es H-coexacta.

Demostración. Consideremos el diagramada dado por el teorema anterior cuando $f = i : A \hookrightarrow X$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, hook, "j"'] & X \arrow[d, shift left, "\iota"] & \\ & \tilde{\mathrm{Cil}}(i) \arrow[u, shift left, "r"] \arrow[r, "q"] & \tilde{\mathrm{Cil}}(i)/j(A). \end{tikzcd} \tag{1.6}$$

Por la proposición anterior aplicada a j, tenemos la sucesión exacta

$$[(X \cup \tilde{C}A, *), (Y, y_0)] \xrightarrow{q^*} [(\widetilde{\mathrm{Cil}}(i), *), (X, x_0)] \xrightarrow{j^*} [(A, a_0), (Y, y_0)]$$

Como ι es una equivalencia homotópica, entonces ι^* es una biyección. En el diagrama

$$\begin{tikzcd} {[(X \cup \tilde{C}A, *), (Y, y_0)]} \arrow[r, "q^*"] \arrow[d, equal] & {[(\widetilde{\mathrm{Cil}}(i), *), (Y, y_0)]} \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "\iota^*"] & {[(A, a_0), (Y, y_0)]} \arrow[d, equal] \\ {[(X \cup \tilde{C}A, *), (Y, y_0)]} \arrow[r, "(q \circ \iota)^*"'] & {[(X, x_0), (Y, y_0)]} \arrow[r] & {[(A, a_0), (Y, y_0)]} \end{tikzcd}$$

el primer cuadrado conmuta trivialmente y el segundo por que (1.6) conmuta. Como el primer renglon es exacto, el segundo también lo es. □

Lema 1.50. *Sea $A \hookrightarrow X$. Entonces $X \cup CA/CA \cong X/A$.*

Demostración. Afirmamos que j pasa al cociente. En efecto, p identifica a los puntos de A y a los de $\pi \circ j$ también. Consideremos ahora

$$\begin{tikzcd} X \amalg CA \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & X/A \\ X \cup CA \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

donde $f|_X \equiv p$ y $f(CA) \equiv * \in X/A$. La función f es compatible con q ya que q identifica $a \sim [a, 1]$ y $f(a) = p(a) = * = f[a, 1]$, luego f pasa al cociente como $\overline{f} : X \cup CA \to X/A$. □

Proposición 1.51. *Sea $B \subseteq Y$ un subespacio y supongamos que existe una homotopía tal que $H : Y \times I \to I$ satisface $H(y, 0) = y$, $H(B \times I) \subseteq B$ y $H(b, 1) = b_0$ para todo $b \in B$. Entonces $q : (Y, B) \to (Y/B, *)$ es una equivalencia homotópica.*

Demostración. Consideremos $Y \xrightarrow{H_1} Y$. Como $H_1(B) = \{b_0\}$, H_1 pasa al cociente y define una función $s : Y/B \to Y$. Entonces $H : Y \times I \to Y$ es una homotopía tal que $H_0 = \mathrm{id}$ y $H_1 = s \circ q$, es decir, $H : \mathrm{id} \simeq s \circ q$. Queremos probar ahora que $q \circ s \simeq \mathrm{id}$. Para esto necesitamos una homotopía $H : Y/B \times I \to Y/B$. Primeramente, la composición $q \circ H$ es compatible con la identificación $q \times \mathrm{id}_I$ ya que $H(B \times I) \subseteq B$ y $q(B) = *$. Por lo tanto existe $\overline{H} : Y/B \times I \to Y/B$. Además

$$\overline{H}([y], 0) = [H(y, 0)] = [y] \quad \text{y} \quad \overline{H}([y], 1) = [H(y, 1)] = q \circ H_1(y) = q \circ s[y],$$

luego $\overline{H}$ es una homotopía entre id y $q \circ s$. □

Proposición 1.52. *Sea $A \overset{i}{\hookrightarrow} X$ una cofibración y supongamos que A es contraíble. Entonces la proyección $p : (X, A) \to (X/A, *)$ es una equivalencia homotópica.*

Demostración. Como A es contraíble, existe una homotopía $H : A \times I \to A$ tal que $H(a, 0) = a$ y $H(a, 1) = a_0$. Como i es cofibración, del diagrama (1.5) se deduce la existencia de $\tilde{H} : X \times I \to X$ tal que $H_0 = \mathrm{id}_X$ y $H_1 = \mathrm{cte}_{a_0}$. También $\tilde{H}(a, t) = H(a, t)$ para todo $a \in A$ y $H_1(a, 1) = \mathrm{cte}_{a_0}$. El resultado se sigue ahora de la proposición anterior. □

Proposición 1.53. *Si $A \hookrightarrow X$ es cofibración, entonces $C(i) = X \cup CA \simeq X/A$.*

Demostración. Primero vamos a ver que dado que $i : A \hookrightarrow X$ es cofibración, entonces $CA \hookrightarrow X \cup CA$ también es cofibración. Para tal fin, por un resultado anterior, basta construir una retracción $\rho : (X \cup CA) \times I \to X \cup CA \times$

$\{0\} \cup CA \times I$. Por ser $i : A \hookrightarrow X$ una cofibración tenemos una retracción $r : X \times I \to X \times \{0\} \cup A \times I$.

$$\begin{array}{ccc}
(X \amalg CA) \times I & \xrightarrow{r \amalg \mathrm{id}} & (X \times \{0\} \cup A \times I) \times I \\
{\scriptstyle p \times \mathrm{id}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle p|} \\
(X \cup CA) \times I & \xrightarrow[\rho]{} & (X \cup CA) \times \{0\} \cup CA \times I.
\end{array}$$

Tenemos que $p \times \mathrm{id}_I$ identifica a $([a, 1]_{CA}, t)$ y

$$[a, t] \mapsto ([a, 1]_{CA}, t) \mapsto ([[a, 1]_{CA}], t) = ([a], t)$$

mientras que

$$([a, 1]_{CA}, t) \mapsto ([a, 1]_{CA}, t) \mapsto ([[a, 1]_{CA}], t) = ([a], t)$$

donde lo último es porque son los elementos en cuestión son los que identifica p. Finalmente, ρ es una retracción pues

$$\begin{aligned}
\rho([x], 0) &= p \times \mathrm{id}_I(r(x, 0)) = (p \times \mathrm{id})(x, 0) = ([x], 0), \\
\rho([[a, s]_{CA}], 0) &= p \times \mathrm{id}([a, s], 0) = [[a, s]_{CA}, 0], \\
\rho([a, s]_{CA}, t) &= p \times \mathrm{id}_I([a, s)_{CA}, t) = ([a, s]_{CA}, t).
\end{aligned}$$

Por la proposición anterior, $X \cup CA \simeq X/A$. □

Recapitulando, tenemos que los grupos $\tilde{\mathbb{H}}^q((X, x_0), G)$ satisfacen lo siguiente.

1. Son invariantes homotópicos.
2. El homomorfismo $\sigma : \mathbb{H}^q(X; G) \xrightarrow{\cong} \mathbb{H}^q(SX; G)$ es un isomorfismo natural.
3. Para una sucesión $(A, a_0) \xrightarrow{i} (X, a_0) \xrightarrow{j} (X \cup \tilde{C}A, *)$, la sucesión

$$\mathbb{H}^q(X \cup \tilde{C}A; G) \xrightarrow{j^*} \tilde{\mathbb{H}}(X; G) \xrightarrow{i^*} \mathbb{H}^q(A; G)$$

   es exacta.

Una familia de funtores $h^q : \mathbf{Top}_\bullet^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$ con transformaciones naturales $\sigma : h^q \to h^{q+1} \circ S$ que satisfacen los tres incisos anteriores, se denomina teoría de cohomología reducida.

Si además la teoría satisface

$$\mathbb{H}^q(S^0; G) = \begin{cases} G, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0, \end{cases}$$

entonces se dice que la teoría es ordinaria.

Sea $\{(X_\alpha, x_\alpha)\}_\alpha$ una familia de espacios basados. Consideremos $\bigvee_\alpha X_\alpha$ y las inclusiones $\iota_\alpha : X_\alpha \to \bigvee_\alpha X_\alpha$.

Proposición 1.54. *La familia de homomorfismos ι_α^* induce un isomorfismo* $\mathbb{H}^q(\bigvee_\alpha X_\alpha; G) \xrightarrow{\cong} \prod_\alpha \tilde{\mathbb{H}}^q(X_\alpha; G)$.

Demostración. Por la propiedad universal del producto, existe un homomorfismo ι tal que $\pi_\alpha \circ \iota = \iota_\alpha^*$. La función ι es suprayectiva. Sea

$$\{[f_\alpha]_\alpha | f_\alpha : (X_\alpha, x_\alpha) \to (F(S^q; G), \Theta)\} \in \prod_\alpha \mathbb{H}^q(X_\alpha; G).$$

Tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X_\alpha \arrow[r, "i_\alpha"] \arrow[dr, "\iota_\alpha"'] & \coprod_\alpha X_\alpha \arrow[r, "f"] \arrow[d] & F(S^q; G) \\
& \bigvee_\alpha X_\alpha; \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

sea $f : \coprod_\alpha X_\alpha \to F(S^q; G)$ tal que $f|_{X_\alpha} = f_\alpha$. Como $f_\alpha(x_\alpha) = \Theta$ para cada α, f pasa al cociente y define $\overline{f} : \bigvee X_\alpha \to F(S^q; G)$. Puesto que

$$\pi_\alpha \circ \iota[\overline{f}] = \iota_\alpha^*[\overline{f}] = [\overline{f} \circ \iota_\alpha^*] = [f \circ \iota_\alpha] = [f_\alpha],$$

entonces ι es suprayectiva. También ι es inyectiva. Sea $[\phi] \in \tilde{\mathbb{H}}^q(\bigvee_\alpha X_\alpha; G)$ tal que $\iota[\phi] = 0$. Entonces $\pi_\alpha \circ \iota[\phi] = 0$ para todo α. Así, $\iota_\alpha^*[\phi] = 0 = [\phi \circ \iota_\alpha]$. Así $H_\alpha : \phi|_{X_\alpha} \simeq \mathrm{cte}_\Theta$. Tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(\coprod_\alpha X_\alpha) \times I \arrow[r, "H"] \arrow[d, "p \times \mathrm{id}_I"'] & F(S^q; G) \\
\bigvee_\alpha X_\alpha \times I \arrow[ur, dashed, "\overline{H}"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $H|_{X_\alpha} = H_\alpha$. Como $\{x_\alpha\}_\alpha \times I$ se colapsa a un punto y dado que H_α es basada, esto es, $H_\alpha(x_\alpha, t) = \Theta$, entonces H pasa al cociente y define una homotopía $\overline{H}$ que satisface

$$\begin{aligned}
\overline{H}(p \times \mathrm{id}(x, 0)) = H(x, 0) = H_\alpha(x, 0) = \phi(x), \\
\overline{H}(p \times \mathrm{id}(x, 1)) = H(x, 1) = H_\alpha(x, 1) = \Theta,
\end{aligned}$$

y por eso $[\phi] = 0$, como afirmábamos. □

Si una teoría de cohomología satisface la conclusión de la proposición anterior se dice que cumple el axioma de la cuña.

Teorema 1.55. *Dos teorías de cohomología que satisfacen los axiomas de cohomología regular ordinaria y el de la cuña, son naturalmente isomorfas.*

Teniendo una definición general de teoría de cohomología, nos gustaría construir los análogos a $F(S^q; G)$ para teorías generales.

Proposición 1.56. *Sea X un complejo CW y A, B subcomplejos de X con un punto base $x_0 \in A \cap B$ tal que $X = A \cup B$. Sean $[f] \in [(A, x_0), (Y, y_0)]$ y $[g] \in [(B, x_0), (Y, y_0)]$ tales que $[f]|_{A\cap B} = [g]|_{A\cap B}$ (es decir, $\iota_1^*[F] = [f]$ e $\iota_2^*[F] = [g]$ donde $A \overset{\iota_1}{\hookrightarrow} X$ y $A \overset{\iota_2}{\hookrightarrow} X$.*

Demostración. Por hipótesis, existe una homotopía $H : A \cap B \times I \to Y$ tal que $H_0 = f|_{A\cap B}$ y $H_1 = g|_{A\cap B}$. Como $A \cap B \hookrightarrow A$ es una inclusión de subcomplejo, es una cofibración. Luego existe $\tilde{H} : A \times I \to Y$ tal que $\tilde{H}(x, t) = H(x, t)$ para todo $x \in A \cap B$. Consideremos a $\tilde{H}_1 : A \to Y$ que satisface $\tilde{H}_1(x) = \tilde{H}_1(x, 1) = H(x, 1) = g(x)$. Como $\tilde{H}_0 = f$, entonces $[f] = [\tilde{H}_1]$. Tenemos que $\tilde{H}_1|_{A\cap B} = g|_{A\cap B}$. Entonces existe $F : X \to Y$ tal que $F|_A = \tilde{H}_1$ y $F|_B = g$. Todos los subcomplejos resultan ser cerrados. Por lo tanto F es continua y $[F]|_A = [\tilde{H}_1] = f$ y $[F]|_B = [g]$. □

Definición 1.57. *Sea F : $\mathbf{CompCW}_\bullet^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Conj}$ un funtor contravariante entre la categoría de complejos CW punteados y la categoría de conjuntos. Decimos que F tiene la propiedad de Mayer-Vietoris si dada una triada CW basada (X, A, B) y elementos $\alpha \in F(A, x_0)$ y $\beta \in F(B, x_0)$ tales que $\alpha|_{A\cap B} = \beta|_{A\cap B}$ entonces existe $\gamma \in F(X, x_0)$ tal que $\gamma|_A = \alpha$ y $\gamma|_B = \beta$.*

Teorema 1.58 (E. Brown). *Todo funtor contravariante homotópico que satisfaga el axioma de la cuña y la propiedad de Mayer-Vietoris es representable, esto es*

$$F(X, x_0) \cong [(X, x_0), (Y, y_0)]$$

donde (Y, y_0) es el objeto que representa a F.

Tenemos, pues, el funtor $\mathbb{H}^q$: $\mathbf{HTop}_\bullet \to \mathbf{Ab}$, recordando que $\mathbf{HTop}_\bullet$ es una categoría cuyos objetos son los espacios topológicos basados y cuyos morfismos son las clases de homotopía basadas. Por lo tanto, podemos escribir a $\mathbb{H}^q$ como

$$\mathbb{H}^q((X, x_0), G) = \mathbf{HTop}_\bullet((X, x_0), (F(S^q; G), \Theta))$$

Definición 1.59. *Sea $\mathbf{C}$ una categoría arbitraria y un funtor G : $\mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Conj}$. Sea C_0 un objeto fijo de $\mathbf{C}$. Definimos el funtor $@C_0$ como $@C_0(C) = \mathbf{C}(C, C_0)$ sobre los objetos y para un morfismo $A \xrightarrow{f} B$*

$$\begin{aligned} f@C_0 : B@C_0 &\to A@C_0, \\ u &\mapsto u \circ f. \end{aligned}$$

Decimos que un funtor G es representable existe un objeto $C_0 \in \mathbf{C}$ y una equivalencia natural $\epsilon : @C_0 \Rightarrow G$.

La equivalencia natural ϵ se puede describir como sigue: sea $f : C \to C_0$ un elemento de $C@C_0$, queremos ver qué es $\epsilon_C(f) \in G(C)$. Para esto consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} C@C_0 & \xrightarrow{\epsilon_C} & FC \\ {\scriptstyle f@C_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Ff} \\ C_0@C_0 & \xrightarrow[\epsilon_{C_0}]{} & FC_0 \end{array}$$

que debe conmutar. Esto quiere decir que

$$\epsilon_C(f) = \epsilon_C(f@C_0(f)(\mathrm{id})) = Ff \circ \epsilon_C(\mathrm{id}) = F(f)(u_0),$$

por lo tanto $\epsilon_C(f) = Ff(u_0)$, donde $u_0 = \epsilon_{C_0}(\mathrm{id})$.

Definición 1.60. *Si F es un funtor contravariante representable, diremos que C_0 es el objeto que representa a F y que u_0 es un elemento universal.*

Lema 1.61 (Yoneda). *Sea $F : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Conj}$ un funtor y C_0 un objeto en $\mathbf{C}$. Entonces existe una biyección*

$$\mathrm{Nat}(@C_0, G) \leftrightarrow G(C_0).$$

Demostración. A cada transformación natural $T : @C_0 \Rightarrow G$ le asociamos el elemento $T_{C_0}(\mathrm{id}_{C_0}) \in G(C_0)$. Por otro lado, a cada $a \in G(C_0)$ le asociamos la transformación natural

$$\langle A_C : C@C_0 \to GC \rangle_{C \in \mathbf{C}}$$

a través de $A_C(\phi) = (G\phi)(a)$. Repitiendo lo anterior para T^{-1} cuando T es una equivalencia obtenemos otro morfismo $\overline{\rho}$ tal que $@\rho \circ @\overline{\rho} = \mathrm{id}$. □

Ejemplo 1.62. Una operación cohomológica de grado i con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$ es una familia de transformaciones naturales $\mathbb{H}^n(?, \mathbb{Z}_2) \Rightarrow \mathbb{H}^{n+i}(?, \mathbb{Z}_2)$. Por el lema de Yoneda, hay tantas operaciones cohomológicas de grado i como elementos tiene

$$\mathbb{H}^{n+i}(F(S^n, \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2)$$

y, como si fuera poco, Serre calculó el valor de estos grupos de cohomología.

Sea la familia de funtores contravariantes $k^n(X) = [(X, x_0), (K_n, *)]$. Una operación cohomológica de tipo (n, i) es una transformación natural $k^n \Rightarrow k^{n+i}$. Si la transformación natural es entre funtores que van a la categoría de grupos abelianos, decimos que la operación es aditiva.

Definición 1.63. *Una operación cohomológica estable de grado i, θ^i, es una familia de operaciones $\theta^i_n : k^n \Rightarrow k^{n+i}$ es una operación de tipo (n, i) para cada $n \in \mathbb{Z}$ que tienen la siguiente propiedad. Para cada espacio X el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccc} k^n(X) & \xrightarrow{\theta^i_n} & k^{n+i}(X) \\ {\scriptstyle \sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma} \\ k^{n+1}(SX) & \xrightarrow[\theta^i_{n+1}]{} & k^{n+1+i}(SX) \end{array}$$

conmuta.

Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de operaciones estables de grado i para la teoría $k^*(?)$. Dados $\phi, \psi \in \mathcal{A}^i$ definimos su suma $(\phi + \psi)(a) = \phi(a) + \psi(a)$. Definimos el producto $\mathcal{A}^i \times \mathbb{A}^j \to \mathbb{A}^{i+j}$ dado por las composición de operadores, $(\theta_n^i, \mu_{n+1}^j) = \mu_{n+1}^j \circ \theta_n^i$. Se puede demostrar que toda operación cohomológica estable es aditiva. Así,

$$\begin{aligned}(\theta \circ (\phi + \psi))(a) &= \theta((\phi + \psi)(a)) && (1.7)\\ &= \theta(\phi(a) + \psi(a)) && (1.8)\\ &= \theta \circ \phi(a) + \theta \circ \psi(a) && (1.9)\end{aligned}$$

lo que significa que $\mathcal{A}$ es un anillo graduado. Más aún, $k^*(X)$ es un módulo graduado sobre el anillo graduado $\mathcal{A}$, es decir, se tienen $\mathcal{A}^i \times k^q(X) \to k^{q+i}(X)$ dado por $\theta_q^i \cdot a = \theta_q^i(a)$.

Sea $f : X \to Y$ una función continua. Tenemos el homomorfismo inducido $f^* : k^q(Y) \to k^q(X)$. También

$$\begin{aligned}f^*(\theta_q^i \cdot a) &= f^*(\theta_q^i(a)) && (1.10)\\ &= \theta_q^i(f^*(a)) = \theta_q^i \cdot f^*(a), && (1.11)\end{aligned}$$

donde lo último está dado por la naturalidad de θ. Esto significa que f^* también es un homomorfismo de $\mathcal{A}$-módulos.

Para las operaciones de tipo (n, i) el lema de Yoneda dice que hay una biyección

$$\mathrm{Nat}(k^n, k^{n+i}) \leftrightarrow k^{n+i}(K_n).$$

Supongamos que tenemos una operación ϕ de tipo $(n+1, i)$. Queremos definir una operación $\hat{\phi}$ de tipo (n, i). Debemos tener

$$\begin{tikzcd}
k^n(X) \arrow[r, "\hat{\phi}_X"] \arrow[d, "\sigma"', "\cong"] & k^{n+i}(X) \arrow[d, "\cong"', "\sigma"] \\
k^{n+i}(SX) \arrow[r, "\hat{\phi}_Y"'] & k^{n+1+i}(SX)
\end{tikzcd}$$

por lo que definimos $\hat{\phi}_X = \sigma^{-1} \circ \phi_{SX} \circ \sigma$. Para construir ahora la correspondencia entre $k^{n+1+i}(K_{n+1})$ y $k^{n+1}(K_n)$, recordamos que

$$\begin{tikzcd}
k^n(X) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\sigma"] & {[(X, x_0), K_n]} \arrow[d] \arrow[dr, "T"] & \\
k^{n+1}(SX) \arrow[r, equal] & {[(SX, *), K_{n+1}]} \arrow[r, "\cong"] & {[(X, x_0), \Omega K_{n+1}]}
\end{tikzcd}$$

y nos preguntamos si esta transformación natural dada por el isomorfismo de suspensión viene dado por una función $K_n \xrightarrow{\epsilon_n} \Omega K_{n+1}$, de manera que $T[f] = [\epsilon_n \circ f]$.

Proposición 1.64. *Sea* $\mathbf{C}$ *una categoría y* G, G' *funtores contravariantes representables por objetos* C_0, C_0'. *Sea* $T : G \Rightarrow G'$ *una transformación natural. Entonces existe un único morfismo* $\rho : C_0 \to C_0'$ *tal que para cada objeto* $\mathbf{C}$ *en la categoría el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} C@C_0 \arrow[r, "@\rho"] \arrow[d, "\epsilon_C"'] & C@C_0' \arrow[d, "\epsilon'_C"] \\ GC \arrow[r, "T_C"'] & G'C. \end{tikzcd}$$

Además, si T *es una equivalencia natural, entonces* $@\rho$ *es un isomorfismo en* $\mathbf{C}$.

Demostración. Consideremos el caso para $C = C_0$:

$$\begin{tikzcd} C_0@C_0 \arrow[r, "@\rho"] \arrow[d, "\epsilon_{C_0}"'] & C_0@C_0' \arrow[d, "\epsilon'_{C_0}"] \\ GC_0 \arrow[r, "T_{C_0}"'] & G'C_0; \end{tikzcd}$$

sea $\rho : C_0 \to C_0'$ el único morfismo dado por

$$\epsilon'_{C_0}(\rho) = T_{C_0} \circ \epsilon_{C_0}(\mathrm{id}) = T_{C_0}(u_0).$$

Sea $\phi : C \to C_0$. Entonces

$$\begin{aligned} T_C \circ \epsilon_C(\phi) &= T_C(G(\phi)(u_0)) \\ &= G'(\phi)(T_{C_0}u_0) \\ &= G'(\phi)(\epsilon'_{C_0}(\rho)) \\ &= G'(\phi)(G'(\rho)(u_0)) \\ &= G'(\rho \circ \phi)(u_0) \\ &= \epsilon'_C(\rho \circ \phi) = \epsilon'_C \circ @\rho(\phi), \end{aligned}$$

lo que comprueba la conmutatividad inducida por $@\rho$. $\square$

Tenemos una transformación natural dada por la suspensión entre el funtor $[?, K_n]$ y el funtor $[?, \Omega K_n]$. Aplicando la proposición anterior resulta la existencia de una función continua $K_n \xrightarrow{\rho_n} \Omega K_{n+1}$. Por la segunda parte de la proposición, ρ_n es una equivalencia homotópica.

Definición 1.65. *Una familia de espacios basados* $\{P_n\}$ *y funciones*

$$\rho_n : P_n \xrightarrow{\simeq} P_{n+1}$$

que sean equivalencias homotópicas, se denomina Ω*-preespectro.*

A continuación emplearemos el adjunto del mapeo $\rho_n : K_n \to \Omega K_{n+1}$ que es la función $\hat{\rho}_n : SK_n \to K_{n+1}$. Aplicando el funtor k^{n+1+i} tenemos

$$k^{n+1+i}(K_{n+1}) \xrightarrow{\rho_n^{\#}} k^{n+1+i}(SK_n) \underset{\sigma}{\cong} k^{n+i}(K_n).$$

Proposición 1.66. *El conjunto de operaciones estables de grado i de la teoría k^* están en biyección con* $\lim_n k^{i+n}(K_n)$.

Demostración. El límite inverso de los grupos de cohomología es con respecto a las funciones $\sigma \circ \hat{\rho}_n^{\#}$, el límite inverso de la operación se hace con las funciones

$$\begin{array}{ccccccc}
k^i(K_0) & \longleftarrow & k^{i+1}(K_1) & \longleftarrow & k^{i+2}(K_2) & \longleftarrow & \cdots \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \\
\{k^0 \Rightarrow k^i\} & \longleftarrow & \{k^1 \Rightarrow k^{i+1}\} & \longleftarrow & \{k^2 \Rightarrow k^{i+2}\} & \longleftarrow & \cdots
\end{array}$$

Por $\mathcal{A}^i$ con el límite inverso de las $\mathcal{A}^i_n$ y puesto que $\mathcal{A}^i_n \cong k^{n+1}(K_n)$, entonces $\mathcal{A}_i \cong \lim K^{n+i}(K_n)$. □

Ejemplo 1.67. Observemos que

$$k^q(X) = [(X, x_0), F(S^q; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{H}^q(X; \mathbb{Z}_2)]$$

y que las operaciones estables de esta teoría están dadas por

$$\lim \mathbb{H}^{n+1}(F(S^n; \mathbb{Z}_2); \mathbb{Z}_2).$$

Los cuadrados de Steenrod

$$\mathrm{Sq}^i = \{\mathrm{Sq}^i_n : \mathbb{H}^n(?; \mathbb{Z}_2) \to \mathbb{H}^{n+i}(?; \mathbb{Z}_2)\}$$

con las propiedades

$$\mathrm{Sq}^i_j(x) = \begin{cases} x^2, & i = j, \\ 0, & j < i, \end{cases}$$

son, precisamente, operaciones estables. Más aún: sus composiciones iteradas generan a todas las operaciones estables de esta teoría. De forma similar para $k^*(X) = [(X, x_0), F(S^q; \mathbb{Z}_p)] = \mathbb{H}^q(X; \mathbb{Z}_p)$ hay potencias reducidas de Steenrod

$$\mathcal{P}^i_n : \mathbb{H}^n(X; \mathbb{Z}_p) \to \mathbb{H}^{n+2i(p-1)}(X; \mathbb{Z}_p).$$

Utilizaremos en seguida el Teorema 1.58 para ver qué forma tiene una teoría de cohomología. Sea k^* una teoría de cohomología reducida de la categoría de complejos CW que satisfaga el axioma de la cuña se puede demostrar que cualquier teoría de cohomología satisface el axioma de Mayer-Vietoris.

Cuando se restringe k^q a complejos CW conexos obtendremos un complejo CW conexo L_q tal que hay una equivalencia natural

$$\epsilon : [?, (L_q, *)] \to k^q.$$

Queremos extender esta equivalencia para complejos CW arbitrarios. Sea X un complejo CW arbitrario. Entonces

$$k^q(X) \xrightarrow[\sigma]{\cong} k^{q+1}(SX) \cong [(SX,*),(L_{q+1},*)] := [(X,x_0), \Omega L_{q+1}],$$

donde lo último es consecuencia de un ejercicio y el teorema de Brown.

Definimos $P_q := \Omega L_{q+1}$ esto nos da una familia de espacios basados $\{P_q\}$ tales que

$$k^q(X) \cong [(X,x_0),(P_q,*)]$$

para cualquier complejo CW.

De hecho $\{P_q\}$ es un Ω-preespectro, es decir, necesitamos funciones

$$P_q \to \Omega P_{q+1};$$

aunque es verdad que

$$[(X,x_0),(P_q,*)] \to [(X,x_0),(\Omega P_{q+1},*)]$$

es una equivalencia natural, el problema es que ni P_q ni ΩP_{q+1} son complejos CW en general, por eso el teorema de representación no puede aplicarse.

Proposición 1.68 (Milnor). *Sea X un complejo CW, entonces ΩX tiene el mismo tipo de homotopía que un complejo CW K, es decir, $\Omega X \simeq K$.*

Aplicando esta proposición al problema que tenemos, existen complejos CW K y L tales que

$$[?, P_q] \simeq [?, K] \simeq [?, L] \simeq [?, \Omega P_{q+1}],$$

luego existe una equivalencia homotópica $\rho : K \to L$. Dado que

$$P_q \xrightarrow{\simeq} K \xrightarrow{\rho} L \xrightarrow{\simeq} \Omega P_{q+1},$$

componemos las equivalencias homotópicas para obtener $\rho_q : P_q \xrightarrow{\simeq} \Omega P_{q+1}$.

Teorema 1.69. *Sea k^q una teoría de cohomología reducida definida en complejos CW que satisface el axioma de la cuña. Entonces existe un Ω-preespectro $\{P_q\}$ y una equivalencia natural*

$$[?, (P_q, *)] \to k^q.$$

También un Ω-preespectro define una teoría de cohomología. Todo se satisface de forma más o menos obvia excepto que $[?, (P_q,*)]$ es un grupo abeliano.

Definición 1.70. *Sea (Y, y_0) un espacio basado. Decimos que $[?, (Y, y_0)]$ tiene una estructura natural de grupo se cumple lo siguiente.*

1. *Para cada espacio basado* (X, x_0)*, el conjunto* $[(X, x_0), (Y, y_0)]$ *es un grupo cuyo neutro es la función constante en* y_0.
2. *Si* $f : (X, x_0) \to (X', x')$ *es una función continua entonces*

$$f^* : [(X, x_0), (Y, y_0)] \to [(X, x_0), (Y, y_0)]$$

dada por $f^*[\phi] = [\phi \circ f]$ *es un homomomorfismo.*

Consideremos al espacio $(Y \times Y, (y_0, y_0))$. Por hipótesis,

$$[(Y \times Y, (y_0, y_0)), (Y, y_0)]$$

es un grupo. En este grupo están los elementos $[\pi_1]$ y $[\pi_2]$ donde $\pi_1, \pi_2 : Y \times Y \to Y$ son las proyecciones. Podemos formar un producto en este grupo a través de $[\pi_1] \cdot [\pi_2] = [\mu]$, donde $\mu(y_0, y_0) = y_0$.

Definición 1.71. *Un H-espacio* (Y, y_0) *es un espacio basado con un producto* $\mu : (Y, y_0) \times (Y, y_0) \to (Y, y_0)$ *tal que el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "y\times \mathrm{id}"] \arrow[dr, equal] & Y \times Y \arrow[d, "\mu"] & Y \arrow[l, "\mathrm{id}\times y"'] \arrow[dl, equal] \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Decimos que Y es H-asociativo si el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
Y \times Y \times Y \arrow[r, "\mu\times \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times\mu"'] & Y \times Y \arrow[d, "\mu"] \\
Y \times Y \arrow[r, "\mu"'] & Y.
\end{tikzcd}$$

Decimos que Y tiene H-inversos si existe una función $j : Y \to Y$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\mathrm{id}\times j"] \arrow[dr, "\mathrm{cte}_{y_0}"'] & Y \times Y \arrow[d, "\mu"] & Y \arrow[l, "j\times \mathrm{id}"'] \arrow[dl, "\mathrm{cte}_{y_0}"] \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Ejemplo 1.72. Si (Y, y_0) es un grupo topológico (como $F(S^n; G)$), también es un H-grupo.

Proposición 1.73. *Sea* (X, x_0) *un espacio basado. Entonces* $(\Omega X, \mathrm{cte}_{x_0})$ *es un H-grupo, con la topología compacto-abierto.*

Demostración. Definimos el producto en ΩX como sigue

$$\mu(\alpha,\beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \beta(2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

La función cte_{x_0} es el elemetro neutro salvo homotopía, pues tenemos la homotopía $F : \Omega X \times I \to \Omega X$ dada por

$$F(\beta,s)(t) = \begin{cases} \beta\left(\frac{2t}{1+s}\right), & 0 \leq t \leq \frac{1+s}{2}, \\ x_0, & \frac{1+s}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

donde s es el parámetro de la homotopía.

Si definimos $j : \Omega X \to \Omega X$ dado por $j(\alpha)(t) = \alpha(1-t)$ y

$$H(\alpha,s)(t) = \begin{cases} \alpha(2(1-s)t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \alpha(2(1-s)(1-t)), & 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

tenemos tenemos que j nos da los inversos salvo homotopía. Sólo falta demostrar la asociatividad salvo homotopía. Para tal efecto definimos

$$G(\alpha,\beta,\gamma,s)(t) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{1+t}{1+s}\right), & 0 \leq t \leq \frac{1+s}{4}, \\ \beta(4t-1-s), & \frac{1+s}{4} \leq t \leq \frac{2+s}{4}, \\ \gamma\left(\frac{4t-2-s}{2-s}\right), & \frac{2+s}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

que es una homotopía que empieza en $(\alpha * \beta) * \gamma$ y termina en $\alpha * (\beta * \gamma)$. □

Sea $\{(P_n, *)\}$ un Ω-preespectro con

$$\epsilon_n : P_n \xrightarrow{\simeq} \Omega P_n.$$

Definimos ahora una teoría de cohomología de complejos CW basados

$$P^q(X,x_0) = [(X,x_0),(P_q,*)] \xrightarrow{\epsilon_q^*} [(X,x_0),(\Omega P_{q+1},*)].$$

Por lo anterior, $[(X,x_0),(\Omega P_{q+1},*)]$ es un grupo. En consecuencia, también lo es $P^q(X,x_0)$. Sin embargo, no sabemos que este grupo sea abeliano.

Consideremos

$$\Omega P_{q+1} \xrightarrow[\simeq]{\Omega\epsilon_{q+1}} \Omega\Omega P_{q+2} \cong \Omega^2 P_{q+2}$$

y

$$\begin{tikzcd} & {[(X,x_0),(P_q,*)]} \arrow[r, "\epsilon_{q+1}", "\cong"'] & {[(X,x_0),(\Omega P_{q+1},*)]} \arrow[d, "\cong"] \\ {[(SX,x_0),(\Omega P_{q+2},*)]} \arrow[rr, leftrightarrow] & & {[(X,x_0),(\Omega\Omega P_{q+2},*)].} \end{tikzcd}$$

Sea (Z,z_0) un espacio fijo. Queremos ver que $[(Z,z_0),?]$ tiene una estructura natural de grupo, es decir:

1. el conjunto $[(Z,z_0),(X,x_0)]$ es un grupo para todo (X,x_0), donde el neutro es la función constante con valor x_0;
2. si $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ es continua, la función inducida
$$\begin{aligned} f_{\#}:[(Z,z_0),(X,x_0)] &\to [(Z,z_0),(Y,y_0)] \\ \phi &\mapsto [f^{\#}\phi] \end{aligned}$$
es un homeomorfismo.

Definición 1.74. *Sea $(Q,*)$ un espacio basado. Decimos que Q es un H-coespacio si existe una función continua $\nu:Q\to Q\vee Q$ tal que los diagramas*

$$\begin{tikzcd} Q & Q\vee Q \arrow[l, "y\vee\mathrm{id}"'] \arrow[r, "\mathrm{id}\vee y"] & Q \\ & Q \arrow[ul, equal] \arrow[u, "\nu"] \arrow[ur, equal] & \end{tikzcd}$$

Decimos que Q es H-coasociativo si el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} Q\vee Q\vee Q & Q\vee Q \arrow[l, "\nu\vee\mathrm{id}"'] \\ Q\vee Q \arrow[u, "\mathrm{id}\vee\nu"] & Q. \arrow[l, "\nu"] \arrow[u, "\nu"'] \end{tikzcd}$$

Decimos que Y tiene H-inversos si existe una función $j:Q\to Q$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} Q & Q\times Q \arrow[l, "\mathrm{id}\vee j"'] \arrow[r, "j\vee\mathrm{id}"] & Q \\ & Q \arrow[ul, "\mathrm{cte}_{y_0}"] \arrow[u, "\nu"] \arrow[ur, "\mathrm{cte}_{y_0}"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Ahora podemos demostrar el aserto sobre la estructura natural de grupo. Si (Z,z_0) es un H-cogrupo damos estructura de grupo a $[(Z,z_0),(X,x_0)]$ como sigue. Si $[f],[g]\in[(Z,z_0),(X,x_0)]$, definimos $[f]\cdot[g]=[(f\vee g)\circ\nu]$.

También, si $[(Z,z_0),(X,x_0)]$ tiene estructura de grupo para todo X, en particular
$$[i_1],[i_2]\in[(Z,z_0),(Z,z_0)\vee(Z,z_0)]$$
donde $i_k:(Z,z_0)\to(Z,z_0)\vee(Z,z_0)$ son las inclusiones de espacios. Así, podemos definir $\nu=[i_1]\cdot[i_2]$.

Ejemplo 1.75. El espacio $(SX,*)$ es un H-cogrupo, donde
$$\nu([x,t])=\begin{cases}([x,2t],\overline{x_0}), & 0\le t\le 1/2,\\ (\overline{x_0},[x,2t-1]), & 1/2\le t\le 1.\end{cases}$$

Proposición 1.76. *Sea S un conjunto con dos operaciones $*$ y $\bullet$ tales que*

1. *tienen un neutro bilateral común,*
2. *se distribuyen mutuamente (es decir, $(w * x) \bullet (y * z) = (x \bullet y) * (x \bullet z)$.*

Entonces $* = \bullet$ y ambas operaciones son conmutativas y asociativas.

Demostración. Sean $w, x, y, z \in S$ y sea $e \in S$ el elemento neutro. Primero

$$x * y = (x \bullet e) * (e \bullet y) = (x * e) \bullet (e * y) = x \bullet y,$$

lo que demuestra que los productos coinciden. Segundo,

$$x * y = (e \bullet x) * (y \bullet e) = (e * y) \bullet (x * e) = y \bullet x = y * x,$$

esto es, ambos productos son conmutativos. Por último,

$$x * (y * z) = (x \bullet e) * (y \bullet z) = (x * y) \bullet (e * z) = (x * y) \bullet z = (x * y) * z,$$

como deseábamos. □

Ejemplo 1.77. El grupo $\pi_n(Y, y_0)$ es abeliano si $n > 1$, pues

$$\pi_n(Y, y_0) = [(S^n, *), (Y, y_0)] = [(SS^{n-2}, *), (\Omega Y, y_0)],$$

y sabemos que esto último tiene dos estructuras de grupo: una dada por SS^{n-2} y otra por ΩY. Por el Ejercicio 1.22, se satisfacen las hipótesis de la proposición y por ello es un grupo conmutativo.

Teorema 1.78. *Es equivalente tener una teoría de cohomología reducida y aditiva que tener un Ω-preespectro.*

Proposición 1.79. *Se satisface*

$$\tilde{\mathbb{H}}^q(S^n; G) \cong \begin{cases} G, & q = n, \\ 0, & q \neq n. \end{cases}$$

Demostración. Tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{H}^q(S^n; G) &= [(S^n, *), (F(S^q, G), \theta)] \\ &= \pi_n(F(S^n; G), \theta) \\ &= \begin{cases} G, & q = n \\ 0, & q \neq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

como se pedía. □

En el caso de la homología reducida definida en la categoría de complejos CW también hay una equivalencia con pre-espectros. Dado un pre-espectro $\{P_n\}$, definimos una teoría de homología reducida P_* como sigue

$$P_q(X, x_0) = \text{colím}_\ell \pi_{q+\ell}(P_\ell \wedge X),$$

donde $X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y$, donde los homomorfismos estan dados por

$$\begin{tikzcd} \pi_{q+\ell}(P_\ell \wedge X) \arrow[r, dashed] \arrow[dr, "(\epsilon_\ell \wedge \mathrm{id}_X)_*"'] & \pi_{q+\ell+1}(P_{\ell+1} \wedge X) \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] \\ & \pi_{q+\ell}(\Omega(P_{\ell+q+1} X)) \end{tikzcd}$$

donde

$$P_\ell \xrightarrow{\epsilon_\ell} \Omega P_{\ell+1} \quad \text{y} \quad P_\ell \wedge X \xrightarrow{\epsilon_\ell \wedge \mathrm{id}_X} \Omega P_{\ell+1} \wedge X.$$

Una teoría de cohomología se puede definir incluso si P no es un pre-espectro. Definimos la teoría P^* como

$$P^q(X, x_0) = [(X, x_0), \text{colím}_r \Omega^r P_{q+r}]$$

donde P_q es una familia de complejos CW con inclusiones

$$\Omega^r P_{q+r} \xrightarrow{\Omega^r \epsilon_{q+r}} \Omega^{r+1} P_{q+r+1}.$$

Ejercicios

1.1. Demostrar que si $p : Y \to X$ es una aplicación cubriente y $x_0 \in X$, entonces $\pi_1(X, x_0)$ actúa sobre $p^{-1}(x_0)$. Determinar el subgrupo de isotropía de $y_0 \in p^{-1}(x_0)$.

1.2. Sea $p : Y \to X$ una aplicación cubriente. Demostrar que para $q \geq 2$, el homomorfismo $\pi_q(Y, y_0) \xrightarrow{p_\#} \pi_q(X, p(y_0))$ es un isomorfismo.

1.3. Demostrar que existe una biyección

$$C((I, \partial I), (Z, z_0)) \leftrightarrow C((I/\partial I, *), (Z, z_0)).$$

1.4. Sea Z un espacio localmente compacto y Hausdorff. Consideremos a la función evaluación

$$\begin{aligned} \text{ev} : C(Z, X) \times Z &\to X, \\ (f, x) &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

donde $C(Z, X)$ está dotado con la topología compacto-abierta. Demostrar que ev es continua.

1.5. Verificar que los diagramas (1.1) y (1.2) conmutan.

1.6. Verificar que $SX \cong X \vee S^1$.

1.7. Mostrar que $\Omega^n(X, x_0) \cong C((S^n, *), (X, x_0))$.

1.8. Dar una expresión explícita de σ en la Proposición 1.26.

1.9. Demostrar que existe un isomorfismo

$$\sigma : \tilde{\mathbb{H}}^q(X;G) \xrightarrow{\cong} \tilde{\mathbb{H}}^{q+1}(SX;G)$$

y que es natural, esto es, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathbb{H}}^q(X;G) \arrow[r, "\sigma_X"] & \tilde{\mathbb{H}}^{q+1}(SX;G) \\ \tilde{\mathbb{H}}^q(Y;G) \arrow[u, "f^*"] \arrow[r, "\sigma_Y"'] & \tilde{\mathbb{H}}^{q+1}(SY;G). \arrow[u, "(Sf)^*"'] \end{tikzcd}$$

conmuta.

1.10. Demostrar que $j : (X, x_0) \to (\tilde{\mathrm{Cil}}(f), *)$ es una cofibración basada y que $(\tilde{\mathrm{Cil}}(f), *) \simeq (Y, y_0)$.

1.11. Verificar que $\overline{f}$ y $\overline{j}$ del Lema 1.50 definen un homeomorfismo entre $X \cup CA/CA$ y X/A.

1.12. Ver que q y s de la Proposición 1.51 son inversos homotópicos de parejas.

1.13. Demostrar que $[(\bigvee_\alpha X_\alpha, *), (Y, y_0)] \cong \prod_\alpha [(X_\alpha, x_\alpha), (Y, y_0)]$ es una biyección.

1.14. Concluir la demostración del Lema 1.61.

1.15. Considerando la transformación natural inversa de T, concluir la demostración de la Proposición 1.64

1.16. Verificar que el diagrama

$$\begin{tikzcd} k^{n+1+i}(K_{n+1}) \arrow[r, "\hat{\rho}_n^{\#}"] \arrow[d, leftrightarrow] & k^{n+1+i}(SK_n) \arrow[d, leftrightarrow] \\ \{k^{n+1} \Rightarrow k^{n+1+i}\} \arrow[r] & \{k^n \Rightarrow k^{n+i}\} \end{tikzcd}$$

conmuta.

1.17. La familia $\{\theta_n^i\}$ es una operación estable si, y sólo si, $\hat{\theta}_{n+1}^i = \theta_n^i$.

1.18. Sea X un espacio basado. Demostrar que SX es conectable por trayectorias.

1.19. Demostrar que la biyección $\{k^n \Rightarrow k^{n+i}\} \leftrightarrow k^{n+i}(K_n)$ es un isomorfismo de grupos.

1.20. Sea (Y, y_0) un espacio basado. Entonces $[?, (Y, y_0)]$ tiene una estructura natural de grupo si, y sólo si, (Y, y_0) es un H-grupo.

1.21. Demostrar que la función μ definida en la demostración de la Proposición 1.73 es continua.

1.22. Demostrar que si Q es un H-cogrupo y W es un H-grupo, entonces las dos estructuras multiplicativas inducidas en $[(Q, *), (W, *)]$ tienen un neutro bilateral común y se distribuyen mutuamente.

2

Cohomología singular

2.1. Conjuntos Δ

Supongamos que tenemos el complejo simplicial con vértices

$$V_k = \{v_0 < v_1 < v_2\}$$

y aristas

$$K = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0 < v_1\}, \{v_1 < v_2\}, \{v_0 < v_1\}\}.$$

¿Es posible reconstruir a $|K|$ a partir de tres 1-simplejos y tres 2-simplejos? Definimos

$$\mathcal{S}_n(K) = \{(v_0, \ldots, v_n) : \{v_0, \ldots, v_n) \subseteq K, v_0 < \cdots < v_n\}$$

y la función

$$\begin{gathered} d_n^i : \mathcal{S}_n(K) \to \mathcal{S}_{n-1}(K), \\ (v_0 < \cdots < v_n) \mapsto (v_0 < \cdots < \hat{v}_i < \cdots < v_n) \end{gathered}$$

para $0 \leq i \leq n$. Al complejo simplicial K le vamos a asociar tal familia de funciones, que se denomina conjunto Δ, y lo denotamos como

$$\mathcal{S}(K) := \{\mathcal{S}_k(K)_{n \geq 0}\}.$$

A un conjunto Δ, a su vez, se le puede asociar un espacio topológico, que denotaremos como $|\mathcal{S}(K)|$, y es el siguiente:

$$|\mathcal{S}(K)| = \coprod_{n \geq 0} (\mathcal{S}_n(K) \times \Delta^n) / \sim$$

donde $\sim$ es la relación de equivalencia generada por

$$\mathcal{S}_n(K) \times \Delta^n \ni (S, F_n^i(t)) \sim (d_n^i(S), t) \in \mathcal{S}_{n-1}(K) \times \Delta^{n-1}.$$

Ejemplo 2.1. Para el triángulo, tenemos que

$$\mathcal{S}_0(K) = \{v_0, v_1, v_2\}, \quad \mathcal{S}_1(K) = \{(v_0 < v_1), (v_1 < v_2), (v_0 < v_2)\},$$

además,

$$\begin{aligned} d^0(v_0 < v_1) &= v_1, \quad d^0(v_1 < v_2) = v_0, \quad d^0(v_0 < v_2) = v_2, \\ d^1(v_0 < v_1) &= v_0, \quad d^1(v_1 < v_2) = v_1, \quad d^1(v_0 < v_2) = v_0, \end{aligned}$$

y

$$F_1^0(1) = (0,1) = e_2, \quad F_1^1(1) = (1,0) = e_1.$$

Así,

$$|\mathcal{S}(K)| = \{(v_0,1), (v_1,1), (v_2,1), (v_0v_1, \Delta^1), (v_1v_2, \Delta^1), (v_0v_2, \Delta^1)\}/\sim$$

de modo que

$$\begin{aligned} (v_0v_1, e_2) \sim (v_1, 1) \sim (v_1v_2, e_1), \\ (v_1v_2, e_2) \sim (v_2, 1) \sim (v_0v_2, e_2), \\ (v_0v_2, e_1) \sim (v_0, 1) \sim (v_0v_1, e_1). \end{aligned}$$

Las identificaciones anteriores indican que los "simplejos" (v_0v_1, Δ^1) y (v_1v_2, Δ^1) se "pegan" en el "vértice" $(v_1, 1)$, etcétera.

Escolio 2.2. La isometría que identifica a Δ^n con $|\mathcal{S}(K)|$ no es única, ya que para definirla se numeran los vértices.

Definición 2.3. *Un complejo simplicial arbitrario K está ordenado si existe un orden parcial en sus vértices de modo que cada simplejo está totalmente ordenado.*

Ejemplo 2.4. Si K es un complejo simplicial arbitrario, la subdivisión baricéntrica $\mathrm{sd}\,(K)$ es un complejo ordenado. Su orden parcial es la inclusión, pues un q-simplejo de $\mathrm{sd}\,(K)$ es $\{S_0 \subseteq S_1 \subseteq \cdots \subseteq S_q\}$.

Teorema 2.5. *Si K es un complejo simplicial ordenado, entonces $|\mathcal{S}(K)| \simeq K$.*

Dado un complejo simplicial arbitrario K y $S \in K$, tenemos el conjunto $\langle S \rangle := \{\alpha \in |K| : \alpha^{-1}(0,1] = S\}$. Estos subconjuntos de $|K|$ tienen las siguientes propiedades.

1. Si $\langle S \rangle \cap \langle S' \rangle \neq \emptyset$, entonces $S = S'$.
2. Se satisface $|K| = \bigcup_{S \in K} \langle S \rangle$. En efecto, dado $\alpha \in |K|$, entonces $\alpha^{-1}(0,1] \in K$, luego existe $S \in K$ tal que $\alpha^{-1}(0,1] = S$, por lo que $\alpha \in \langle S \rangle$.
3. Si $S = \{v_0, \ldots, v_n\}$, entonces existe una isometría $|S| \to \Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, dada por
$$(t_0, \ldots, t_n) \mapsto \alpha_{(t_0, \ldots, t_n)}.$$

Vamos a describir el conjunto Δ, $\{\mathcal{S}_q(K), d^i\}$, de manera más conveniente. Cada $S \in \mathcal{S}_n(K)$ es de la forma $S = \{v_0 < v_1 < \cdots < v_n\}$, lo que nos da un homeomorfismo canónico $\phi_S : \Delta^n \to |S|$ dado por $\phi_S(t_0, \ldots, t_n)(U_i) = t_i$. Así, $\mathcal{S}_n(K) \leftrightarrow \{\phi_s : \Delta^n \to |K|\}$.

Lema 2.6. *El siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{S}_n(K) & \xrightarrow{\cong} & \{\phi_S : \Delta^n \to |K| : S \textit{ es un simplejo de } K\} \\
{\scriptstyle d^i}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle F_n^i} \\
\mathcal{S}_{n-1}(K) & \xrightarrow{\cong} & \{\phi_{S'} : \Delta^{n-1} \to |K| : S' \textit{ es un simplejo de } K\},
\end{array}$$

donde $F_n^i(\phi) = \phi_S \circ F_n^i$.

Demostración. Sea $S = (v_0 < \cdots < v_n) \in \mathcal{S}_n(K)$. Entonces

$$d^i(S) = \{v_0 < \cdots < \hat{v}_i < \cdots < v_n) \in \mathcal{S}_{n-1}(K)$$

y

$$\phi_{d^i(S)}(\tau_0, \ldots, \tau_{n-1})(v_\ell) = \begin{cases} \tau_\ell, & \ell \neq i, \\ 0, & \ell = i. \end{cases}$$

La otra composición es

$$s \mapsto \phi_S(t_0, \ldots, t_n)(v_i) = t_i,$$

aplicando F_{n-1}^i nos da la composición

$$\Delta^{n-1} \xrightarrow{F_n^i} \Delta^n \xrightarrow{\phi_S} |K|$$

que es

$$(\tau_0, \ldots, \tau_n) \mapsto (\tau_0, \ldots, 0, \ldots, \tau_{n-1}) \mapsto \phi_S(\tau_0, \ldots, 0, \ldots, \tau_n)(v_\ell) = \begin{cases} \tau_\ell, & \ell \neq i, \\ 0, & \ell = i. \end{cases}$$

comprobándose el aserto. □

El símbolo $|\mathcal{S}(K)|$ es $\coprod_{n \geq 0} \mathcal{S}_n(K) \times \Delta^n$ con cierta relación de equivalencia. Definimos $F(\phi_s, t) = \phi_s(t)$. La función F es continua porque $\mathcal{S}_n(K)$ tiene la topología discreta, de manera que $\mathcal{S}_n(K) \times \Delta^n$ tiene la topología de la unión ajena de copias de Δ^n, una por cada n-simplejo S. La F se restringe a funciones $\Delta^n \xrightarrow{\phi_S} |K|$ y pasa al cociente pues

$$(\phi_S, F_n^i(t)) \sim (\phi_S \circ F_n^i, t).$$

Escolio 2.7. El espacio $|K|$ es Hausdorff ya que $|K| \xrightarrow{\mathrm{id}} |K|_d$ es continua.

La función $\overline{F}$ es suprayectiva, ya que F es suprayectiva pues

$$|K| = \bigcup_{S\in K} \langle S\rangle = \bigcup_{S\in K} |S|.$$

La función $\overline{F}$ es inyectiva. En primer lugar, cualquier elemento en

$$\coprod_{n\geq 0} \mathcal{S}_n(K) \times \Delta^n / \sim$$

tiene un representante de la forma (ϕ_S, t) donde $t \in \overset{\circ}{\Delta^n}$. Supongamos que $\overline{F}[\phi_S, t] = \overline{F}[\phi_{S'}, t']$. Por lo anterior, podemos tomar un representante en cada clase, de manera que t y t' estén en el interior. Así

$$\overline{F}[\phi_S, t] = \phi_S(t) = \phi_{S'}(t') = \overline{F}[\phi_{S'}, t'].$$

Vimos que $|K| = \coprod_{S\in K}\langle S\rangle$, luego $\langle S\rangle \cap \langle S'\rangle \neq \emptyset$ y de aquí que $S = S'$. Entonces ϕ_S es biyectiva y $t = t'$.

Veremos que F es una identificación. Sea $C \subseteq |K|$ un subconjunto tal que $F^{-1}(C)$ es cerrado. Queremos ver que C es cerrado. Primeramente, $F^{-1}(C)\cap \{\phi_S\} \times \Delta^n$ es cerrado para toda $S \in K$. Pero

$$\begin{aligned} F^{-1}(C) \cap \{\phi_S\} \times \Delta^n &= \{(\phi_S, t) : t \in \Delta^n, F(\phi_S, t) \\ &= \phi_S(t) \in S\} \\ &= \phi_S^{-1}(C) \\ &= \phi_S^{-1}(C \cap |S|), \end{aligned}$$

y dado que ϕ_S es una función entre Δ^n y $|K|$, entonces ϕ_S es continua. Además $C \cap |S| = \phi_S \circ \phi_S^{-1}(C \cap |S|)$, luego $C \cap |S|$ es cerrado.

Escolio 2.8. Sea K un complejo simplicial y $S \in K$. Afirmamos que $\phi_S(\Delta^n) = |S| = \bigcup_{\tau\subseteq S}\langle S\rangle$. En efecto, si $\alpha \in |S|$, entonces $\alpha^{-1}(0, 1] \subseteq S \in K$. Poniendo $\alpha^{-1}(0, 1] = \tau$, entonces $\alpha \in \langle\tau\rangle$, donde $\tau \subseteq S$. Es dcir, $\phi_S(\Delta^n)$ solamente intersecta a un número finito de $\langle\tau\rangle$, con $\tau \in K$ (es la propiedad de cerradura finita).

Definición 2.9. *Un poliedro celular X es un espacio de Hausdorff con una familia de índices c_n, con $n \geq 0$ y funciones $\phi^n_\alpha : D^n \to X$, $n \geq 0$, $\alpha \in C_n$ tales que*

1. *Se cumple que $X = \bigcup \phi^n_\alpha(D^n)$, con $D^n \subseteq \mathbb{R}^n$.*
2. *Se satisface $\phi^n_\alpha(\overset{\circ}{D^n}) \cap \phi^m_\beta((\overset{\circ}{D^m}) = \emptyset$ a menos que $n = m$ y $\alpha = \beta$.*
3. *Sea $X^n = \bigcup \phi^i_\alpha(\overset{\circ}{D^i})$, $0 \leq i \leq n$, $\alpha \in C$. Entonces $\phi^n_\alpha(S^{n-1}) \subseteq X^{n-1}$ (a X^n se le llama el n-esqueleto).*
4. *El subconjunto $C \subseteq X$ es cerrado si, y sólo si, $C \cap \phi^n_\alpha(D^n$ es cerrado en $\phi^n_\alpha(D^n)$ para todo n en α_i.*

5. *Para cada $m \geq 0$ y $\alpha \in C_n$, $\phi^n_\alpha(D^n)$ está contenido en la unión finita de subconjuntos de la forma $\phi^n_\beta(\mathring{D}^m)$.*

Dado un complejo simplicial K, $|K|$ es un poliedro celular.

Proposición 2.10. *Un complejo celular CW es equivalente a un poliedro celular.*

A un complejo simplicial ordenado K, le asociamos un conjunto Δ, $\{\mathcal{S}_n(K), d^i\}$, de manera que $|\mathcal{S}_*(K)| \cong |K|$. Como $\{\mathcal{S}_n(K), d^i\}$ contiene al información para construir el espacio $|K|$, vamos a asociarle invariantes algebraicos al conjunto Δ.

Sea G un grupo abeliano. Consideremos al grupo $S^n(K;G)$ de todas las funciones de $\mathcal{S}_n(K)$ en G. Definimos los homomorfismos $d^{i*} : S^n(K;G) \to S^{n+1}(K;G)$ dados por $d^{i*}(\phi) = \phi \circ d^i$.

A continuación definimos un homomorfismo $\delta^n : S^n(K;G) \to S^{n+1}(K;G)$ como $\delta^n = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i d^{i*}$.

Definición 2.11. *A una familia de grupos abelianos $\{A_n\}$ y homomorfismos $\delta^n : A_n \to A_{n+1}$ tales que $\delta^n \circ \delta^{n+1} = 0$ se le llama simplejo de cocadenas.*

Escolio 2.12. Si $G = R$ es un anillo conmutativo, entonces $S^n(K;R)$ son R-módulos.

Definición 2.13. *Escribimos como $H^n(K;G) = \text{núc}\,\delta^n/\text{Im}\,\delta^{n-1}$ a la n-cohomología simplicial de K con coeficientes en G. A los elementos del núcleo $\text{núc}\,\delta^n$ se les llama n-cociclos y a los elementos de $\text{Im}\,\delta^{n-1}$ se les llama n-cofronteras.*

2.2. Otra descripción de $S^n(K;G)$

Consideremos $S_n(K,\mathbb{Z})$ que es el grupo libre generado por los n-simplejos de K (ordenado). Resulta que

$$S^n(K;G) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_n(K;G), G).$$

El grupo $S_n(K;\mathbb{Z})$ es el grupo libre generado por $\mathcal{S}_n(K)$ con la propiedad universal

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}_n(K) \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\phi"'] & \mathcal{S}_n(K;\mathbb{Z}) \arrow[d, dashed] \\ & G. \end{tikzcd}$$

Escolio 2.14. Lo anterior se puede hacer con un anillo conmutativo R en vez de $\mathbb{Z}$ y un R-módulo M en lugar de G.

Sea K un complejo simplicial arbitrario. Vamos a asociarle a K una familia de conjuntos $\check{\mathcal{S}}(K;G)_n$

$$\check{\mathcal{S}}_n(K) = \{(v_0, \dots, v_n) : \{v_0, \dots, v_n\} \in K\}.$$

Definimos

$$\begin{gathered} d^i : \check{\mathcal{S}}_n(K) \to \check{\mathcal{S}}_{n-1}(K), \\ (v_0, \dots, v_i, \dots, v_n) \mapsto (v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n). \end{gathered}$$

Escolio 2.15. Aquí hay otros operadores llamados degenerados, que en vez de disminuir la dimensión, la aumentan:

$$\begin{gathered} s^i : \check{\mathcal{S}}_n(K) \to \check{\mathcal{S}}_{n+1}(K), \\ (v_0, \dots, v_i, \dots, v_n) \mapsto (v_0, \dots, v_i, v_i, \dots, v_n). \end{gathered}$$

A esta familia de conjuntos y funciones (caras y operadores degenerados), es un ejemplo de conjunto simplicial.

Definimos $\|\check{\mathcal{S}}_*(K)\| = \coprod_{n\geq 0} \check{\mathcal{S}}(K) \times \Delta^n / \sim$, donde $\sim$ está generada por $(\sigma, F_n^i(t)) \sim (d^i(\sigma), t)$. Dadas todas estas analogías, uno pensaría que existe un homeomorfismo entre lo recién definido y su realización geométrica. No es así, pero hay algo esencialmente igual de bueno (al menos, para nuestros fines).

Proposición 2.16. *Se cumple que* $\|\check{\mathcal{S}}\| \simeq |K|$.

Definimos $H^n(K;G) \cong \operatorname{núc} \delta^n / \operatorname{Im} \delta^{n-1}$, donde δ se define en términos de d como en el caso anterior. Si X un espacio arbitrario, queremos definir $H^*(X;G)$. Para tal efecto, le asociamos a X un complejo simplicial y usamos la cohomología que acabamos de definir.

Definición 2.17. *Sea* $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *una cubierta abierta de* X*. Definimos un complejo simplicial* $N\mathcal{U}$*, llamado nervio de la cubierta, cuyos vértices son* $V_{N\mathcal{U}} = \Lambda$ *y* $N\mathcal{U}_q = \{\{\alpha_0, \dots, \alpha_q\} : \bigcap_{i=0}^q U_{\alpha_i} \neq \emptyset\}$.

Como $N\mathcal{U}$ es un complejo simplicial, podemos definir a $H^*(N\mathcal{U};G)$ usando

$$\mathcal{S}(N\mathcal{U})_n = \left\{ (U_{\alpha_0}, \dots, U_{\alpha_n}) : \bigcap_{k=0}^n U_{\alpha_k} \neq \emptyset \right\},$$

pues $S^n(N\mathcal{U};G) = [\check{\mathcal{S}}(N\mathcal{U})_n, G] \ni \phi$ asocia a cada colección $(U_{\alpha_0}, \dots, U_{\alpha_n})$ de abiertos de la cubierta con interseccin no vacía un elemento de G.

La cohomología de Čech de X se obtiene tomando las cohomologías de los nervios de “todas” las cubiertas abiertas y después considerando el límite directo donde las cubiertas están ordenadas por refinamiento.

Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ abiertas de X. Diremos que $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ si para cada $v \in \mathcal{V}$ existe $U \in \mathcal{V}$ tal que $V \subseteq U$. Esto es, V es un refinamiento de U. Esto define una función $f : V \to U$ dada por $V \mapsto f(V)$ tal que $V \subseteq f(V)$. Tal función no es única, pero induce otra función $N\mathcal{V} \xrightarrow{Nf} N\mathcal{U}$ ya que

$$\{V_0, \ldots, V_n : V_0 \cap \cdots \cap V_n \neq \emptyset\} \mapsto \{f(V_0), \ldots, f(V_n)\} \neq \emptyset$$

pues se satisface

$$\emptyset \neq V_0 \cap \cdots \cap V_n \subseteq f(V_0) \cap \cdots \cap f(V_n).$$

En general, si K y L son complejos simpliciales y $f : K \to L$ es una función simplicial, definimos

$$\check{\mathcal{S}}_n(K) \xrightarrow{\check{\mathcal{S}}(f)} \check{\mathcal{S}}_n(L),$$

ya que f es simplicial.

$$\begin{tikzcd}
S^n(L;G) \arrow[r, "f^\#"] \arrow[d, equal] & S^n(K;G) \arrow[d, equal] \\
{[\check{\mathcal{S}}(L), G]} \arrow[r, "f^\#"'] & {[\check{\mathcal{S}}_n(K), G],}
\end{tikzcd}$$

donde $f^\#(\phi) = \phi \circ \check{\mathcal{S}}(f)$.

Por el Ejercicio 2.6, $f^\#$ induce el morfismo $f^* : H^n(L;G) \to H^*(K;G)$. Así, $Nf : N\mathcal{V} \to N\mathcal{U}$ induce $f^* : H^*(N\mathcal{U};G) \to H^*(N\mathcal{V};G)$. Se puede demostrar que si se toma otra función $f' : V \to U$ que satisface lo mismo que f, entonces $f^\#$ y $f'^\#$ son homotopías de cadenas, luego $f^* = f'^*$.

La idea ahora es tomar colím$H^*(N\mathcal{U};G)$ usando la relación de refinamiento y los homomorfismos $f^* : H^*(N\mathcal{U};G) \to H^*(N\mathcal{V};G)$. El problema es que todas las cubiertas de X no es un conjunto.

La solución es tomar una familia de cubiertas que sí formen un conjunto. Las cubiertas a considerar deben:

- satisfacer que $\mathcal{U}_X = \{U_x\}_{x \in X}$;
- cumplir que $x \in U_x$.

La relación de orden en el conjunto de cubiertas es $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ si $V_x \subseteq U_x$ para todo $x \in X$. Entonces $N\mathcal{V} \subseteq N\mathcal{U}$ es un subcomplejo, y tenemos un homomorfismo $i^\# : S^n(N\mathcal{U};G) \to S^n(N\mathcal{V};G)$. Definimos

$$\check{\mathcal{S}}(X;G) := \text{colím}_{\mathcal{U}} S^n(N\mathcal{U};G),$$

donde $\mathcal{U}$ es la familia de cubiertas adecuadas. Esto es un complejo de cocadenas ya que

$$\begin{tikzcd}
\check{\mathcal{S}}^n(X;G) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\delta^n"'] & \text{colím}_{\mathcal{U}} S^n(N\mathcal{U};G) \arrow[d, "\text{colím}_{\mathcal{U}} \delta_{\mathcal{U}}"] \\
\check{\mathcal{S}}^{n+1}(X;G) \arrow[r, equal] & \text{colím}_{\mathcal{U}} S^{n+1}(N\mathcal{U};G)
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Definición 2.18. *Hacemos* $\check{H}^n(X;G) = H^*(\check{\mathcal{S}}^*(X;G),\delta^*)$.

Alternativamente, la cohomología de Čech se puede definir tomando primero la cohomología de cada nervio, esto es

$$\operatorname{colím}_{\mathcal{U}} H^q(N\mathcal{U};G) = \check{H}^q(K;G).$$

Proposición 2.19. *Se satisface*

$$\check{H}^0(X;G) \cong C(X,G).$$

Demostración. Por la segunda definición de cohomología de Čech,

$$\check{H}^0(X;G) = \operatorname{colím}_{\mathcal{U}} H^0(N\mathcal{U};G).$$

Tenemos que

$$0 \to S^0(N\mathcal{U}) \xrightarrow{\delta^0} S^1(N\mathcal{U}) \to \cdots$$

y $H^0(N\mathcal{U};G) = \operatorname{núc}\delta^0/\operatorname{Im}\delta^1 = \operatorname{núc}\delta^0$. También

$$\delta^0 = \sum_{i=0}^{1} d^{i*} = d^{0*} - d^{1*},$$

y $d^{i*}[\check{\mathcal{S}}_0(N\mathcal{U});G] \to [\check{\mathcal{S}}_1(N\mathcal{U});G]$ y $d^0(U_{x_0},U_{x_1}) = U_{x_1}, d^1(U_{x_0},U_{x_1}) = U_{x_0}$. Sea $\phi \in [\check{\mathcal{S}}_0(N\mathcal{U});G]$. Esto quiere decir que $\phi(U_x) \in G$ (ya que hay una correspondencia entre los abiertos de la cubierta y X). Supongamos que $\delta^0(\phi) = d^{0*}(\phi) - d^{1*}(\phi) = 0$. Puesto que $d^{i*}(\phi)(U_{x_0},U_{x_1}) = \phi \circ d^i(U_{x_0},U_{x_1})$, entonces $d^{0*}(\phi)(U_{x_0},U_{x_1}) = \phi(U_{x_1}) = d^{1*}(\phi)(U_{x_0},U_{x_1}) = \phi(U_{x_0})$. De aquí que ϕ es cociclo si, y sólo si, $\phi(U_{x_0}) = \phi(U_{x_1})$.

A continuación, consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} H^0(N\mathcal{U};G) \arrow[r] \arrow[dr, dashed, "\rho_{\mathcal{U}}"'] & \operatorname{colím}_{\mathcal{U}} H^0(N\mathcal{U};G) \arrow[d] \\ & C(X;G) \end{tikzcd}$$

donde $\rho_{\mathcal{U}}(\phi) : X \to G$ está definida por $\rho_{\mathcal{U}}(\phi)(x) = \phi(U_x)$, que es continua por ser localmente constante. Sea $U \leq V$, lo que induce $H^0(N\mathcal{U};G) \xrightarrow{i_{\mathcal{U}\mathcal{V}}} H^0(N\mathcal{V};G)$; resulta el diagrama

$$\begin{tikzcd} H^0(N\mathcal{U};G) \arrow[rr, "i_{\mathcal{U}\mathcal{V}}"] \arrow[dr, "\rho_{\mathcal{U}}"'] & & H^0(N\mathcal{V};G) \arrow[dl, "\rho_{\mathcal{V}}"] \\ & C(X;G) & \end{tikzcd}$$

que conmuta dado que

$$\rho_{\mathcal{U}}\phi(x) = \phi(U_x) = i_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(\phi)(U_x) = \rho \circ i_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(\phi).$$

Esto quiere decir que $C(X;G)$ es un cocono sobre H^0. Por la propiedad universal del colímite, existe $\rho : \operatorname{colím}_{\mathcal{U}} H^0(N\mathcal{U};G) \to C(X;G)$. Tal ρ es suprayectiva, pues si $f : X \to G$ es localmente constante entonces para cada x existe W_x tal que $f|_{W_x}$ es constante. Definiendo la cocadena $\psi(W_x) = f(x)$, resulta que $i_W(\psi) = \rho i_W(\psi) = \rho_W(\psi) = f$.

También ρ es inyectiva. Sea $a \in \operatorname{colím}_{\mathcal{U}} H^0(N\mathcal{U};G)$. Existe U tal que $i_U(\phi) = a$. Luego $\rho(a) = \rho i_U(\phi) = \rho_U(\phi)$. Así, si $\rho(a) = 0$, entonces $\rho_U(\phi) = 0$. En particular, $\rho_U(\phi)(U_x) = \phi(U_x) = 0$ para todo U_x. Luego $\phi = 0$ y por eso $a = 0$. □

Teorema 2.20 (Huber). *Si X es paracompacto y G es numerable, entonces*

$$\check{H}^q(X;G) \cong \mathbb{H}^q(X;G) = [X, F(S^q;G)].$$

Escolio 2.21. El teorema aplica, en particular, para el caso de complejos CW, pues son espacios paracompactos.

Tenemos que $\check{\mathcal{S}}(K)$ es un conjunto simplicial que nos dice cómo está construído el espacio $|K|$, ya que $|\check{\mathcal{S}}_*(K)| = |K|$. Haremos algo análogo para un espacio arbitrario X.

Definición 2.22. *Hacemos $\mathcal{S}_q(X) = C(\Delta^q, X)$.*

Ahora definimos $d^i : \mathcal{S}_q(X) \to \mathcal{S}_{q-1}(X)$ a través de $d^i(\sigma) = \sigma' circ F^i_n$ para $0 \leq i \leq n$. También pueden definirse $s^i \mathcal{S}_q(X) \to \mathcal{S}_{q+1}(X) : \sigma \mapsto \sigma \circ s_i$, donde $s_i(t_0, \ldots, t_{q+1}) = (t_0, \ldots, t_i + t_{i+1}, \ldots, t_{q+1})$.

Podemos construir $\|\mathcal{S}_*(X)\| = \coprod_{n\geq 0} \mathcal{S}_n(X) \times \Delta^n / \sim$, donde $\sim$ está generada por $(\sigma, F^i_n(t)) \sim (d^i\sigma, t)$. Resulta el diagrama

$$\begin{tikzcd} \coprod \mathcal{S}_n(X) \times \Delta^n \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & X \\ \|\mathcal{S}(X)\| \arrow[ur, "\overline{\rho}"'] & \end{tikzcd}$$

donde $\rho(\sigma, t) = \sigma(t)$.

Proposición 2.23. *El morfismo $\overline{\rho} : \|\mathcal{S}(X)\| \to X$ es una equivalencia homotópica débil.*

Escolio 2.24. Se puede definir $|\mathcal{S}_*(X)| = \coprod_{n\geq 0} \mathcal{S}_n(X) \times \Delta^n / \approx$, donde $\approx$ está generada por $(\sigma, F^i_q(t)) \approx (d^i\sigma, t)$ y $(\sigma, s_i(t)) \approx (s_i\sigma, t)$. Se puede demostrar que $\|\mathcal{S}(X)\| \simeq |\mathcal{S}(X)|$ y que $\|\mathcal{S}(X)\|$ es un complejo CW con una celda para cada elemento en $\mathcal{S}_n(X)$. El espacio $|\mathcal{S}(X)|$ también es un complejo CW, pero sus celdas están determinadas de otra manera. Decimos que $\sigma \in \mathcal{S}_q(X)$ es degenerado si existe $\sigma' \in \mathcal{S}_{q-1}(X)$ tal que $\sigma = s^i(\sigma')$ para algún i, y no degenerado en otro caso. Milnor demostró que $|\mathcal{S}(X)|$ tiene una n-celda por cada n-simplejo no degenerado.

Ejemplo 2.25. El espacio $\|\mathcal{S}(*)\|$ es un complejo CW con una celda de cada dimensión. Por otro lado $|\mathcal{S}(*)|$ es un punto, pues $\mathcal{S}_0(*) = \{\Delta^0 \to \{*\}\} \to \mathcal{S}_q(*) = \{\Delta^q \to \{*\}\}$.

Las construcciones $\|\cdot\|$ y $|\cdot|$ son funtoriales. Si tenemos $X \xrightarrow{f} Y$, se induce $\mathcal{S}f : \mathcal{S}X \to \mathcal{S}Y$, y por eso $|\mathcal{S}X| \xrightarrow{|\mathcal{S}f|} |\mathcal{S}Y|$, donde $\mathcal{S}(f)(\sigma) = f \circ \sigma$ y $|\mathcal{S}f|[\sigma, t] = [\mathcal{S}f(\sigma), t]$.

Si queremos que la cohomología homotópica coincida con la cohomología singular, al aplicarla a un espacio arbitrario X, definimos

$$\mathcal{H}^q(X; G) = [|\mathcal{S}(X)|, F(S^q; G)].$$

Si X es un complejo CW, la definición coincide con la anterior pues $|\mathcal{S}X| \xrightarrow{\overline{\rho}} X$ es una equivalencia homotópica débil y por el teorema de Whitehead $\overline{\rho}$ es una equivalencia hotópica.

En lo que sigue, trabajaremos con $G = R$, donde R es una anillo, a menos que se especifique lo contrario.

Proposición 2.26. *Se satisface*

$$H^q(*; R) = \begin{cases} R, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0. \end{cases}$$

Demostración. Tenemos que $S_q(*)$ es un R-módulo libre generado por $\sigma_q : \Delta^q \to \{*\}$. Además,

$$\partial_q \sigma_q = \sum (-1)^i \sigma_{q-1} = \begin{cases} \sigma_q, & q \text{ mód } 2 = 0, q > 0, \\ 0, & q \text{ mód } 2 = 1. \end{cases}$$

Como $\delta^q = \partial^*_{q+1}$, entonces

$$\delta^q(\sigma^*_q) = \begin{cases} 0, & q \text{ mód } 2 = 0, q > 0, \\ \sigma_{q+1}, & q \text{ mód } 2 = 1, \end{cases}$$

donde $\sigma^*_q : S_q(*) \to R : \sigma_q \mapsto 1$. De aquí que

$$Z^q(*) = B^q(*) = \begin{cases} 0, & q \text{ mód } 2 = 1, \\ S^q(*), & q \text{ mód } 2 = 0, \end{cases}$$

luego $H^q(*; R) = 0$ si $q > 0$. Para $q = 0$

$$0 \to \operatorname{Hom}(S_0(*), R) \xrightarrow{\delta^0} \operatorname{Hom}(S_q(*), R) \to \cdots,$$

pero $\delta^0 = \partial^*_1$, luego $\delta^0 = 0$. Por lo tanto $\text{núc}\, \delta = \operatorname{Hom}_R(S_0(*), R) \cong R$. □

Definición 2.27. *Sea $\{(C^*_\alpha, \delta^*_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de complejos de cocadenas. Definimos su producto como $(\prod C^*_\alpha)^q = \prod_\alpha C^q_\alpha$ y*

$$\begin{tikzcd}
(\prod C^*_\alpha)^q \arrow[r, equal] \arrow[d] & \prod_\alpha C^q_\alpha \arrow[d, "\prod_\alpha \delta^q_\alpha"] \\
(\prod C^*_\alpha)^{q+1} \arrow[r, equal] & \prod_\alpha C^{q+1}_\alpha .
\end{tikzcd}$$

Proposición 2.28. *Sea X un espacio topológico y $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ su familia de componentes por trayectorias. Sea $i_\alpha : X_\alpha \hookrightarrow X$ la inclusión de cada componente que induce un homomorfismo $H^*(X;R) \xrightarrow{i^*_\alpha} H^*(X_\alpha;R)$. Entonces estos homomorfismos inducen un isomorfismo*

$$\prod_\alpha i^*_\alpha : H^q(X;R) \xrightarrow{\cong} \prod_\alpha H^q(X_\alpha;R).$$

Demostración. Tenemos que i_α induce el morfismo $S_q(X_\alpha) \xrightarrow{i_{\alpha\#}} S_q(X)$. Por la propiedad universal de la suma existe un homomorfismo

$$\bigoplus S_q(X_\alpha) \to S_q(X)$$

que es de hecho un isomorfismo. Al ser Δ^q conectable por trayectorias σ se factoriza como $\sigma = i_\alpha \circ j_\alpha$, donde $j_\alpha : \Delta^q \to X_\alpha$, lo que implica la suprayectividad. La inyectividad es consecuencia de la de $i_{\alpha\#}$. Además

$$\begin{aligned}
S_q(X) &= \mathrm{Hom}_R(S_q(X), R) \\
&\cong \mathrm{Hom}_R(\bigoplus_\alpha S_q(X_\alpha), R) \\
&\cong \prod_\alpha \mathrm{Hom}_R(S_q(X_\alpha) \\
&\cong \prod_\alpha S^q(X_\alpha),
\end{aligned}$$

de donde

$$H^*(S^*(X);R) \cong H^*\left(\prod_\alpha S^*(X_\alpha);R\right) = \prod H^*(S^*(X_\alpha);R),$$

lo que se quería. □

Proposición 2.29. *Sea X un espacio conectable por trayectorias. Entonces $H^0(X;R) \cong R$.*

Demostración. Consideremos

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(S_0(X), R) \xrightarrow{\delta^0} \mathrm{Hom}_R(S_1(X), R).$$

Sabmos que $\delta^0 = \partial_1^*$ y que $H^0(X;R) = \text{núc}\,\delta^0$. Sea $\phi \in \text{núc}\,\delta^0$. Recordemos que $S_0(X)$ es el R-módulo libre generado por los puntos de X. Sean x_0 y x_1 puntos de X generadores de $S_0(X)$. Dado que X es conectable por trayectorias, existe $\sigma : \Delta^1 \to X$ tal que $\sigma(e_0) = x_0$ y $\sigma(e_1) = x_1$. Siendo así,

$$\begin{aligned}\delta^0(\phi)(\sigma) &= \phi(\partial_1(\sigma) \\ &= \phi(\sigma(0) - \sigma(1)) \\ &= \phi(x_1 - x_0) = \phi(x_1) - \phi(x_0) = 0,\end{aligned}$$

por estar ϕ en $\text{núc}\,\delta^0$. De aquí que $\phi(x_0) = \phi(x_1)$, lo que quiere decir que ϕ es constante. Por lo tanto $H^0(X;R) \cong R$, con el isomorfismo $\phi \mapsto \phi(x)$, donde x es un punto arbitrario. □

Corolario 2.30. *El módulo $H^0(X;R)$ es un producto de copias de R; una por cada componente por trayectorias de X.*

Demostración. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ la familia de componentes por trayectorias. Vimos que $H^0(X;R) \cong \prod_{\alpha\in\Lambda} H^0(X_\alpha;R)$ y que $H^0(X_\alpha;R) \cong R$, por lo tanto $H^0(X;R) \cong \prod_{\alpha\in\Lambda} R$. □

Sea $f : X \to Y$ continua; f induce $\mathcal{S}f : \mathcal{S}(X) \to \mathcal{S}(Y)$ que a su vez induce un homomorfismo de cadenas $f_\# : S_n(X) \to X_n(Y)$. Tenemos que $S_n(X)$ es el módulo libre generado por $\mathcal{S}_n(X)$. Demostrarmos que si $f, g : X \to Y$ son homótopas, entonces existe una homotopía de cadenas T entre $f_\#$ y $g_\#$, esto es, hay homomorfismos $T_q : S_q(X) \to S_{q+1}(Y)$ tales que

$$\partial_{q+1} \circ T_q + T_{q-1} \circ \partial_n = f_\# - g_\#.$$

Hacemos $T^q : T^*_{q-1} : S^q(Y) \to S^{q-1}(X)$ que satisface

$$\delta^{q-1} \circ T^q + T^{q+1} \circ \delta^q = f^\# - g^\#,$$

que diagramáticamente puede verse como

$$\begin{tikzcd}
S^{q-1}(Y) \arrow[r, "\delta^{q-1}"] \arrow[d, shift right, "f^\#"'] \arrow[d, shift left, "g^\#"] & S^q(Y) \arrow[r, "\delta^q"] \arrow[dl, "T^q"'] \arrow[d, shift right, "f^\#"'] \arrow[d, shift left, "g^\#"] & S^{q+1}(Y) \arrow[dl, "T^{q+1}"'] \arrow[d, shift right, "f^\#"'] \arrow[d, shift left, "g^\#"] \\
S^{q-1}(X) \arrow[r, "\delta^{q-1}"] & S^q(X) \arrow[r, "\delta^q"] & S^{q+1}(X).
\end{tikzcd}$$

A una familia de homomorfismos $\{T^q\}$ entre complejos que satisfacen lo anterior se denomina homotopía de cocadenas entre $f^\#$ y $g^\#$.

Teorema 2.31. *Si $f, g : X \to Y$ son homótopas entonces $f^* = g^* = H^*(Y;R) \to H^*(X;R)$.*

Corolario 2.32. *Si $X \simeq Y$, entonces $H^*(X;R) \cong H^*(Y;R)$.*

2.3. Escisión para cohomología

Sea X un espacio y $\mathcal{U} = \{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una familia de subconjuntos de X tal que $X = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \overset{\circ}{X}_\alpha$.

Consideremos la inclusión

$$S_*(\mathcal{U}) = \sum_\alpha S_*(X_\alpha) \hookrightarrow S_*(X),$$

demostraremos que esta inclusión es una equivalencia homotópica de cadenas. Consideremos al par (X, A), donde $A \subseteq X$ y tomemos $U \subseteq A$ tal que $\overline{U} \subseteq A$. Definimos la familia $\mathcal{U} = \{X_1, X_2\}$ donde $X_1 = X \setminus U$ y $X_2 = A$. Como $\overline{U} \subseteq A$, entonces $X = (X \setminus \overline{U}) \cup \overset{\circ}{A}$. Aplicando el resultado, tenemos que $S_*(U) \xrightarrow{\simeq} S_*(X)$. Dualizando, obtenemos una equivalencia homotópica de cocadenas $\mathrm{Hom}_R(S_*(X); R) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_R(S_*(U); R)$. En este caso, $S_*(U) = S_*(X_1) + S_*(X_2)$. Sea $i_1 : S_*(X_1) \hookrightarrow S_*(X_1) + S_*(X_2)$, que induce

$$\bar{i}_1 : \frac{S_*(X_1)}{S_*(X_1) \cap S_*(X_2)} \to \frac{S_*(X_1) + S_*(X_2)}{S_*(X_1) \cap S_*(X_2)}.$$

Por el teorema de Noether, $\bar{i}_1$ es un isomorfismo. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(\frac{S_*(X_1)}{S_*(X_1\cap X_2)}, R) & & \mathrm{Hom}_R(\frac{S_*(X)}{S_*(X_2)}, R) \arrow[ll, "\mathrm{Hom}_R(\bar{j},R)"'] \arrow[dl, "\mathrm{Hom}_R(\bar{\imath},R)"] \\
& \mathrm{Hom}_R(\frac{S_*(X_1)+S_*(X_2)}{S_*(X_2)}, R), \arrow[ul, "\mathrm{Hom}_R(\bar{i}_1,R)"] &
\end{tikzcd}$$

donde $\bar{j}$ es el paso al cociente de $S_*(X_1) \hookrightarrow S_*(X)$ e $\bar{\imath}$ es el paso al cociente de $S_*(X_1) + S_*(X_2) \hookrightarrow \iota S_*(X)$.

Aplicando cohomología a este diagrama conmutativo de complejos de cocadenas, vemos que $(\mathrm{Hom}_R(\bar{i}, R))^*$ es un isomorfismo si, y sólo si, $(\mathrm{Hom}_R(\bar{j}, R))^*$ es isomorfismo y si, y sólo si, $(\mathrm{Hom}_R(\bar{\imath}, R))^*$ es isomorfismo.

Tenemos la sucesión exacta

$$0 \to S_*(X_2) \to S_*(X) \to S_*(X)/S_*(X_2) \to 0$$

que induce

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(\frac{S_*(X)}{S_*(X_2)}, R) \to \mathrm{Hom}_R(S_*(X), R) \to \mathrm{Hom}_R(S_*(X_2), R) \to 0,$$

la cual es exacta porque $S_q(X)/S_q(X_2)$ es libre. Esto último es así porque los generadores de $S_q(X_2)$ es un subconjunto de los generadores de $S_q(X)$.

De la misma manera se obtiene la sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}(\tfrac{S_*(X_1)+S_*(X_2)}{S_*(X_2)}, R) \to \mathrm{Hom}(S_*(X_1) + S_*(X_2), R) \to S^*(X_2) \to 0.$$

Teorema 2.33. *Sea* $0 \to \mathcal{C}^* \xrightarrow{\phi} \mathcal{D}^* \xrightarrow{\psi} \mathcal{E} \to 0$ *una sucesión exacta de cocadenas. Entonces existe una sucesión exacta larga*

$$\cdots H^q(\mathcal{C}^*) \to H^q(\mathcal{D}^*) \to H^q(\mathcal{E}^*) \to H^{q+1}(\mathcal{C}^*) \to \cdots .$$

Demostración. Sea $\alpha \in \mathcal{E}^q$ tal que $\delta^q_{\mathcal{E}}(\alpha) = 0$. Por ser ψ_q suprayectiva, existe $\psi_q^{-1}(\alpha)$. Luego

$$\psi_{q+1} \circ \delta^q_{\mathcal{D}}(\psi_q^{-1}(\alpha)) = \delta^q_{\mathcal{E}} \circ \psi_q(\psi_q^{-1}(\alpha)) = \delta^q_{\mathcal{E}}(\alpha) = 0,$$

lo que comprueba que $\delta^q_{\mathcal{D}}(\psi^1_q(\alpha)) \in \nu\psi_{q+}1 = \operatorname{Im}\phi_{q+1}$. Siendo así, existe $\phi^{-1}_{q+1}\delta^q_{\mathcal{D}}(\psi_q^{-1}(\alpha))$. Esto motiva a definir

$$\Delta^q : H^q(\mathcal{E}^*) \to H^{q+1}(\mathcal{C}^*) : [\alpha] \mapsto [\phi^{-1}_{q+1}\delta^q_{\mathcal{D}}\psi_q^{-1}(\alpha)].$$

El resto de la demostración es enteramente análogo al caso de complejos de cadenas. □

Definición 2.34. *Sea* (X, A) *una pareja arbitraria. Consideremos los complejos de cadenas* $S_*(A) \hookrightarrow S_*(X)$*. Esto define otro complejo de cadenas* $S_*(X, A) := S_*(X)/S_*(A)$ *cuyo operador frontera está dado por*

$$\begin{tikzcd}
S_q(A) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\partial_q|_A"'] & S_q(X) \arrow[r] \arrow[d, "\partial_q"'] & S_q(X)/S_q(A) \arrow[d, dashed, "\overline{\partial}_q"] \\
S_{q-1}(A) \arrow[r, hook] & S_{q-1}(X) \arrow[r] & S_{q-1}(X)/S_{q-1}(A).
\end{tikzcd}$$

Resulta que

$$\begin{array}{c}
\overline{S}^q(X, A) = \operatorname{Hom}_R(S_q(X)/S_q(A), R) \\
\big\downarrow \overline{\delta}^q_{(X,A)} := \operatorname{Hom}_R(\overline{\partial}_q, R) \\
\overline{S}^{q+1}(X, A) = \operatorname{Hom}_R(S_{q+1}(X)/S_{q+1}(A), R),
\end{array}$$

lo que permite definir

$$H^q(X, A; R) := H^q(\overline{S}^*(X, A), \overline{\delta}^*_{(X,A)})$$

Tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \operatorname{Hom}_R(\frac{S_*(X)}{S_*(X_2)}, R) \arrow[r] \arrow[d] & S^*(X) \arrow[r] \arrow[d] & S^*(X_2) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_R(\frac{S_*(U)}{S_*(X_2)}, R) \arrow[r] & S^*(U) \arrow[r] & S^*(X_2) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde $S_*(U) = S_*(X_1) + S_*(X_2)$. Aplicando el teorema anterior, obtenemos las sucesiones exactas largas

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^q(X,X_2,R) \arrow[r] \arrow[d, "\iota^*"] & H^q(X,R) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H^q(X_2,R) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & H^{q+1}(X,X_2,R) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^q(\overline{S}^*(X,A)) \arrow[r] & H^q(S^*(U)) \arrow[r] & H^q(X_2,R) \arrow[r] & H^{q+1}(\overline{S}^*(X,A)) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Por el teorema de los cinco, se tiene que ι^* es un isomorfismo, y por lo tanto j^* es un isomorfismo.

Recordemos que tenemos

$$\delta^q : \mathrm{Hom}_R(S_q(X), R) = S^q \to \delta^{q+1}(X) = \mathrm{Hom}_R(S_{q+1}(X), R)$$

donde $\delta^q(\phi) := \phi \circ \partial_{q+1}$. Considerando el diagrama

$$\begin{tikzcd}
S^q(X,A) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\delta^q_{(X,A)}"'] & S^q(X) \arrow[d, "\delta^q"] \\
S^{q+1}(X,A) \arrow[r, hook] & S^{q+1}(X)
\end{tikzcd}$$

queremos ver que δ^q se restringe para definir $\delta^q_{(X,A)}$. Sea $\phi \in S^q(X,A)$ y $c \in S_{q+1}(A) \xrightarrow{\delta_{q+1}} S_q(A)$. Entonces

$$\delta^q(\phi)(c) = \phi\partial_{q+1}(c) = 0$$

ya que $\delta_{q+1}(c) \in S_q(A)$ y $\phi(S_q(A)) = 0$.

Sea $\alpha \in \overline{S}^q(X,A)$. Por un lado

$$\alpha \xmapsto{\pi^\dagger} \alpha \circ \pi \xmapsto{\delta_{(X,A)}} \alpha \circ \pi \circ \partial_{q+1}$$

y por otro

$$\pi^\dagger \circ \overline{\delta}^q_{(X,A)}(\alpha) = \pi^\dagger(\alpha \circ \overline{\partial}_{q+1}) = \alpha \circ \overline{\partial}_{q+1} \circ \pi$$

pero $\pi \circ \partial_{q+1} = \overline{\partial}_{q+1} \circ \pi$, luego $\delta_{(X,A)} \circ \pi^\dagger = \pi^\dagger \circ \overline{\delta}_{(X,A)}$. Así $(\overline{S}^*(X,A), \overline{\delta}^*_{(X,A)}) \cong (S^*(X,A), \delta_{(X,A)})$ son isomorfos como complejos de cadenas. En consecuencia podemos usar cualquiera de ellos para calcular $H^*(X,A;R)$.

Vamos a usar $S^*(X,A)$ para ver cuáles son los cociclos y cofronteras relativas. En primer lugar

$$Z^q(X,A) := \nu\delta^q_{(X,A)} = \{\phi : S_q(X) \to R : \phi(B_q(X,A)) = 0\};$$

para probar la igualdad recordemos que

$$B_q(X,A) = \{c = \partial_{q+1}(b) + d : d \in S_q(A)\} \leq S_q(X).$$

Sea $\psi \in \text{núc}\, \delta^q_{(X,A)}$. Entonces $\psi(S_q(A)) = 0$ y $\psi \circ \partial_{q+1} = 0$. Sea $c = \partial_{q+1}(b) + d$. Se cumple que

$$\psi(c) = \psi(\partial_{q+1}(b) + d) = \psi \circ \partial_q(b) + \psi(b) = 0 + 0 = 0$$

y de aquí que $\psi(B_q(X, A)) = 0$.

Ahora tomemos $\phi : S_q(X) \to R$ tal que $\phi(B_q(X, A)) = 0$. Entonces eligiendo $b = 0$, $\phi(d) = 0$. Pero $\phi(S_q(A)) = 0$, luego $\delta^q_{(X,A)}(\phi) = 0$, y por lo tanto $\phi \in \text{núc}\, \delta^q_{(X,A)}$.

Por otro lado

$$\operatorname{Im} \delta^{q+1}_{(X,A)} = \{\phi : S_q(X) \to R : \phi = \beta \circ \partial_q, \beta : S_{q-1}(*) \to R, \beta(S_{q-1}(A)) = 0\},$$

y en consecuencia $H^q(X, A; R) = \text{núc}\, \delta^q_{(X,A)} / \operatorname{Im} \delta^{q-1}_{(X,A)}$.

2.4. Sucesión de la pareja

La sucesión

$$0 \to S^q(X, A) \hookrightarrow S^q(X) \hookrightarrow S^q(A) \to 0$$

es exacta. Por el teorema fundamental, resulta una sucesión exacta larga

$$\cdots H^q(X, A; R) \xrightarrow{j^*} H^q(X; R) \xrightarrow{i^*} H^q(A, R) \xrightarrow{\hat{\delta}^q} H^{q+1}(X, A; R) \to \cdots$$

En seguida damos el morfismo de conexión

$$\hat{\delta}^{q-1} : H^{q-1}(A; R) \to H^q(X, A; R),$$

para lo que consideraremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} S_q(X) \arrow[r, "\partial_q"] & S_{q-1}(X) \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] & R \\ & S_{q-1}(A). \arrow[u, hook] \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

Puesto que $\delta^{q-1}(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha} \circ \partial_q$, proponemos $\hat{\delta}^{q-1}[\alpha] = [\delta^{q-1}(\tilde{\alpha})] = [\tilde{\alpha} \circ \partial_q]$. Esto está bien definido. Demostraremos primero que $S^{q-1}(\tilde{\alpha})$ anula a $B_q(X, A)$. Para tal efecto tomamos $c \in \partial_{q+1}(b) + d$, con $d \in S_q(A)$, por lo que $\partial_q(d) \in S_{q-1}(A)$. Así,

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} \circ \partial_q(\partial_{q+1}(b) + d) &= \tilde{\alpha} \circ \partial_q(\partial_{q+1}(b)) + \tilde{\alpha} \circ \partial_q(d) \\ &= 0 + \alpha \circ \partial_q(d) \\ &= \delta^{q-1}_A(\alpha) = 0 \end{aligned}$$

ya que α es un $(q-1)$-cociclo de A.

La definición no depende de la extensión $\tilde{\alpha}$. Sea $\overline{\alpha}$ otra extensión de α y verifiquemos que $[\tilde{\alpha}\circ\partial_q] = [\overline{\alpha}\circ\partial_q]$. Consideremos a $\tilde{\alpha}\circ\partial_q - \overline{\alpha}\circ\partial_q = (\tilde{\alpha}-\overline{\alpha})\circ\partial_q$. Haciendo $\beta = \tilde{\alpha}-\overline{\alpha}$, se satisface que $\beta(c) = \tilde{\alpha}(c)-\overline{\alpha}(c) = \alpha(c)-\alpha(c) = 0$ para todo $c \in S_{q-1}(A)$, lo que comprueba que $\hat{\delta}^{q-1}$ está bien definido. Finalmente vemos que el homomorfismo $\alpha \mapsto [\overline{\alpha}\circ\partial_q]$ pasa al cociente. Esto es, la imagen de δ^{q-1} es 0.

Sea $\gamma : S_{q-1}(A) \to R$ y consideremos a $\gamma \circ \partial_{q-1}$. Entonces

$$\hat{\delta}^{q-1}(\gamma\circ\partial_{q-1}) = \delta^{q-1}(\widetilde{\gamma\circ\partial_{q-1}}).$$

Para encontrar la extensión adecuada, consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} S_{q-1}(A) \arrow[r, "\partial_{q-1}"] \arrow[d, hook] & S_{q-2}(A) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, hook] & R \\ S_{q-1}(X) \arrow[r, "\partial_{q-1}"] & S_{q-1}(X), \arrow[ur, "\tilde{\gamma}"'] & \end{tikzcd}$$

y proponemos como extensión $\widetilde{\gamma\circ\partial_{q-1}} = \tilde{\gamma}\circ\partial_{q-1}$ COmo $\delta^{q-1}(\gamma\circ\tilde{\partial}_{q-1}) = \tilde{\gamma}\circ\partial_{q-1}\circ\partial_q$, entonces $\hat{\delta}^{q-1}$. pasa al cociente.

Sea $f : (X, A) \to (Y, B)$. Queremos definir

$$H^q(Y, B; R) \xrightarrow{f^*} H^q(X, A; R).$$

Para tal efecto basta ver que f induce un homomorfismo de cocadenas $f^\# : S^q(Y, B) \dashrightarrow S^q(X, A)$ donde $f^\#(\phi) = \phi \circ f_\#$. Tenemos que $f^\#$ se restringe al subcomplejo relativo ya que si $\phi(S_q(B)) = 0$ y

$$f^\#(\phi)(S_q(A)) = \phi\circ f_\#(S_q(A)) = \phi(S_q(B)) = 0.$$

Por el Ejercicio 2.14, f induce un homomorfismo f^*.

2.5. Sucesión de Mayer-Vietoris

Consideremos subgrupos $H_1 \subseteq H$ y $K_1 \subseteq K$ donde H y K son subgrupos del grupo abeliano G. Hay una sucesión exacta

$$0 \to \frac{H\cap K}{H_1\cap K_1} \xrightarrow{\iota} H/H_1 \oplus K/K_1 \xrightarrow{j} \frac{H+K}{H_1+K_1} \to 0,$$

donde $\iota[h]_{H_1\cap K_1} = ([g]_H - [g]_K)$ y $j([h]_{H_1}, [k]_{K_1}) = [h+k]_{H_1+K_1}$. Aplicando el funtor S_* surge la sucesión

$$0 \to \frac{S_*(A)\cap S_*(B)}{S_*(A_1)\cap S_*(B_1} \to \frac{S_*(A)}{S_*(A_1)} \oplus \frac{S_*(B)}{S_*(B_1)} \to \frac{S_*(A)+S_*(B)}{S_*(A_1+B_1)}.$$

Como el último complejo de cadenas es libre, aplicando el funtor Hom tenemos la sucesión exacta

$$\begin{tikzcd}
0 \to \mathrm{Hom}(\frac{S_*(A)+S_*(B)}{S_*(A_1)+S_*(B_1)}, R) \to \mathrm{Hom}(\frac{S_*(A)}{S_*(A_1)}, R) \oplus \mathrm{Hom}(\frac{S_*(A)}{S_*(A_1)}, R) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}(\frac{S_*(A)\cap S_*(B)}{S_*(A_1)\cap S_*(B_1)}, R) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd} \tag{2.1}$$

Consideremos $S_*(A) + S_*(B) \xrightarrow{i} S_*(X)$, $S_*(A_1) + S_*(B_1) \xrightarrow{i_*} S_*(A_1 \cup B_1)$ y sus duales

$$\mathrm{Hom}_R(S_*(X); R) \xrightarrow{i^\dagger} \mathrm{Hom}_R(S_*(A) + S_*(B); R),$$
$$\mathrm{Hom}_R(S_*(A \cup B); R) \xrightarrow{i_1^\dagger} \mathrm{Hom}_R(S_*(A_1) + S_*(B_1); R).$$

Pedimos que $i^\dagger$ e $i_1^\dagger$ induzcan isomorfismos en cohomología, esto es, (A, B) y (A_1, B_1) son escisivos en cohomología. Esto es suficiente para usar (2.1) para demostrar lo deseado, aplicando el teorema fundamental al dual de

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[dr] & S_*(A_1) + S_*(B_1) \arrow[r] \arrow[d, hook] & S_*(A) + S_*(B) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \frac{S_*(A)+S_*(B)}{S_*(A_1)+S_*(B_1)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& S_*(A_1 \cup B_1) \arrow[r] & S_*(X) \arrow[r] & \frac{S_*(X)}{S_*(A_1 \cup B_1)} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

y después el lema de los cinco, tendremos que

$$H^*(\mathrm{Hom}_R(\frac{S_*(A) + S_*(B)}{S_*(A_1) + S_*(B_1)}), R) \cong H^*(X, A_1 \cup B_1; R).$$

Ahora sí, aplicando el teorema fundamental a (2.1), obtenemos la sucesión exacta larga

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^q(X, A_1 \cup B_1; R) \arrow[r] & H^q(A, A_1; R) \oplus H^q(B, B_1; R) \arrow[d] \\
& & H^q(A \cap B, A_1 \cap B_1; R) \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

Proposición 2.35. *Sean A, B subespacios de X tales que $A \cup B = X$. El par (A, B) es escisivo en cohomología (es decir, $i^\dagger : \mathrm{Hom}_R(S_*(X, R)) \to \mathrm{Hom}_R(S_*(A) + S_*(B))$ induce isomorfismo en cohomología) si, y sólo si, $j : (A, A \cap B) \hookrightarrow (X, B)$ es una escisión en cohomología (escindimos $U = B \setminus A$).*

Demostración. Por el teorema de Noether el morfismo

$$\iota : \frac{S_*(A)}{S_*(A\cap B)} \to \frac{S_*(A)+S_*(B)}{S_*(B)}$$

es un isomorfismo. Por eso, en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_R(\frac{S_*(A)}{S_*(A\cap B)}, R) & & \operatorname{Hom}_R(\frac{S_*(X)}{S_*(B)}, R) \arrow[ll, "j^\dagger"'] \arrow[dll, "i^\dagger"] \\
\operatorname{Hom}_R(\frac{S_*(A)+S_*(B)}{S_*(B)}, R) \arrow[u, "\iota^\dagger"'] & &
\end{tikzcd}$$

el morfismo $\iota^\dagger$ es un ismorfismo de cadenas e $i^\dagger$ induce isomorfismos en cohomología si, y sólo si, $j^\dagger$ induce isomorfismo en cohomología.

Consideremos las siguientes sucesiones exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[dr] & \operatorname{Hom}(\frac{S_*(A)+S_*(B)}{S_*(B)}, R) \arrow[r] & \operatorname{Hom}(S_*(A)+S_*(B), R) \arrow[r] & \operatorname{Hom}(S_*(B), R) \arrow[r] & 0 \\
& \operatorname{Hom}(\frac{S_*(X)}{S_*(B)}, R) \arrow[r] \arrow[u] & \operatorname{Hom}(S_*(X), R) \arrow[r] \arrow[u, "i^\dagger"] & \operatorname{Hom}(S_*(B), R) \arrow[u, equal] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

donde el morfismo de enmedio, por hipótesis, induce un isomorfismo en cohomología. Pasando, por el teorema fundamental, a una sucesión exacta larga y empleando el lema de los cinco, resulta que $\iota^\dagger$ induce isomorfismo en cohomología. Por lo tanto $j^\dagger$ induce isomorfismo en cohomología y en consecuencia j es una escisión.

Recíprocamente, si j es escisión, entonces $j^\dagger$ induce isomorfismo en cohomología. Por lo tanto $\iota^\dagger$ induce isomorfismo en cohomología y por el lema de los cinco obtenemos que $i^\dagger$ induce isomorfismo en cohomología. Luego (A, B) es escisivo. □

2.6. Cohomología reducida

Definición 2.36. *Un complejo de cocadenas aumentado sobre un R-módulo N es un complejo de cocadenas C^* tal que $C^q = 0$ para $q < 0$ y existe un monomorfismo $\eta : N \to C^0$ de modo que*

$$N \overset{\eta}{\hookrightarrow} C^0 \xrightarrow{\delta^0} C^1$$

satisface $\delta^0 \circ \eta = 0$.

Ejemplo 2.37. Si X es un espacio topológico, entonces $S^* := \operatorname{Hom}_R(S_*(X), R)$ es un complejo de cocadenas aumentado sobre R. En efecto, se puede definir $\eta : R \to \operatorname{Hom}_R(S_0(X), R)$ a través de $\eta(r)(x) = r$. Esta función es inyectiva pues si $\eta(r) = 0$, entonces $r = 0$. Falta comprobar que $\delta^0 \circ \eta = 0$. Sea $\sigma \in S_1(X)$, entonces

$$\begin{aligned}
\delta^0 \circ \eta_(r)(\sigma) &= \eta_r \circ \delta^1(\sigma) \\
&= \eta(r)(\sigma(e_1) - \sigma(e_0)) \\
&= \eta(r)(\sigma(e_1) - \eta_r(\sigma(e_0)) \\
&= r - r = 0.
\end{aligned}$$

Definición 2.38. *Sea C^* un complejo de cadenas aumentado. Definimos el complejo de cadenas reducido $\tilde{C}^*$ asociado a C^* como*

$$\tilde{C}^q = \begin{cases} C^q, & q \neq 0, \\ \operatorname{conúc} \eta = C^0/\operatorname{Im} \eta, & q = 0. \end{cases}$$

Los operadores cofrontera del complejo de cadenas reducido son los mismos para $q \geq 1$. Para el caso de las 0-cocadenas, tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
C^0 \arrow[r, "\delta^0"] \arrow[d] & C^1 \\
C^0/\operatorname{Im} \eta \arrow[ur, dashed, "\bar{\delta}^0"'] &
\end{tikzcd}$$

donde δ^0 pasa al cociente porque $\delta^0 \circ \eta = 0$.

Definición 2.39. *Sea C^* un complejo de cocadenas aumentado. Definimos $\tilde{H}^*(C^*) = H^*(\tilde{C}^*)$*

¿Cuál es la relación entre la reducida y la no reducida? Para hallarla, consideremos al módulo N como un complejo de cocadenas N^* concentrado en dimensión 0, es decir,

$$0 \to N \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \cdots,$$

de donde se obtiene la sucesión exacta de complejos de cadenas

$$0 \to N^* \xrightarrow{\eta} C^* \to \tilde{C}^* \to 0$$

que es exacta porque en dimensión 0,

$$0 \to N \to C^0 \to C^0/\operatorname{Im} \eta \to 0$$

es exacta y en dimensión diferente de 0,

$$0 \to 0 \to C^q \to C^q \to 0$$

es también exacta. Aplicando el teorema fundamental

$$\cdots H^q(N^*) \to H^q(C^*) \to H^q(\tilde{C}^*) \to \cdots$$

donde

$$H^q(N^*) = \begin{cases} N, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0. \end{cases}$$

En consecuencia, para $q = 0$

$$0 \to N \to H^0(C^*) \to H^0(\tilde{C}^*) \to 0$$

y para $q \neq 0$

$$H^q(C^*) \cong H^q(\tilde{C}^*) := \tilde{H}^q(C^*).$$

Definición 2.40. ▪ *Consideremos la función constante $c : X \to *$ y el homomorfismo inducido $c^* : H^*(*; R) \to H^*(X; R)$. Definimos $\tilde{H}^q(X, R) :=$* conúc C^*.

▪ *Tomando $x_0 \in X$, definimos $\tilde{H}^q(X; R) := H^q(X, \{x_0\}; R)$.*

Proposición 2.41. *Se satisface*

$$\tilde{H}^q(S^n; R) \cong \begin{cases} 0, & q \neq 0, \\ R, & q = 0. \end{cases}$$

Demostración. Sean N y S los polos de S^n. Consideremos los subespacios

$$S^n \setminus \{N\} \cong \mathbb{R}^n \quad \text{y} \quad S^n \setminus \{S\} \cong \mathbb{R}^n$$

que son contraíbles. Por lo tanto

$$\tilde{H}^q(S^n \setminus \{N\}; R) \cong H^q(S^n \setminus \{S\}; R) = 0$$

para todo q. Puesto que $S^n = (S^n \setminus \{N\}) \cup (S^n \setminus \{S\})$, entonces $A = S^n \setminus \{N\}$ y $B = S^n \setminus \{S\}$ es escisiva por la proposición anterior.

Usando la sucesión de Mayer-Vietoris con $A_1 = B_1 = \{x_0\}$,

$$\cdots \to \tilde{H}^q(S^n) \to \tilde{H}^q(A) + \tilde{H}^q(B) \to \tilde{H}^q(S^n \setminus \{N, S\}) \to \tilde{H}^{q+1}(S^n) \to \cdots,$$

donde la suma es nula. Esto implica que

$$\hat{\delta}^q : \hat{H}^q(S^n \setminus \{N, S\}; R) \to \tilde{H}^{q+1}(S^n; R)$$

es un isomorfismo, es decir

$$\tilde{H}^q(S^{n-1}; R) \cong \tilde{H}^{q+1}(S^n, R)$$

pues $S^n \setminus \{N, S\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \cong S^{n-1}$.

Puesto que

$$\tilde{H}^q(S^0; R) \cong \begin{cases} R, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0. \end{cases}$$

y por inducción sobre n se tiene el resultado. □

Proposición 2.42. *Sea Y un espacio topológico y $f : S^{n-1} \to Y$ continua. Sea también $Z = Y \cup_f D^n$ y $F : (D^n, S^{n-1}) \to (Z, Y)$ la función inducida por la identificación. Entonces $F^* : H^q(X, Y; R) \to H^q(D^n, S^{n-1}; R)$ es un isomorfismo para toda q.*

Demostración. Sea $p : Y \amalg D \to Z$ la identificación. En particular, $p|_{D^n \setminus S^{n-1}}$ es un encaje con imagen $Z \setminus Y$. Sea $\Sigma = \{x \in D^n : |x| > \frac{1}{2}\}$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
H^q(D^n, S^{n-1}) & H^q(D^n, \Sigma) \arrow[l, "i^*"', "\cong"] \arrow[r, "k^*"] & H^q(D^n \setminus S^{n-1}, \Sigma \setminus S^{n-1}) \\
H^q(Z, Y) \arrow[u, "F^*"] & H^q(Z, Y \cup F(\Sigma)) \arrow[l, "j^*"] \arrow[r, "\ell^*"'] \arrow[u] & H^q(Z \setminus Y, F(\Sigma \setminus S^{n-1})) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

donde i, j, k, y ℓ son inclusiones y los morfismos verticales están inducidos por F.

Como S^{n-1} es retracto por deformación de Σ, entonces usando las sucesiones exactas de las parejas (D^n, S^{n-1}) y (D^n, Σ) y el lema de los cinco se demuestra que i^* es isomorfismo. También se tiene que Y es retracto por deformación de $Y \cup F(\Sigma)$ Con el mismo argumento del caso anterior para (Z, Y) se tiene que j^* es isomorfismo. Por el teorema de escisión, k^* y ℓ^* son isomorfismos. Como $F|_{D^n \setminus S^{n-1}}$ es un homeomorfismo sobre su imagen (que es $Z \setminus Y$), entonces la tercera flecha vertical es un isomorfismo. Por lo tanto, F^* es un isomorfismo. □

Teorema 2.43. *Sean Y un espacio topológico, $f : S^{n-1} \to Y$ continua y $Z = Y \cup_f D^n$. Consideremos al morfismo $f^* : H^{n-1}(Y; R) \to H^{n-1}(S^{n-1}; R)$. Entonces*

- *Se satisface que*
$$\tilde{H}^q(Z; R) \cong \tilde{H}^q(Y; R)$$
para toda $q \neq n, n-1$.
- *Se cumple que*
$$\tilde{H}^{n-1}(Z; R) \cong \text{núc}\, f^*.$$
- *Se tiene la sucesión exacta*
$$0 \to \text{conúc}\, f^* \to \tilde{H}^n(Z; R) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}^n(Y; R) \to 0.$$

Antes de dar la demostración, debemos mencionar que el tercer inciso implica la solución de un problema de extensión algebraica que involucra el funtor $\text{Ext}^1_R(?, ?)$. Si R es un cuerpo entonces $\tilde{H}(Z; R)$ es una suma directa de los módulos $\text{conúc}\, f^*$ y $\tilde{H}^n(Y; R)$. Si alguno de ellos es nulo, es bastante claro quién debe ser $\tilde{H}^n(Z; R)$.

Demostración. Dada la sucesión exacta larga reducida de la pareja (D^n, S^{n-1}) y el hecho de que D^n es contraíble, tenemos que

$$\hat{\delta}^q : H^q(D^n, S^{n-1}; R) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}^{q+1}(S^{n-1}; R)$$

es un isomorfismo. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} H^{q+1}(D^n, S^{n-1}; R) & H^q(S^{n-1}; R) \arrow[l, "\hat{\delta}^q"', "\cong"] \\ H^{q+1}(Z, Y; R) \arrow[u, "F^*"] & H^q(Y; R). \arrow[l, "\hat{\delta}^q"] \arrow[u, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

Como $\hat{\delta}^q$ es natural entonces el diagrama conmuta. En general, un diagrama que involucre al morfismo de conexión es natural.

Sea $\psi \in H^q(Y; R)$. Entonces

$$\hat{\delta}^q(f^*[\psi]) = \hat{\delta}^q([f^{\#}(\psi)]) = \hat{\delta}^q[\psi \circ f_{\#}] = [\delta^q \widetilde{\psi \circ f_{\#}}]$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} F^*(\hat{\delta}^q[\psi]) &= F^*[\delta^q(\hat{\psi})] \\ &= [\delta^q(\hat{\psi}) \circ F_{\#}]. \end{aligned}$$

Además

$$[\delta^q(\widetilde{\psi \circ f_{\#}})] = [\widetilde{\psi \circ f_{\#}} \circ \partial_{q+1}] = [\delta^q(\tilde{\psi}) \circ F_{\#}] = [\tilde{\psi} \circ \partial_{q+1} \circ F_{\#}].$$

Para construir la extensión apropiada, consideraremos

$$\begin{tikzcd} & S_q(S^{n-1}) \arrow[r, "f_{\#}"] \arrow[d, hook] & S_q(Y) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, hook] & R \\ S_{q+1}(D^n) \arrow[r, "\partial_{q+1}"] & S_q(D^n) \arrow[r, "F_{\#}"'] & S_q(Z) \arrow[ur, dashed, "\tilde{\psi}"'] & \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

Por el Ejercicio 2.16, se tiene que $\widetilde{\psi \circ f} = \tilde{\psi} \circ F_{\#}$. Entonces

$$\widetilde{\psi \circ f_{\#}} \circ \partial_{q+1} = \overline{\psi} \circ F_{\#} \circ \partial_{q+1} = \tilde{\psi} \circ \partial_{q+1} \circ F_{\#}$$

pues $F_{\#}$ es morfismo de cadenas. Por lo tanto el diagrama de naturalidad conmuta.

Consideremos a continuación la sucesión exacta larga reducida (de la pareja) de (Z, Y).

$$\begin{tikzcd} \tilde{H}^{q+1}(Y;R) \arrow[r] & H^q(Z,Y;R) \arrow[r] & \tilde{H}^q(Y;R) \arrow[r, "\hat{\delta}^q"] \arrow[dr, "f^*"'] & H^{q+1}(Z,Y;R) \arrow[d, "(\hat{\delta}^q)^{-1}\circ F^*"] \\ & & & \tilde{H}^q(S^{n-1};R). \end{tikzcd}$$

Cambiando $H^{q+1}(Z,Y;R)$ por $\tilde{H}^q(S^{n-1};R)$, obtenemos la sucesión exacta larga

$$\cdots \to \tilde{H}^{q-1}(Y) \xrightarrow{f^*} \tilde{H}^{q-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{\psi} \tilde{H}^q(Z) \xrightarrow{i^*} \tilde{H}^q(Y) \xrightarrow{f^*} H^q(S^{n-1}) \to \cdots$$

En seguida podemos prodecer punto por punto. Para el primero, si $q \neq n, n-1$, entonces i^* es un isomorfismo ya que

$$H^q(S^{n-1};R) \cong 0, q \neq n-1.$$

Si $q = n-1$ como $\tilde{H}^{n-2}(S^{n-1};R) = 0$ entonces

$$i^* : \tilde{H}^{n-1}(Z;R) \rightarrowtail \tilde{H}^{n-1}(Y;R),$$

luego i^* es isomorfismo con su imagen pues la sucesión es exacta. Por lo tanto

$$\tilde{H}^{n-1}(Z;R) \cong \text{núc}\, f^*.$$

Para el último punto, con $q = n$

$$\cdots \to \tilde{H}^{n-1}(Y) \xrightarrow{f^*} \tilde{H}^{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{\psi} \tilde{H}^n(Z) \xrightarrow{i^*} \tilde{H}^n(Y) \xrightarrow{f^*} 0 \to \cdots$$

y por la exactitud, $\text{núc}\, i^* = \operatorname{Im}\psi$. Pero

$$\operatorname{Im}\psi \cong \tilde{H}^{n-1}(S^{n-1};R)/\text{núc}\,\psi = \tilde{H}^{n-1}(S^{n-1};R)/\operatorname{Im} f^*$$

y por definición $\tilde{H}^{n-1}(S^{n-1};R)/\operatorname{Im} f^* = \text{conúc}\, f^*$, que es lo mismo que la sucesión del tercer inciso. ☐

Este teorema es la herramienta principal para hacer cálculos, como quedará ejemplificado enseguida.

Proposición 2.44. *Se cumple que*

$$H^q(\mathcal{CP}^m;R) \cong \begin{cases} R, & 0 \leq q \leq 2m, q \equiv 0 \mod 2, \\ 0, & q > 2m, q \equiv 1 \mod 2. \end{cases}$$

Demostración. Recordemos que $\mathbb{CP}^m \cong \mathbb{CP}^{m-1} \cup_f D^{2m}$ donde $f : S^{2m-1} \to \mathbb{CP}^{m-1}$ está dada por $f(z_1, \cdots, z_m) = [z_1, \ldots, z_m]$, donde $[]$ indica la clase de equivalencia módulo multiplicación por un elemento en S^1. Para $m = 0$, $\mathbb{CP}^0 = \{*\}$, luego

$$H^q(\{*\};R) \cong \begin{cases} R, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0. \end{cases}$$

Supongamos que el aserto del teorema es verdadero para $\mathbb{CP}^{m-1}$. Puesto que $H^q(\mathbb{CP}^m;R) \cong H^q(\mathbb{CP}^{m-1} \cup_f D^{2m};R)$. Por el primer inciso del teorema anterior,

$$H^q(\mathbb{CP}^m;R) \cong H^q(\mathbb{CP}^{m-1};R), \quad q \neq 2m, 2m-1,$$

y por el segundo

$$H^{2m-1} \cong \text{núc}\, f^*$$

donde $f^* : H^{2m-1}(\mathbb{CP}^{m-1};R) \to H^{2m-1}(S^{2m-1};R)$. Por hipótesis de inducción, $H^{2m-1}(\mathbb{CP}^{m-1};R) = 0$. Luego f^* es el homomorfismo 0, lo que significa que $\text{núc}\, f^* = 0$. Utilizando ahora el tercer inciso, tenemos la sucesión exacta

$$0 \to \text{conúc}\, f^* \to H^{2m}(\mathbb{CP}^m;R) \to H^{2m}(\mathbb{CP}^{m-1},R) = 0 \to 0,$$

donde el penúltimo término de la sucesión es nulo también por hipótesis de inducción. Esto significa que

$$\text{conúc}\, f \cong \tilde{H}^{2m-1}(S^{2m-1};R) \cong R,$$

como queríamos. □

La cohomología anterior es una de las más importantes porque contiene a las clases de Chern (clases características) que permiten estudiar los haces vectoriales.

2.7. Transversalidad

Todas las variedades en discusión no tienen frontera. Sean M^m y N^n variedades diferenciables de sendas dimensiones m y n. Sea V^k una subvariedad de N (cuyas cartas son las restricciones de las cartas de N).

Definición 2.45. *Sea $f : M \to N$ una función diferenciable. Decimos que f es transversa a V si para cada $x \in f^{-1}(V)$ se cumple que*

$$\mathrm{d}f_x(T_xM) + T_{f(x)}V = T_{f(x)}N.$$

Sea N una variedad diferenciable y $H_*(N;R)$ con $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Deseamos definir una estructura de anillo graduado en tal módulo. Para tal fin, necesitamos generalizar la definición de transversalidad. Sean $f : M \to N$ y $g : V \to N$ funciones diferenciables. Consideremos $f \times g : M \times V \to N \times N$. Decimos que f y g son transversales si la función $f \times g$ es transversal a la subvariedad $\Delta \subset N \times N$, y lo denotamos como $f \pitchfork g$.

Teorema 2.46 (Thom). *Sea $f : M^m \to N^n$ una función continua y V^k una subvariedad de N. Entonces existe una función diferenciable $\phi : M \to N$ tal que $\phi \simeq f$ y ϕ es transversa a V.*

Teorema 2.47. *Sea $f : M^m \to N^n$ una función diferenciable y V^k una subvariedad de N. Si f es transversal a V entonces $f^{-1}(V)$ es una subvariedad de M de dimensión $m - n + k$ (o $f^{-1}(V) = \emptyset$).*

Sea $\alpha \in H_i(N; R)$ y $\beta \in H_j(N; R)$. Supongamos que α y β están dadas por variedades, esto es, existe una variedad diferenciable compacta $M^i \xrightarrow{f} N$ tal que $\alpha = f_*(\sigma_M)$ donde

$$\sigma_M \in H_i(M^i; R) = \begin{cases} R = \mathbb{Z}, & M \text{ está orientada,} \\ R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

También para β existe $V^j \xrightarrow{g} N$ tal que $\beta = g_\alpha(\sigma_V)$

El producto de intersección de α y β, que denotamos con $\alpha \pitchfork \beta$ es la intersección transversal de f y g, es decir,

$$f \pitchfork g = (f \times g)^{-1}(\Delta) = \{(x, v) : f(x) = g(v)\}.$$

Por el teorema anterior, esto es una subvariedad de $M \times V$ que es de dimensión $i + j - 2n + n = i + j - n$ y que por lo tanto tiene una clase fundamental

$$\sigma(f \pitchfork g) \in H_{i+j-n}(f \pitchfork g; R) \xrightarrow{(f \circ \pi_1)_*} H_{i+j-n}(N; R).$$

Si f y g no son transversales, esto es, si $f \times g$ no es transversal a Δ, sí existe una función homótopa que si es transversal a Δ. Con ella hacemos la misma construcción. Se puede demostrar que cualquier función homótopa a $f \times g$ que es transversal a Δ define la misma clase de homología.

Escolio 2.48. Este producto de intersección está definido para las clases de homología. Sin embargo, cuando $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, todas las clases de homología están dadas por variedades. Cuando $R = \mathbb{Z}$, todas las variedades tienen que estar orientadas.

2.8. Producto copa

En 1935, en Moscú, Alexander y Kolmogorov definieron los grupos de cohomología con una estrctura de anillo graduado a través del llamado producto copa. Luego hubo modificaciones hechas por Čech y Whitney ($\smile$). Este producto ya funciona para espacios arbitrarios.

Sea X un espacio arbitrario. Consideremos Δ^{p+q} el simplejo estándar. Definimos $\lambda_p : \Delta^p \to \Delta^{p+q}$ y $\rho_q : \Delta^q \to \Delta^{p+q}$ mapeos afines de la siguiente manera.

$$\lambda_p(e_i) = e_i, \quad 0 \leq i \leq p$$

y

$$\rho_q(e_j) = e_{p+j}, \quad 0 \leq j \leq q.$$

Definición 2.49. *Definimos*

$$\smile: S^p(X) + S^q(X) \to S^{p+q}(X) : (\phi, \psi) \mapsto \phi \smile \psi,$$

donde $\phi \smile \psi : S_{p+q}(X) \to R$*,*

$$\phi \smile \psi(\sigma) = \phi(\sigma \circ \lambda_p) * \psi(\sigma \circ \rho_q) \in R.$$

Proposición 2.50. *La función* $\smile: S^p \times S^q \to S^{p+q}(X)$ *es bilineal y asociativa, cuya unidad es* $1 \in S^0(X)$ *dada por* $1(x) = 1 \in R$ *para cada* $x \in S_0(X)$*.*

El producto $\smile$ pasa a cohomología y para comprobar esto hay que calcular

$$\delta^{p+q}(\psi \smile \psi) = \delta^p(\phi) \smile \psi + (-1)^p \phi \smile \delta^q(\psi).$$

Aunque se puede dar una demostración directa y laboriosa, es mejor hacerlo introduciendo otro producto.

Este producto (llamado producto cruz) permite estudiar la (co)homología de $X \times Y$. Para esto hay que ver qué es $S_0(X \times Y)$.

Definición 2.51. *El producto* $S_*(X) \otimes_R S_*(Y)$ *está definido por*

$$\begin{tikzcd}
(S_*(X) \otimes_R S_*(Y))_n \arrow[r, equal] \arrow[d, "\partial_n^{\oplus}"'] & \bigoplus_{p=0}^{n} S_p(X) \otimes_R S_{n-p}(Y) \arrow[d] \\
(S_*(X) \otimes_R S_*(Y))_{n-1} \arrow[r, equal] & \bigoplus_{p=0}^{n-1} S_p(X) \otimes_R S_{n-1-p}(Y)
\end{tikzcd}$$

donde

$$\delta_n^{\otimes}(c \otimes d) = \partial_p(c) \otimes d + (-1)^p c \otimes \partial_{n-p}(d)$$

y $c \in S_p(X)$ *y* $d \in S_{n-q}(Y)$

Definición 2.52. *Definimos el morfismo de Alexander-Whitney* $A : S_n(X \times Y) \to (S_*(X) \otimes S_*(Y))_n$ *a través de*

$$A(\tau) = \sum_{p=0}^{n} \pi_1 \circ \tau \circ \lambda_p \otimes \pi_2 \circ \tau \circ p_{n-1}.$$

Definición 2.53. *Sean* $\psi \in S^p(X), \psi \in S^q(Y)$ *definimos el producto cruz* $\phi \times \psi \in S^{p+q}(X \times Y)$ *como la composición*

$$S_{p+q}(X \times Y) \to (S_*(X) \otimes S_*(Y))_{p+q} \xrightarrow{\phi \otimes \psi} R \otimes_R R \to R$$

donde $\phi \otimes \psi$ *se define como*

$$\phi \otimes \psi : S_p(X) \otimes_R S_q(Y) \to R \otimes_R R$$

en este sumando y 0 *en todos los demás.*

Escolio 2.54. Sea $\Delta : X \to X \times X$ la función diagonal y consideremos la composición

$$S^p(X) \times S^q(X) \xrightarrow{\times} S^{p+q}(X \times X) \xrightarrow{\Delta^{\#}} S^{p+q}(X).$$

Así, para $\tau \in S_{p+q}(X)$

$$\begin{aligned}
\Delta^{\#}(\phi \times \psi)(\tau) &= \phi \times \psi(\Delta_{\#}(\tau)) \\
&= \phi \times \psi(\Delta \circ \tau) \\
&= \phi(\pi_1 \circ \Delta \circ \tau \circ \lambda_p)\psi(\pi_2 \circ \Delta \circ \tau \circ \rho_q) \\
&= \phi(\tau \circ \lambda_p)\psi(\tau \circ \rho_q) \\
&= (\phi \smile \psi)(\tau).
\end{aligned}$$

Sean $\phi \in S^p(X)$ y $\psi \in S^q(X)$. Tenemos así que $\Delta^{\#}(\phi \circ \psi) = \phi \smile \psi$.

Proposición 2.55. *Se satisface*

$$\delta^{p+q}(\phi \times \psi) = \delta^p(\phi) \times \psi + (-1)^p \phi \times \delta^q(\psi).$$

Demostración. Sea $\sigma \in S_{p+q+1}(X \times Y)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\delta^{p+q}(\phi \times \psi)(\sigma) &= (\phi \times \psi)(\partial_{p+q+1}(\sigma)) \\
&= m \circ (\phi \times \psi) \circ A(\partial_{p+q+1}(\sigma)) \\
&= m \circ (\phi \otimes \psi)\partial^{\otimes}_{p+q+1} A(\sigma) \\
&= m \circ (\phi \otimes \psi)\partial^{\otimes}_{p+q+1} A\left(\sum \pi_1 \circ \sigma \circ \lambda_p \otimes \pi_2 \circ \sigma \circ \rho_{n-1}\right) \\
&= m \circ \circ \phi \otimes \psi \sum [\partial_i(\pi_1 \circ \sigma \circ \lambda_p \otimes \pi_2 \circ \sigma \circ \rho_{p+q+i} + \\
&\qquad (-1)^i \pi_1 \circ \sigma \circ \lambda_i \otimes \partial_{p+q+i}(\pi_2 \circ \sigma \circ \rho_{p+q+1})] \\
&= m\phi(\partial_{p+1}(\pi_1 \circ \sigma \circ \lambda_{p+1})) \otimes \psi(\pi_2 \circ \sigma \circ \rho_q) \\
&\qquad + (-1)^p \phi(\pi_1 \circ \sigma \circ \lambda_p) \otimes \psi(\partial_{q+1}(\pi_2 \circ \sigma \circ \rho_{q+1})) \\
&= \phi \partial_{p+1}(\pi_1 \circ \sigma \circ \lambda_{p+1})\psi(\pi_2 \circ \sigma \circ \rho_q) \\
&\qquad + (-1)^p \phi(\pi_1 \circ \sigma \circ \lambda_p)\psi(\partial_{q+1}(\pi_2 \circ \sigma \circ p_{q+1})) \\
&= (\delta^p(\phi) \times \psi)(\sigma) + ((-1)^p \phi \times \delta^q(\psi))(\sigma),
\end{aligned}$$

como se afirmaba. □

Proposición 2.56. *El operador δ^* satisface*

$$\delta^{p+q}(\phi \smile \psi) = \delta^p(\phi) \smile \psi + (-1)^p \phi \smile \delta^q(\psi)$$

donde $\phi \in S^p(X)$ y $\psi \in S^q(X)$.

Demostración. Según lo anterior

$$\begin{aligned}\partial^{p+q}(\phi \smile \psi) &= \delta^{p+q}(\Delta^{\#}(\phi \times \psi))\\ &= \Delta^{\#}(\delta^{p+q}(\phi \times \psi))\\ &= \Delta^{\#}(\delta^{p}(\phi) \times \psi + (-1)^p \phi \times \delta^q(\psi))\\ &= \delta^p(\phi) \smile \psi + (-1)^p \psi \smile \delta^q(\psi),\end{aligned}$$

como se quería. □

Corolario 2.57. *El producto copa en cocadenas pasa a los módulos de cohomología.*

Demostración. Definimos $[\phi] \smile [\psi] := [\phi \smile \psi]$. Sea ϕ tal quye $\delta^p(\phi) = 0$ y ψ tal que $\delta^q(\psi) = 0$. Entonces

$$\delta^{p+q}(\phi \smile \psi) = \delta^p(\phi) \smile \psi + (-1)^p \phi \smile \delta^q(\psi) = 0,$$

luego $\phi \smile \psi$ es un cociclo y por lo tanto tiene sentido considerar el símbolo $[\phi \smile \psi]$.

Supongamos que $\delta^q(\psi) = 0$ y calculamos

$$\delta^{p+q}(\phi \smile \psi) = \delta^p(\phi) \smile \psi + (-1)^p \phi \smile \delta^q(\psi) = \delta^p(\phi) \smile \psi,$$

luego $\delta^p(\phi) \smile \psi = \delta^{p+q}(\phi \smile \psi)$. Esto quiere decir que el producto copa de una cofrontera y un cociclo (en ese orden) es una cofrontera. De manera completamente análoga se demuestra que el producto copa de un cociclo y una cofrontera es una cofrontera. Consideremos a continuación $\phi' = \phi + \delta^{p-1}(\alpha)$ y $\psi' = \psi + \delta^{q-1}(\beta)$. Así,

$$\begin{aligned}\phi' \smile \psi' &= (\phi + \delta^{p-1}(\alpha)) \smile (\psi + \delta^{q-1}(\beta))\\ &= \phi \smile \psi + \phi \smile \delta^{q-1}(\beta) + \delta^{p-1}(\alpha) \smile \psi + \delta^{p-1}(\alpha) \smile \delta^{q-1}(\beta),\end{aligned}$$

donde los últimos tres términos son cofronteras según las observaciones precedentes. Luego $[\phi' \smile \psi'] = [\phi \smile \psi]$. □

Corolario 2.58. *El producto copa* $\smile$: $H^p(X;R) \times H^q(X;R) \to H^{p+q}(X;R)$ *es bilineal, asociativo y con unidad* $[1] \in H^0(X;R)$ *donde* $1(x) = 1 \in R$.

Proposición 2.59. *Sea* $f : X \to Y$ *una función continua. Entonces el homomorfismo inducido* $f^* : H^q(X;R) \to H^q(X;R)$ *es un morfismo de anillos graduados, esto es,* $f^*(a \smile b) = f^*(a) \smile f^*(b)$.

Demostración. Sean $a \in [\phi] \in H^p(X;R)$ y $b = [\psi] \in H^q(X;R)$. Entonces $f^*(a \smile b) = f^*[\phi \smile \psi] = [f^{\#}(\phi \smile \psi)]$. Por otro lado

$$\begin{aligned}f^*(a) \smile f^*(b) &= f^*[\phi] \smile f^*[\psi]\\ &= [f^{\#}(\phi)] \smile [f^{\#}(\psi)]\\ &= [f^{\#}(\phi) \smile f^{\#}(\psi)].\end{aligned}$$

Para ver que son iguales, sea $\sigma \in S_{p+q}(X)$. Por un lado

$$f^{\#}(\phi \smile \psi) = (\phi \smile \psi) \circ f_{\#}(\sigma) = (\phi \smile \psi)(f \circ \sigma) = \phi(f \circ \sigma \circ \lambda_p)\psi(f \circ \sigma \circ \rho_q)$$

y por otro

$$\begin{aligned} (f^{\#}(\phi) \smile f^{\#}(\psi))(\sigma) &= f^{*}(\phi)(\sigma \circ \lambda_p) f^{\#}(\psi)(\sigma \circ \rho_q) \\ &= \phi \circ f_{\#}(\sigma \circ \lambda_p)\psi \circ f_{\#}(\sigma \circ \rho_q) \\ &= \phi(f \circ \sigma \circ \lambda_p)\psi(f \circ \sigma \rho_q), \end{aligned}$$

lo que demuestra la afirmación. □

Teorema 2.60. *Sean $a \in H^p(X;R)$ y $b \in H^q(X;R)$. Entonces $a \smile b = (-1)^{pq} b \smile a$.*

Teorema 2.61 (Eilenberg y Zilber). *El morfismo de Alexander-Whitney, $A : S_q(X \times Y) \xrightarrow{\simeq} S_*(X) \otimes_R S_*(Y)$ es una equivalencia homotópica de cadenas. En particular*

$$H_*(X \times Y; R) \cong H_*(S_*(X) \otimes S_*(Y)).$$

Para continuar, abordaremos el producto de Kronecker. Este producto está definido de la siguiente manera

$$\begin{aligned} S^p(X) \times S_p(X) &\xrightarrow{\langle ?,? \rangle} R, \\ \langle \phi, c \rangle &\mapsto \phi(c). \end{aligned}$$

Este producto induce un homomorfismo

$$\begin{aligned} \alpha : H^p(X) &\to \mathrm{Hom}_R(H_p(X;R), R), \\ [\phi] &\mapsto \langle [\phi], ? \rangle = \phi(?), \end{aligned}$$

que en general no es un isomorfismo.

Proposición 2.62. *Supongamos que R es un dominio de ideales principales. Entonces hay una sucesión exacta*

$$0 \to \mathrm{Ext}_R(H_{n-1}(X;R), R) \to H^n(X;R) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Hom}_R(H_n(X;R), R) \to 0.$$

donde $\alpha[\phi][c] = \langle [\phi], [c] \rangle = \phi(c)$.

Proposición 2.63. *Sea R un dominio de ideales principales. Supongamos que $H_{q-1}(X, A; R)$ es finitamente generado. Sea T_{q-1} el submódulo de torsión de $H_{q-1}(X, A; R)$. Entonces*

$$\mathrm{Ext}^1(H_{q-1}(X, A; R), R) \cong T_{q-1}.$$

Si, además, $H_q(X, A; R)$ es finitamente generado y F_q es su parte libre, entonces

$$H^q(X, A; R) \cong F_q \oplus T_{q-1}.$$

Demostración. El funtor $\mathrm{Ext}^1_R(?,?)$ es aditivo en ambas entradas. Es decir,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1_R(M_1 \oplus M_2, N) &\cong \mathrm{Ext}^1_R(M_1, N) \oplus \mathrm{Ext}^1_R(M_2, R),\\ \mathrm{Ext}^1_R(M, N_1 \oplus N_2) &\cong \mathrm{Ext}^1_R(M, N_1) \oplus \mathrm{Ext}^1_R(M, N_2).\end{aligned}$$

Observamos también que el teorema sobre la estructura de grupos abelianos finitamente generados se extiende a R-módulos finitamente generados sobre un dominio de ideales principales.

Por hipótesis tenemos

$$H_{q-1}(X, A; R) \cong T_{q-1} \oplus F_{q-1},$$

luego

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1_R(H_{q-1}(X, A; R), R) &\cong \mathrm{Ext}^1_R(T_{q-1} \oplus F_{q-1}; R)\\ &= \mathrm{Ext}^1_R(T_{q-1}; R) \oplus \mathrm{Ext}^1_R(F_{q-1}; R)\\ &= \mathrm{Ext}^1_R(T_{q-1}; R).\end{aligned}$$

Ahora calcularemos $\mathrm{Ext}^1_R(T, R)$ donde T es un R-módulo de torsión. Por el teorema de estructura

$$T \cong R/(\gamma_1) \oplus \cdots \oplus R/(\gamma_n), \quad 0 \neq \gamma_i \in R,$$

y así,

$$\mathrm{Ext}^1_R(T, R) \cong \bigoplus \mathrm{Ext}^1_R(R/(\gamma_i), R).$$

Consideremos

$$0 \to R \xrightarrow{\mu} R \xrightarrow{\nu} R/(\gamma_0) \to 0$$

donde $\mu(r) = r_0 r$. De hecho, μ es inyectiva pues si $\mu(r) = r_0 r = 0$ implica que $r = 0$. Aplicando el funtor Hom a la sucesión anterior,

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(R/(\gamma_0), R) \xrightarrow{\nu^\dagger} \mathrm{Hom}_R(R, R) \xrightarrow{\mu^\dagger} \mathrm{Hom}_R(R, R) \to 0.$$

Tenemos que r se ve en $\mathrm{Hom}_R(R, R)$ como una multiplicación por r, que denotaremos como f_r. Así,

$$\mu^\dagger(f_r)(1) = f_r \mu(1) = f - r(r_0) = r_0 r,$$

lo que significa que conúc $\mu^\dagger \cong R/(r_0)$, y por ello $\mathrm{Ext}^1_R(T; R) \cong T$.

Para la segunda parte del teorema, notemos que si T es de torsión,

$$\mathrm{Hom}(T, R) = 0,$$

ya que si $f : T \to R$ y $x \in T$, entonces $rx = 0$ implica que $f(rx) = rf(x) = 0$ y esto a su vez que $f(x) = 0$. Luego $f = 0$. Como $H_q(X, A; R)$ es finitamente generado, $H_q(X, A; R) \cong T_q \oplus F_q$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_R(H_q(X,A,R),R) &\cong \mathrm{Hom}_R(T_q,R)\oplus \mathrm{Hom}_R(F_q,R)\\ &\cong \mathrm{Hom}_R(F_q,R)\\ &\cong \mathrm{Hom}_R(R\oplus\cdots\oplus R,R)\\ &\cong \mathrm{Hom}_R(R,R)\oplus\cdots \mathrm{Hom}_R(R,R),\\ &\cong R\oplus\cdots\oplus R\cong F_q.\end{aligned}$$

Aplicando lo anterior a la sucesión

$$0\to \mathrm{Ext}^1_R(H_{q-1}(X,A;R),R)\to H^q(X,A;R)\to \mathrm{Hom}_R(H_q(X,A;R),R)\to 0,$$

obtenemos

$$0\to T_{q-1}\to H^q(X,A;R)\to F_q\to 0.$$

Como F_q es libre, la sucesión se escinde y

$$H^q(X,A;R)\cong T_{q-1}\oplus F_q,$$

como se pedía. □

Proposición 2.64. *Sea T_g la superficie orientable de género g. Entonces*

$$H^q(T_g;R)\cong\begin{cases}R, & q=0,2,\\ R^{2g}, & q=1,\\ 0, & q>2.\end{cases}$$

Demostración. Ya que

$$H_q(T_g;R)\cong\begin{cases}R, & q=0,2,\\ R^{2g}, & q=1,\\ 0, & q>2.\end{cases}$$

Por la proposición anterior, $H^q(T_g;R)=H_q(T_g;R)$, ya que la homología es libre en todas las dimensiones. □

Proposición 2.65. *Sea R un dominio de ideales principales. Entonces*

1. *si* $\mathrm{car}R=2$,
$$H^q(N_h;R)=\begin{cases}R, & q=0,\\ R^h, & q=1,\\ 0, & q>2;\end{cases}$$
2. *si* $\mathrm{car}R\neq 2$,
$$H^q(N_h;R)=\begin{cases}R, & q=0,\\ R^{h-1}, & q=1,\\ R/2R, & q=2,\\ 0, & q>2,\end{cases}$$

donde $N_h = \mathbb{RP}^2 \# \cdots \# \mathbb{RP}^2$.

Demostración. Si $2R = 0$, $R_{(2)} = \text{núc}\,(? \cdot 2) = R$, y

$$H_q(N_h; R) = \begin{cases} R, & q = 0, 2, \\ R^h, & q = 1, \\ 0, q > 2, \end{cases}$$

y por la proposición anterior, $H^q(N_h; R) \cong H_q(N_h; R)$.

Puesto que

$$H_q(N_h; R) = \begin{cases} R, & q = 0, \\ R^{h-1} \otimes R/2R, & q = 1, \\ R_{(2)}, & q = 2, \\ 0, & q > 2, \end{cases}$$

y por la proposición anterior,

$$H^q(N_h; R) = \begin{cases} R, & q = 0, \\ T_0 \oplus F_1 \cong R, & q = 1, \\ T_1 \oplus F_2 \cong R/2R, & q = 2, \\ 0, & q > 2, \end{cases}$$

lo que concluye la demostración. □

Ejercicios

2.1. Demostrar que la topología de $|\mathcal{S}(K)|$ no depende de la numeración de los vértices.

2.2. Ver que $|K|$ cumple la tercera condición de poliedro celular.

2.3. Demostrar que $\delta^n \circ \delta^{n-1} = 0$.

2.4. Ver que el isomorfismo manda a δ^n en ∂^*_{n+1}.

2.5. Sea el simplejo con $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ con $K = \{v_1, v_2, v_3, v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1\}$. Demostrar que

$$H^n(K; G) \cong \begin{cases} G, & n = 0, 1, \\ 0, & n \neq 0, 1. \end{cases}$$

2.6. Ver que $f^\#$ definida para $[\check{\mathcal{S}}(L), G]$ es un morfismo de cocadenas, esto es, que conmuta con los operadores cofrontera en $\mathcal{S}^n$.

2.7. Ver que las dos definiciones de cohomología de Čeck son equivalentes.

2.8. Una función $f : X \to D$ (donde D es un espacio con la topología discreta) es continua si, y sólo si, es localmente constante.

2.9. Comprobar que la construcción $|\cdot|$ es funtorial.

2.10. Demostrar que

$$H^q(*; G) = \begin{cases} 0, & q = 0, \\ G, & q \neq 0. \end{cases}$$

2.11. Demostrar que $H^*(\prod C^*_\alpha) \cong \prod_\alpha H^q(C^*_\alpha)$.

2.12. Demostrar el Teorema 2.31.

2.13. Demostrar que $\phi^{-q}_{q+1}\delta^q_{\mathcal{D}}\psi^{-1}_q(\alpha)$ es un cociclo y que su clase de cohomología no depende de la elección de $\psi^{-1}_q(\alpha)$.

2.14. Demostrar que $f^\# : S^*(Y, B) \to S^*(X, A)$ es un morfismo de cocadenas.

2.15. Demostrar que las tres definiciones de cohomología reducida son equivalentes.

2.16. Demostrar que si $F|_{S^{n-1}} = f$, entonces el cuadrado en (2.2) conmuta.

2.17. Demostrar la Proposición 2.50.

2.18. Demostrar que $S_*(X) \otimes S_*(Y)$ es un complejo de cocadenas.

2.19. Demostrar que el morfismo Alexander-Whitney es un morfismo de cadenas.

2.20. Demostrar que el producto de Kronecker es R-bilineal y pasa a cohomología.

3

Haces vectoriales

3.1. Módulos proyectivos

Para estudiar anillos muy complicados (como $C(X;\mathbb{R})$), hay que entender los R-módulos M (M es un grupo abeliano con una acción lineal $R \times M \to M$).

El primer paso es estudiar los módulos libres finitamente generados, es decir, cuando $M \cong R \oplus \cdots \oplus R$.

El segundo paso es estudiar los módulos proyectivos finitamente generados, lo que permite asociar a R un grupo abeliano calculable $K_0(R)$, que es la teoría K de R de dimensión 0.

Definición 3.1. *Consideremos un grupo abeliano M y su anillo de endomorfismos* $\mathrm{End}(M) = \{\phi : M \to M\}$ *con las operaciones* $(\phi + \psi)(m) = \phi(m) + \psi(m)$ *y* $\phi \cdot \psi = \phi \circ \psi$*, donde* $1 = \mathrm{id} : M \to M$*.*

Un R-módulo es un grupo abeliano M junto con un homomorfismo de anillos $a : R \to \mathrm{End}(M)$, lo cual define una acción $R \times M \to M$ dado por $r \cdot m = \alpha(r)(m)$.

Queremos estudiar con algo de más detalle los módulos proyectivos.

Definición 3.2. *Un R-módulo P es proyectivo si, dados R-módulos C y B con homomorfismos $f : P \to C$ y $y : B \to C$, existe $F : P \to B$ tal que $g \circ F = f$.*

Sea R un anillo con 1 y $\mathcal{P}(R)$ la categoría de R-módulos proyectivos finitamente generados y sus homomorfismos de R-módulos. Consideremos parejas (G, f), donde G es un grupo abeliano y $f : \mathrm{Obj}(\mathcal{P}(R)) \to G$ es una función con la siguiente propiedad: para toda sucesión exacta $0 \to P \to P' \to P'' \to 0$ en $\mathcal{P}(R)$ se tiene que $f(P') = f(P) + f(P'')$.

Se puede demostrar que existe una pareja $(K_0(R), \gamma)$ con la siguiente propiedad: dada otra pareja (G, f) existe un único homomorfismo de grupos $\alpha : K_0(G) \to G$ tal que

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Obj}(\mathcal{P}(R)) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "f"'] & K_0(G) \arrow[d, "\alpha"] \\
& G
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Ejemplo 3.3. Sea R un cuerpo. Los R-módulos proyectivos finitamente generados son los espacios vectoriales de dimensión finita, $K_0(R) \cong \mathbb{Z}$ y $\gamma(m) = \dim m$.

Definición 3.4. *Sea S un semigrupo abeliano. Definimos en $S \times S$ la siguiente relación $(a, b) \sim (c, d) \iff \exists s \in S, a+d+s = b+c+s$. Queda definido el grupo de Grothendieck $G(S) = S \times S/\sim$ con $[a_1 + b_1] + [a_2 + b_2] = [a_1 + a_2, b_1 + b_2]$.*

El inverso de $[a, b]$ en el grupo de Grothendieck es $[b, a]$. Además, existe un homomorfismo de semigrupos

$$\begin{aligned} i : S &\to G(S), \\ S &\mapsto [s, 0], \end{aligned}$$

que es inyectivo si, y sólo si, S es un semigrupo de cancelación.

Consideremos las clases de isomorfismo de módulos proyectivos finitamente generados. Sea P un módulo proyectivo finitamente generado. Existe un R-módulo Q tal que $P \oplus Q$ es libre, esto es, $P \oplus Q \cong R^n$. Así,

$$\alpha : P \hookrightarrow P \oplus Q \cong R^n \hookrightarrow R^\infty$$

y $P \cong \alpha(P) \subseteq R^\infty$. Luego, si S denota a las clases de equivalencia de isomorfismo de R-módulos proyectivos, es un conjunto. Tenemos que S es un semigrupo con la suma directa. Definimos $K_0(R) := G(S)$.

Supongamos que $R = C(X, \mathbb{R})$. Para calcular $K_0(R)$, es preciso estudiar a los $C(X, \mathbb{R})$-módulos proyectivos finitamente generados. Para construir un $C(X, \mathbb{R})$-módulo que no sea libre es necesario un grupo abeliano que actúe sobre $C(X, \mathbb{R})$.

Sea $X = M^n$ una variedad diferenciable. Para cada $x \in M$, tenemos el espacio tangente $T_x M$ es un espacio vectorial real de dimensión n. Consideremos

$$C(X, \coprod_{x \in M} T_x M).$$

Pero esto no es un grupo ya que si $\phi, \psi : X \to \bigcup_{x \in M} T_x M$, tenemos que $\phi(x) \in T_{x'} M$ y $\psi(x) \in T_{x''} M$ y estos espacios vectoriales no necesariamente coinciden. Las funciones que sí podemos sumar son de la forma $\phi(x) \in T_x M$, pues $(\phi + \psi)(x) = \phi(x) + \psi(x) \in T_x M$.

Definición 3.5. *Hacemos*

$$\Gamma(X, \coprod_{x\in M} T_xM) = \left\{\phi : X \to \bigcup_{x\in M} T_xM : \phi(x) \in T_xM\right\}$$

y definimos

$$\begin{aligned} C(X,\mathbb{R}) \times \Gamma(X, \amalg T_xM) &\to \Gamma(X, \amalg T_xM), \\ (f\cdot\phi)(x) &\mapsto f(x)\cdot\phi(x). \end{aligned}$$

Requerimos darle a $\coprod_{x\in M} T_xM$ para poder hablar de funciones continuas.

Sea $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ un atlas de M; sabemos que $\phi_\alpha(U_\alpha)$ es un abierto de $\mathbb{R}^m$. Podemos definir

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) &\to U_\alpha \times \mathbb{R}^n \\ v &\mapsto (p(v), (t_1, \ldots, t_n)), \end{aligned}$$

donde

$$v = \sum_{i=1}^{n} t_i \frac{\partial}{\partial x_i}(p(v))$$

y $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)$ dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial (f\circ\phi_\alpha^{-1})}{\partial e_i}(\phi_\alpha(x))$$

conforman una base para T_xM.

Tenemos que TM es una variedad diferenciable. Sean $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ cartas para M. La función $\hat{\phi}_\alpha$ es una biyección ya que $p^{-1}(U_\alpha) = \bigcup_{x\in U_\alpha} T_xM$ y cada base nos da un isomorfismo. La estructura de variedad de TM se obtiene con la cubierta $\{p^{-1}(U_\alpha)\}_\alpha$ y las biyecciones $\hat{\phi}_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to \mathbb{R}^{2n}$.

Si tomamos un atlas maximal para M, los dominios de las cartas son una base de la topología de TM y cada $\hat{\phi}_\alpha$ es un homeomorfismo.

Queremos considerar ahora un espacio cualquiera M y objetos con propiedades análogas a las de TM.

Definición 3.6. *Un haz vectorial (real) de dimensión n ξ consiste en una función continua $p : E \to X$ tal que para cada $x \in X$ la fibra $p^{-1}(x)$ tiene una estructura de espacio vectorial de dimensión n. Además, existe una cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ de X y homeomorfismos $\psi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ que satisfacen lo siguiente.*

1. *El diagrama*

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\psi_\alpha"] \arrow[dr, "p|"'] & U_\alpha \times \mathbb{R}^n \arrow[d, "\pi_1"] \\ & U_\alpha \end{tikzcd}$$

conmuta.

2. Se cumple que $\psi_\alpha|_{p^{-1}(x)} : p^{-1}(x) \to \{x\} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo lineal.

Ejemplo 3.7. El haz producto es quizá el ejemplo más sencillo de haz vectorial. En tal caso, $E = X \times \mathbb{R}^n$ y $\pi_1 : E \to X$.

Ejemplo 3.8. El haz tangente a una variedad diferenciable, por ser precisamente por motivar la definición, es un haz vectorial.

Reemplazando a $\mathbb{R}^n$ por $\mathbb{C}^n$ en la definición de haz tangente, obtenemos la noción de haz tangente complejo. De hecho, se puede dar una definición ligeramente más general.

Definición 3.9. *Un haz vectorial (real o complejo) ξ es una función continua $p : E \to X$ tal que para cada $x \in X$ el conjunto $p^{-1}(x)$ es un espacio vectorial (real o complejo) de manera que existe una cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ de X y para cada α un homeomorfismo $\psi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{K}^n$ (donde $K = \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$), que satisfacen las mismas propiedades de la definición anterior.*

Escolio 3.10. Sea $\xi = (E, p, X)$ un haz vectorial. Definimos una función $d : X \to \mathbb{N}$ dada por $d(x) = \dim p^{-1}(x)$. Por definición, esta función es localmente constante ya que en un abierto U_α es constante. Esto implica que d es continua y por lo tanto constante en cada componente conexa de X.

Definición 3.11. *Sea $\xi = (E, p, X)$ un haz vectorial. Definimos*

$$\Gamma(\xi) = \{s : X \to E : s \textit{ es continua}, p \circ s = \mathrm{id}_x\}$$

y a cada elemento de este conjunto lo denominamos sección del haz.

Vemos que $\Gamma(\xi)$ es un grupo abeliano con la suma

$$(s_1 + s_2)(x) = s_1(x) + s_2(x) \in p^{-1}(x) \tag{3.1}$$

lo cual tiene sentido por que si s es una sección, $s(x) \in p^{-1}(x)$.

Definimos la acción

$$C(X, \mathbb{R}) \times \Gamma(\xi) \to \Gamma(\xi) : (f \cdot s)(x) \mapsto f(x)s(x) \in p^{-1}(x) \tag{3.2}$$

que por el Ejercicio 3.8, esta acción es continua.

Escolio 3.12. Cuando se trata del haz tangente, las secciones se llaman campos vectoriales.

Definición 3.13. *Un subhaz de un haz $\xi = (E, p, X)$ es un subconjunto $E' \subseteq E$ dtal que $E' \cap p^{-1}(X)$ es un subespacio vectorial de $p^{-1}(X)$ para cada $x \in X$ y $p|_{E'} : E' \to X$ es un haz vectorial.*

Definición 3.14. *Sean $\xi = (E, p, X)$ y $\eta : (E', p', Y)$ haces vectoriales. Un morfismo de haces es una pareja (F, f) de funciones continuas $F : E \to E'$ y $f : X \to Y$ tales que*

1. el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{F} & E' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

conmuta y

2. la restricción $F|_{p^{-1}(x)} : p^{-1}(x) \to p'^{-1}(f(x))$ es lineal para cada $x \in X$.

La última condición es equivalente a tener una función continua $F : E \to E'$ tal que F manda cada fibra de ξ homomórficamente en una fibra de η.

Dada F, claramente tenemos definida una función $f : X \to Y$ de manera que el cuadrado de la definición conmuta. Tal f es continua pues $p : E \to X$ es abierta y por lo tanto una identificación.

Decimos que un morfismo de haces F es monomorfismo si $F|_{p^{-1}(x)}$ es inyectiva para cada $x \in X$. Diremos que F es un epimorfismo si $F|_{p^{-1}(x)}$ es suprayectiva para cada $x \in X$. Decimos que F es un mapeo de haces si $F|_{p^{-1}(x)}$ es un isomorfismo lineal para cada $x \in X$.

Definición 3.15. *Si F es un mapeo de haces y f es un homeomorfismo, entonces decimos que F es una equivalencia de haces. Cuando $X = Y$, $f = \mathrm{id}$ y F es un isomorfismo en cada fibra diremos que f es un isomorfismo de haces. En otras palabras, cuando existe un morfismo de haces $f' : E' \to E$ tal que $F \circ F' = \mathrm{id}$ y $F' \circ F = \mathrm{id}$.*

Sea $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Consideremos a $GL(n, K)$, el grupo general lineal que consta de todas las matrices invertibles de $n \times n$ con entradas en K. Le damos una topología a $GL(n, K)$ considerándolo como subconjunto de $M(n, K)$ el espacio vectorial de matrices de $n \times n$ con la topología usual. Esta topología coincide con la del supremo como espacio de operadores lineales y con la topología compacto-abierta como subespacio de funciones continuas de K^n en K^n.

Escolio 3.16. El grupo $GL(n, K)$ es también un grupo de Lie ya que $M(n, K)$ es un espacio vectorial de dimensión finita, por lo que tiene una estructura diferenciable canónica. Además, $\det : M(n, K) \to K$ es continua y $GL(n; K) = \det^{-1}(K \setminus \{0\})$, luego $GL(n, K)$ es un abierto en una variedad, por lo que es una variedad diferenciable.

Proposición 3.17. *Sean V y W espacios vectoriales de dimensión n y m, respectivamente. Sea $L(V, W) = \{f : V \to W : f \text{ es lineal}\}$ con la topología dada por el isomorfismo $L(V, W) \cong M(m \times n, K) \cong K^{nm}$. Sea X un espacio topológico. Entonces una función $A : X \to L(V, W)$ es continua si, y sólo si, $a : X \times V \to W$ es continua, donde $a(x, v) = A(x)(v)$.*

Demostración. Supongamos que A es continua. Consideremos la composición

$$\begin{aligned} X \times V \to L(V,W) \times V & \to W, \\ (x,v) \mapsto (A(x),v) & \mapsto A(x)(v) \end{aligned}$$

que es continua, por ser A continua y por el Ejercicio 3.12.

Supongamos que $a : X \times V \to W$ es continua. Tomemos bases $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V y $\{w_1, \dots, w_m\}$ de W. La función $A : X \to L(V,W)$ es continua si, y sólo si, cada componente de la representación matricial es continua. Para cada i y j definimos

$$x \mapsto \langle a(x,v_j), w_j\rangle \mapsto \langle A(x)(v_j), w_i\rangle,$$

que es continua pues A es continua y el producto punto también. Por el Ejercicio 3.11, $\langle A(x)(v_j), w_i\rangle$ es precisamente la entrada (i,j) de $A(x)$. $\square$

Teorema 3.18. *Sean $\xi = (E,p,X)$ y $\eta = (E',p',X')$ haces vectoriales y $F : E \to E'$ un morfismo de haces sobre* id_X*, de modo que $F|_{p^{-1}(x)} : p^{-1}(x) \to p'^{-1}(x)$ es un isomorfismo lineal. Entonces F es un isomorfismo lineal.*

Demostración. Sea $x \in X$ y U una vecindad de x, por lo cual tenemos las trivializaciones

$$\phi : p^{-1}(V) \xrightarrow{\cong} U \times K^n, \quad \psi : p^{-1}(V) \xrightarrow{\cong} U \times K^n.$$

Consideremos la composición $\psi \circ F \circ \phi^{-1} : U \times K^n \to U \times K^n$. Como ϕ, F y ψ mandan fibras en fibras, esta composición es de la forma $(x,v) \mapsto (x, a(x,v))$. Como ϕ y ψ son homeomorfismos, entonces $F|_{p^{-1}(x)}$ es continua si, y sólo si, a es continua.

Como ϕ, F y ψ son lineales para cada $x \in U$, entonces $a(x,?) : K^n \to K^n$ es lineal. Es decir, tenemos la función $A : U \to L(K^n, K^n)$ dada por $A(x)(u) = a(x,v)$. Por la proposición anterior, a es continua. Por lo tanto, $F|_{p^{-1}(v)}$ es continua si, y sólo si, A es continua. Por hipótesis, F es isomorfismo en fibras y por ser trivializaciones ϕ y ψ también son isomorfismos en fibras. Como $GL(n,K) \xrightarrow{?^{-1}} GL(n,K)$ es continua componiendo resulta que $U \xrightarrow{A} GL(n,K) \xrightarrow{?^{-1}} GL(n,K)$ es continua. Pero esta composición es la representación local de F^{-1} restringida a $p^{-1}(U)$, luego F^{-1} es continua. $\square$

Definición 3.19. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y $\eta = (E,p,X)$ un haz vectorial sobre Y. Definimos la retrotracción de η bajo f, $f^*(\eta)$, como $f^*(E) = \{(x,v) \in X \times E : f(x) = p(v)\}$. De este modo, el cuadrado*

$$\begin{tikzcd} f^*(E) \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "\overline{p}"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

conmuta.

Afirmamos que $f^*(\eta)$ es un haz vectorial. Tenemos que

$$p^{-1}(x) = \{(x,v) : f(x) = p(v)\} = \{x\} \times p^{-1}(f(x));$$

por lo tanto, podemos definir $(x,v_1)+(x,v_2) = (x,v_1+v_2)$ y $\lambda(x,v) = (x,\lambda v)$. Para las trivializaciones de $f^*(\eta)$ sean $\{\phi_\alpha : p^{-1}(V_\alpha) \to V_\alpha \times K^n\}_\alpha$ las trivializaciones locales de η. Tomamos como cubierta abierta de X a $\{f^{-1}(V_\alpha)\}_\alpha$ y definimos

$$\psi_\alpha : p^{-1}(f^{-1}(V_\alpha) \to f^{-1}(V_\alpha) \times K^n$$

a través de $\psi_\alpha(x,v) = (x, \pi_2 \circ \phi_\alpha(v))$. Su inversa es

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_\alpha : f^{-1}(V_\alpha) \times K^n &\to \tilde{p}^{-1}(f^{-1}(V_\alpha)), \\ (x,w) &\mapsto (x, \phi_\alpha^{-1}(f(x),w)). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Escolio 3.20. La pareja $(\overline{f}, f)$ definida por una retrotracción es un mapeo de haces, ya que $\tilde{f}_{\tilde{p}^{-1}(x)} : p^{-1}(x) \to p^{-1}(f(x))$, pero $p^{-1}(x) = \{x\} \times p^{-1}(f(x))$ y $(x,v) \mapsto v$.

Definición 3.21. *Sean $\xi_1 = (E_1, p_1, X_1)$ y $\xi_2 = (E_2, p_2, X_2)$ haces vectoriales. Definimos el haz producto $\xi_1 \times \xi_2 = (E_1 \times E_2, p_1 \times p_2, X_1 \times X_2)$ donde $(p_1 \times p_2)^{-1}(x_1,x_2) = p_1^{-1}(x_1) \times p_2^{-1}(x_2)$. Sean $\{\phi_\alpha : p_1^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times K^n\}$ y $\{psi_\alpha : p_{frm-e}^{-1}(V_\beta) \to V_\beta \times K^m\}$ sendas trivializaciones locales de ξ_1 y ξ_2. La trivialización local para el haz producto es*

$$\{\phi_\alpha \times \psi_\alpha : p_1^{-1}(U_\alpha) \times p_2^{-1}(V_\beta) \to (U_\alpha \times K^n) \times (V_\beta \times K^m) \cong U_\alpha \times V_\beta \times K^{n+m}\}.$$

Sean $\xi_1 = (E_1, p_1, X)$ y $\xi_2 = (E_2, p_2, X)$ haces vectoriales. La suma de Whitney $\xi_1 \oplus x_2 = (E(\xi_1 \oplus \xi_2), q, X)$ está definida por

$$E(\xi_1 \oplus \xi_2) = \{(v_1, v_2 : p_1(v_1) = p_2(v_2)\}$$

y

$$q(v_1,v_2) = p_1(v_1) = p_2(v_2).$$

Definimos

$$\begin{aligned} \gamma_{(\alpha,\beta)} : q^{-1}(U_\alpha \cap V_\beta) &\to (U_\alpha \cap V_\beta) \times K^n \times K^m, \\ (v_1,v_2) &\mapsto (p_1(v_1), \pi_2(\phi_\alpha(v_\alpha)), \pi_2(\phi_\beta(v_\beta))) \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{(\alpha,\beta)} : (U_\alpha \cap V_\beta) \times K^n \times K^m &\to q^{-1}(U_\alpha \cap V_\beta), \\ (X,a,b) &\mapsto (\phi_\alpha^{-1}(x,a), \psi_\beta^{-1}(x,b)). \end{aligned}$$

Las fibras de q son espacios vectoriales donde $q^{-1}(v) = \{(v_1,v_2) : p_1(v_1) = p_2(v_2) = x\}$. Entonces

$$(v_1,v_2) + (v_1',v_2') = (v_1+v_1', v_2+v_2') \in p_1^{-1}(x) \oplus p_2^{-1}(x).$$

Definición 3.22. *Definimos la variedad de Stiefel de n-marcos ortonormales en K^m, $V_n(K^m)$ como*

$$V_n(K^m) := \{(v_1, \ldots, v_n) \in K^m \times \cdots \times K^m : v_i \cdot v_j = \delta_{i,j}\}.$$

Para ver que $V_n(K^m)$ es una variedad diferenciable, consideremos las funciones

$$f_{i,j} : \mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$
$$(v_1, \ldots, v_n) \mapsto \begin{cases} \langle v_i, v_j \rangle, & i \neq j, \\ \langle v_i, v_j \rangle - 1, & i = j. \end{cases}$$

con las cuales construímos la función

$$G : \mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}} \tag{3.4}$$

y así $V_n(\mathbb{R}^m) = G^{-1}(0)$.

Ejemplo 3.23. Si $n = 1$, $V_1(\mathbb{R}^m) = S^{m-1}$.

Definición 3.24. *La variedad de Grassmann de subespacios de dimensión n en K^m está definida por*

$$G_n(K^m) := \{W \subseteq K^m : W \text{ es un subespacio de dimensión } n\}.$$

Tenemos una función $p : V_n(K^m) \to G_n(K^m) : (v_1, \ldots, v_n) \mapsto \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$. Damos a $G_n(K^m)$ la topología cociente.

Definición 3.25. *Definimos el haz vectorial $\gamma_m^n = (E(\gamma_m^n), \rho, G_n(K^m))$ donde $E(\gamma_m^n) = \{(V, v) \in G_n(K^m) \times K^m : v \in V\}$ que se denomina haz tautológico.*

Lema 3.26. *Sea $\overline{\gamma}_m^{m-n}$ el haz sobre $G_n(K^m)$ dado por $E(\overline{\gamma}_m^{m-n}) = \{(V, w) \in G_n(K^m) \times K^m : w \in V^\perp\}$. Entonces $\gamma_m^n \oplus \overline{\gamma}_m^{m-n} = \epsilon^m$, es decir, el haz producto de dimensión m sobre $G_n(K^m)$.*

Demostración. Tenemos

$$\begin{tikzcd} E(\gamma_m^n \oplus \overline{\gamma}_m^{m-n}) \arrow[rr, dashed, "f"] \arrow[dr] & & G_n(K^m) \times K^m \arrow[dl] \\ & G_n(K^m) & \end{tikzcd}$$

donde $f((V, v), (V, w)) = (V, v + w)$. Esta función es continua ya que es la restricción de una función continua, además de ser claramente lineal en fibras. Necesitamos demostrar que f es inyectiva en fibras. Ciertamente, pues $f((V, v), (V, w)) = (V, v + w) = (V, 0)$ implica que $v + w = 0$, y esto a su vez que $v = -w$. Pero $v \in V$ y $w \in V^\perp$, luego $v = w = 0$. Como ambos espacios son de dimensión m, entonces f es un isomorfismo en fibras, y por un teorema anterior es un isomorfismo de haces. $\square$

Definición 3.27. *Sea $\xi = (E, p, X)$ un haz vectorial de dimensión n. Una función continua $g : E \to K^m$ donde $n \leq m \leq \infty$. Una función continua se denomina función de Gauss si $g|_{E_x} : E_x \to K^m$ es un homomorfismo lineal.*

Proposición 3.28. *Existe una función de Gauss $g : E \to K^m$ si, y sólo si, existe una función cotninua $f : X \to G_n(K^m)$ tal que $f^*(\gamma_m^n) \cong \xi$.*

Demostración. Por un ejercicio, que $f^*(\gamma_m^n)$ sea isomorfo a ξ es equivalente a tener el mapeo de haces

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r] \arrow[d] & E(\gamma_m^n) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d] & G_n(K^m) \times K^m \arrow[dl, "\pi_1"] \\
X \arrow[r, "f"'] & G_n(K^m) &
\end{tikzcd}$$

Tenemos que $i \circ F$ es monomorfismo de hace ya que F es isomorfismo. Por el Ejercicio anterior hay una función de Gauss para ξ.

Recíprocamente, sea $g : E \to K^m$ una función de Gauss para ξ. Queremos definir un mapeo de haces (F, f) de la siguiente manera. Sea $f(x) = g \circ p^{-1}(x)$ y $F(e) = (f \circ p(e), g(e))$ Para ver que f es continua, consideremos la trivialización local de ξ, $\{\phi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times K^m\}$ y la restricción de f a U_α, $f|_{U_\alpha} : U_\alpha \to G_n(K^m)$. Vamos a definir $h_\alpha : U_\alpha \to V_n(K^m)$ a través de

$$h_\alpha(x) = (g\phi_\alpha^{-1}(x, e_1), \ldots, g\phi_\alpha^{-1}(x, e_m))$$

donde $\{e_i\}_{i=1}^m$ es la base canónica K^m. Dada la topología de $V_n(K^m)$, h_α es continua. Tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
U_\alpha \arrow[r, "h_\alpha"] \arrow[dr, "f|_{U_\alpha}"'] & V_n(K^m) \arrow[d] \\
& G_n(K^m)
\end{tikzcd}$$

que conmuta por la definición de $f|_{U_\alpha}$. Luego f es continua. Como $f(e) = (fp(e), g(e)$ y las componentes son continuas, F es continua. □

Proposición 3.29. *Todo haz vectorial de dimensión n sobre un espacio paracompacto tiene una función de Gauss.*

Demostración. Sea $\xi = (E, p, X)$ un haz vectorial de dimensión n. Supongamos que X compacto. Entonces existe una cubierta abierta finita $\{U_i\}$ y trivializaciones locales $\phi_i : p^{-1}(U_i) \to U_i \times K^n$ y una partición de la unidad subordinada a la cubierta. Esto es, existe una familia de funciones continuas $\eta_i : X \to I$ $\eta_i : X \to I$, $i = 1, \ldots, r$ tales que $\sum_{i=1}^r \eta_i(x) = 1$, donde sop$\eta_i \subseteq U_i$. Definimos $g_i : E \to K^n$ como

$$g_i(e) = \begin{cases} \eta_i(p(e))\pi_1(\phi_i(e)), & e \in p^{-1}(U_i), \\ 0, & e \notin p^{-1}(U_i). \end{cases} \tag{3.5}$$

Definimos $g : E \to K^n$ como $g(e) = (g_1(e), \dots, g_r(e))$. Para el caso en cual X es paracompacto, se puede demostrar que existe una cubierta abierta numerable $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $\xi|_{U_i}$ es trivial, esto es, isomorfo al haz producto. Usando esto procedemos de la misma manera con una partición de la unidad $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$ se definen $g : E \to K^n$ y $g : E \to K^{\infty}$. □

Definición 3.30. *Sea X un espacio paracompacto. Denotamos por* $\mathrm{Vect}_K^n(X)$ *al conjunto de clases de isomorfismo de haces vectoriales de dimensión n sobre X ($K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$).*

Teorema 3.31. *Hay una biyección entre $[X, G_n(K^{\infty})]$ y $\mathrm{Vect}_K^n(X)$ dada por $[f] \mapsto [f^*(\gamma_{\infty}^n)]$.*

Demostración (Esquema). Lo primero es ver que la biyección β está bien definida y para esto se demuestra que, dado un haz $\xi = (E, p, X)$ y $f_0, f_1 : B \to X$ donde B es paracompacto, entonces $f_0 \simeq f_1$ implica que $f_0^*(\xi) \cong f_1^*(\xi)$. Que β sea suprayectiva es consecuencia de las dos proposiciones anteriores, y sólo resta demostrar que β es inyectiva. □

Teorema 3.32 (Serre-Swan). *Sea X un espacio paracompacto de dimensión finita y con un número finito de componentes. Entonces la categoría de K-haces vectoriales sobre X es equivalente a la categoría de $C(X, K)$-módulos proyectivos finitamente generados.*

La equivalencia entre categorías garantizada por el teorema se da asociando a un haz $\xi = (E, p, X)$ el módulo de las secciones del haz.

Las condiciones en X garantizan que ξ sea de tipo finito, es decir, que existe una cubierta finita $\{U_i\}_{i=1}^{n}$ tal que el haz restringido a U_i es trivial.

Bajo estas hipótesis, tenemos un diagrama de retrotracción

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{F} & E(\gamma^n) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow[f]{} & G_n(K^m) \end{array}$$

donde la dimensión de ξ es n y $m = kn$. Usando un teorema anterior, podemos obtener un haz $E(\overline{\gamma}_m^{m-n}) \to G_n(K^m)$ tal que $\gamma_m^n \oplus \overline{\gamma}_m^{m-n} \cong \epsilon^m$. Consideremos la retrotracción $f^*(\overline{\gamma}_m^{m-n})$. Entonces

$$\begin{aligned} f^*(\overline{\gamma}_m^{m-n}) \oplus \xi &= f^*(\overline{\gamma}_m^{m-n}) \oplus f^*(\gamma_m^n) \\ &\cong f^*(\overline{\gamma}_m^{m-n} \oplus \gamma_m^n) \\ &\cong f^*(\epsilon^m) \\ &\cong \epsilon^m, \end{aligned}$$

donde el último miembro es el haz trivial sobre X.

Consideremos un X y las clases de isomorfismo de haces vectoriales reales o complejos sobre X. Estos conforman un semigrupo con la suma de Whitney. Aplicando la construcción de Grothendieck a este semigrupo se obtiene un grupo abeliano que se denota como $K(X)$ para el caso complejo y como $KO(X)$ para el caso real.

Corolario 3.33. *Bajo las hipótesis del teorema de Serre-Swan, $K(X) \cong K(C(X,\mathbb{C}))$ y $KO(X) \cong K(C(X,\mathbb{R}))$.*

Sea X un espacio y $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ una cubierta abierta. A $\mathcal{U}$ le asociamos el nervio $N\mathcal{U}$, cuyos q-simplejos son de la forma

$$\{\{U_{\alpha_0}, \ldots, U_{\alpha_q}\} : U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_q} \neq 0\}.$$

A $N\mathcal{U}$ le asociamos el conjunto simplicial $\check{\mathcal{S}}_q(N\mathcal{U}) = \{(U_{\alpha_0}, \ldots, U_{\alpha_q}) : U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_q} \neq 0\}$. Con éste definimos un complejo de cocadenas

$$\check{\mathcal{S}}^q(N\mathcal{U}) = \mathbf{Conj}(\check{\mathcal{S}}_q(N\mathcal{U}), G)$$

donde G es un grupo abeliano. Tenemos el operador

$$\begin{aligned} \check{\mathcal{S}}^q(N\mathcal{U}) &\xrightarrow{\delta^q} \check{\mathcal{S}}^{q+1}(N\mathcal{U}), \\ \psi &\mapsto \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \psi(U_{\alpha_0}, \ldots, \hat{U}_{\alpha_i}, \ldots, U_{\alpha_{q+1}}). \end{aligned}$$

Habíamos definido

$$\check{H}^*(\mathcal{U}; G) = H^*(\check{\mathcal{S}}^*(N\mathcal{U}))$$

y

$$\check{H}^q(X; G) = \text{colím}_{\mathcal{U}} H^*(\mathcal{U}; G).$$

Nuestro objetivo es generalizar lo anterior sobre X.

Sea $\xi = (E, p, X)$ un haz vectorial de dimensión n con una cubierta trivializante $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Observemos que si $\phi \in \check{\mathcal{S}}^q(N\mathcal{U})$, tal función es $\phi(U_{\alpha_0}, U_{\alpha_1}) \in G$ donde $U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \neq \emptyset$.

Supongamos que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ y consideremos $\phi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times K^n$ y $\phi_\beta : p^{-1}(U_\beta) \times K^n$. Entonces $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : U_\alpha \cap U_\beta \times K^n \to U_\alpha \cap U_\beta \times K^n$, donde

$$(x, v) \mapsto (x, \lambda_{\alpha,\beta}(x, v));$$

por la ley exponencial, obtenemos una función $g_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(n, K)$.

Definición 3.34. *Sea X un espacio. Consideremos la categoría de abiertos de X. Una pregavilla en X es un funtor contravariante de la categoría de abiertos de X en la categoría de grupos abelianos.*

Ejemplo 3.35. Sea G un grupo abeliano. La pregavilla constante asocia a cada abierto $U \subseteq X$ el grupo G.

Ejemplo 3.36. Sea $\xi = (E, p, X)$ un haz vectorial. Hay una pregavilla asociada a ξ, a saber,

$$\Gamma(U) = \{s : U \to E : s \text{ es continua}, p \circ s = \mathrm{id}_U\}.$$

Sea X un espacio y $\mathcal{V}$ una pregavilla de grupos abelianos. Definimos

$$\check{\mathcal{S}}^q(N\mathcal{U}, \mathcal{G}) = \{\phi : \check{\mathcal{S}}_q(N\mathcal{U}) \to \bigcup_{U \subseteq X} \mathcal{G}(U) : \\ \phi(U_{\alpha_0}, \ldots, U_{\alpha_q}) \subseteq \mathcal{G}(U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_q})\}$$

En este caso, tenemos el operador

$$\check{\mathcal{S}}^q(N\mathcal{U}; \mathcal{G}) \xrightarrow{\delta^q} \check{\mathcal{S}}^{q+1}(N\mathcal{U}; \mathcal{G}), \\ \psi \mapsto \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \psi(U_{\alpha_0}, \ldots, \hat{U}_{\alpha_i}, \ldots, U_{\alpha_{q+1}})|_{U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_{q+1}}}.$$

Esto define la cohomología $\check{H}^q(X; \mathcal{G})$ de forma completamente análoga.

Se tiene la pregavilla $\mathcal{G}(U) = C(U, GL(n, K))$. Definimos la 1-cocadena $g \in \check{\mathcal{S}}^q(N\mathcal{U}, \mathcal{G})$ como $g(U_\alpha \cap U_\beta) \in \mathcal{G}(U_\alpha \cap U_\beta)$, lo que sugiera que $g(U_\alpha, U_\beta) = g_{\alpha,\beta}$.

Si la pregavilla no es de grupos abelianos, δ^q no es un homomorfismo.

3.2. Cohomología no abeliana

Definimos $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = H^1(\check{\mathcal{S}}^*(\mathcal{U}); \mathcal{G})$. En el caso no abeliano, las 1-cocadenas son $\mathbf{Conj}(\check{\mathcal{S}}_1(\mathcal{U}); \mathcal{G})$ y los 1-cociclos satisfacen

$$\delta^1(\phi)(U_\alpha, U_\beta, U_\gamma) = \phi(U_\beta, U_\gamma)|_{U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma} \\ - \phi(U_\alpha, U_\gamma)|_{U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma} + \phi(U_\alpha, U_\beta)|_{U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma} = 0.$$

En el caso no abeliano pedimos simplemente que

$$\phi(U_\beta, U_\gamma)|_{U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma} \cdot \phi(U_\alpha, U_\beta)|_{U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma} = \phi(U_\alpha, U_\gamma)|_{U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma}.$$

y que podemos escribir como

$$\phi_{\alpha,\beta} \cdot \phi_{\beta,\gamma} = \phi_{\alpha,\gamma}.$$

Para examinar el caso de las 1-cofronteras, sean ϕ y ψ dos 1-cociclos. En el caso abeliano, estos cociclos son cohomólogos si existe una 0-cocadena f con $f(U_\alpha) \in \mathcal{G}(U_\alpha)$ tal que

$$\begin{aligned}\delta^0(f)(U_\alpha, U_\beta) &= f(U_\beta)|_{U_\alpha \cap U_\beta} - f(U_\alpha)|_{U_\alpha \cap U_\beta} \\ &= \psi(V_\alpha, V_\beta) - \psi(V_\alpha, V_\beta).\end{aligned}$$

En el caso no abeliano, pedimos que exista una 0-cocadena tal que

$$\psi(U_\alpha, U_\beta) = f(U_\alpha)^{-1} \cdot \phi(U_\alpha, U_\beta) \cdot f(U_\beta).$$

También se puede definir $\check{H}^0(U; \mathcal{G})$. Sea $f \in \check{\mathcal{S}}^0(U, \mathcal{G})$. Entonces la 0-cohomología está dada por núc δ^0, es decir, se satisface

$$\delta^0(f)(U_\alpha, U_\beta) = f(U_\alpha)|_{U_\alpha \cap U_\beta} - f(U_\beta)|_{U_\alpha \cap U_\beta} = 0.$$

Así, la 0-cohomología no abeliana está formada por las 0-cocadenas tales que

$$f(U_\alpha)|_{U_\alpha \cap U_\beta} = f(U_\beta)|_{U_\alpha \cap U_\beta}.$$

Sea $\xi = (E, p, X)$ un haz vectorial de dimensión n con una cubierta trivializadora $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$, $g_{\alpha,\beta} \in \check{\mathcal{S}}^q(U; \mathcal{G})$. Sea $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$ y consideremos

$$\phi_\beta \circ \phi_\gamma^{-1} : U_\beta \cap U_\gamma \times K^n \to U_\beta \cap U_\gamma \times K^n : (x, v) \mapsto (x, g_{\beta,\gamma}(x)(v)).$$

Componiendo

$$\begin{aligned}\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} \circ \phi_\beta \circ \phi_\gamma^{-1}(x, v) &= \phi_\alpha \circ \phi_\gamma^{-1}(x, v) \\ &= (x, g_{\alpha,\gamma}(x)(v)) \\ &= \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}(x, g_{\beta,\gamma}(x),\end{aligned}$$

luego la cocadena asociada a ξ es un 1-cociclo.

Sea $\eta = (E', p', X)$ otro haz vectorial de dimensión n con cubiertas sendas trivializadoras $\{\pi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times K^n\}$ y $\{\psi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times K^n\}$. Supongamos que tenemos un isomorfismo de haces. Consideremos

$$\psi_\alpha \circ F \circ \phi_\alpha^{-1} : U_\alpha \times K^n \to U_\alpha \times K^n : (x, v) \mapsto (x, \rho(x, v))$$

donde $\rho : U_\alpha \times K^n \to K^n$. Por la ley exponencial, está asociada a esta función otra $f_\alpha : U_\alpha \to GL(n, K)$.

Esta colección de $\{f_\alpha\}$ define una 0-cocadena f dada por $f(U_\alpha) \in \mathcal{G}(U_\alpha) = C(U_\alpha, GL(n, K))$. Se puede demostrar que tenemos $f_\alpha(x)^{-1} g_{\alpha,\beta}(x) f_\beta(x) = g_{\alpha,\beta}(x)$ donde $\xi \rightsquigarrow g$ y $\eta \rightsquigarrow g'$.

Teorema 3.37. *Sea* $\mathrm{Vect}^n_{\mathcal{U}}(X)$ *las clases de isomorfismo de haces vectoriales (reales o complejos) sobre* X *con cubierta* $\mathcal{U}$*. Entonces* $\mathrm{Vect}^n_{\mathcal{U}}(X) \cong \check{H}^1(\mathcal{U}; \mathcal{G})$ *donde* $[\xi] \rightsquigarrow [g]$ *y* $g(U_\alpha, U_\beta) = g_{\alpha,\beta}$*.*

La inversa de la biyección del teorema está dada por como sigue. Sea $[g] \in \check{H}^1(\mathcal{U}; \mathcal{G})$, le asociamos el haz donde $E = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \times K^n / \sim$ (sin repeticiones), donde

$$(x, v) \sim (x, g_{\alpha,\beta}(x)(v)) \tag{3.6}$$

y $x \in U_\alpha \cap U_\beta$.

Corolario 3.38. *Sea* $\mathrm{Vect}^n(X)$ *el conjunto de clases de isomorfismo de haces vectoriales de dimensión* n*. Entonces hay una biyección*

$$\mathrm{Vect}^n(X) \leftrightarrow \check{H}^1(X;\mathcal{G})$$

donde $\mathcal{G}(U) = C(U, GL(n,K))$*.*

Escolio 3.39. Cuando $\mathcal{G}(U) = C(U, GL(1,K))$, entonces

$$\mathrm{Vect}^1(X) \leftrightarrow \check{H}^1(X;\mathcal{G})$$

es un grupo abeliano.

Ejercicios

3.1. Demostrar que $\bigoplus_{i=1}^n C(X;\mathbb{R}) \cong C(X;\mathbb{R}^n)$.

3.2. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. El módulo P es proyectivo.
2. Para cualquier sucesión exacta de R-módulos

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0,$$

   la sucesión inducida

$$0 \to P@A \xrightarrow{P@\alpha} P@B \xrightarrow{P@\beta} P@C \to 0$$

   es exacta.
3. Si $\gamma : A \to P$ es un homomorfismo suprayectivo de R-módulos entonces existe un homomorfismo $\delta : P \to A$ tal que $\gamma \circ \delta = \mathrm{id}_P$.
4. Si $0 \to A \to B \to P \to 0$ es exacta entonces $B \cong A \oplus P$.
5. El módulo P es sumando directo de un R-módulo libre.

3.3. Demostrar que la suma en el grupo de Grothendieck está bien definida.

3.4. El grupo $G(S)$ tiene la siguiente propiedad universal. Sea G un grupo abeliano $f : S \to G$ un homomorfismo de semigrupos. Entonces existe un único homomorfismo de grupos $f : G(S) \to G$ tal que

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & G(S) \arrow[d, dashed, "F"] \\ & G \end{tikzcd}$$

conmuta.

3.5. Si R es un cuerpo, entonces $K_0(R) \cong \mathbb{Z}$ y γ es la función dimensión.

3.6. Demostrar que $\hat{\phi}_\beta \circ \hat{\phi}_\alpha^{-1}$ son diferenciables.

3.7. Demostrar que la suma de secciones definida por (3.1) es continua.

3.8. Demostrar que la acción definida por (3.2) es continua.

3.9. Demostrar que si $p : E \to X$ es un haz vectorial, entonces p es abierta.

3.10. Demostrar que $GL(n, K)$ es un grupo topológico con la topología usual.

3.11. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita y $F : V \to W$ una función lineal. Tomando unas bases de V y W obtenemos isomorfismos lineales de $V \cong K^n$ y $W \cong K^m$. Con estos isomorfismos les damos un producto interno a V y otro a W. Con las bases le asociamos a F una matriz $A = (a_{i,j})$. Demostrar que $a_{i,j} = \langle F(v_j), w_i \rangle$.

3.12. Una función bilineal $f : V_1 \times V_2 \to W$ es una función bilineal entonces f es continua.

3.13. Demostrar que $\tilde{\psi}_\alpha$ definida por (3.3) es la inversa de ψ_α.

3.14. Demostrar que $\tilde{\gamma}_{(\alpha,\beta)}$ es el inverso de $\gamma_{(\alpha,\beta)}$.

3.15. Sean $\xi_1 = (E_1, p_1, X)$ y $\xi_2 = (E_2, p_2, X)$ haces vectoriales. Demostrar que $\xi_1 \oplus \xi_2 \cong \Delta^*(\xi_1 \times \xi_2)$ donde $\Delta : X \to X \times X$ es la diagonal.

3.16. Sea $f : X \to Y$ una función continua y $\eta = (E, p, Y)$ un haz vectorial tal que

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[drr] \arrow[dr, dashed, "\phi"] \arrow[ddr, "p'"'] & & \\
& f^*(E) \arrow[r, "\overline{f}"'] \arrow[d, "\overline{p}"'] & E \arrow[d, "p"] \\
& X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

conmuta (donde $E' \xrightarrow{p'} X$ es un haz). Demostrar que existe un morfismo de haces $E' \xrightarrow{\phi} f^*(E)$. Además, si F es monomomorfismo o epimorfismo entonces ϕ es un monomorfismo o epimorfismo, respectivamente. En particular, si F es un mapeo de haces, entonces ϕ es un isomorfismo, y por un teorema ϕ es isomorfismo de haces.

3.17. Demostrar que 0 es un valor regular de la función G definida según (3.4), y por lo tanto $V_n(\mathbb{R}^m)$ es una variedad diferenciable de dimensión $nm - \frac{n(n-1)}{2}$.

3.18. Sea $\xi = (E, p, X)$ un haz vectorial de dimensión n. Entonces existe una función de Gauss $g : E \to K^n$ si, y sólo si, existe un monomorfismo de haces $f : E \to X \times K^m$.

3.19. Demostrar que las g_i definidas por (3.5) son continuas.

3.20. Demostrar lo siguiente.

1. La retrotracción de un haz trivial es trivial.
2. Dados ξ y η haces vectoriales sobre Y y $f : X \to Y$ es una función continua, entonces $f^*(\xi \oplus \eta) = f^*(\xi) \oplus f^*(\eta)$.

3.21. Se satisface $\Gamma(\xi \oplus \eta) \cong \Gamma(\xi) \oplus \Gamma(\eta)$ como $C(X, K)$-módulos y que $\Gamma(\epsilon^n) \cong C(X, K)^n$.

3.22. Demostrar que $\sim$ definida por (3.6) es de equivalencia.

A

Soluciones

1.1. Si $[f] \in \pi_1(X, x_0)$, y $y \in p^{-1}(x_0)$, definimos a $y[f]$ como $\tilde{f}(1)$, donde $\tilde{f}$ es el único levantamiento de f tal que $\tilde{f}(0) = y$. Por el teorema de levantamiento de homotopía, esta definición no depende del representante f elegido en $[f]$.

Puesto que $\widetilde{\mathrm{cte}}_{x_0}$ es el camino constante en y, tenemos que $y[\mathrm{cte}_{x_0}] = y1 = y$. Supongamos ahora que $[g] \in \pi_1(X, x_0)$. Sea $\tilde{f}$ el levantamiento de f tal que $\tilde{f}(0) = y$ y $\tilde{g}$ el levantamiento de g tal que $\tilde{g}(0) = \tilde{f}(1)$. Entonces $\tilde{f} * \tilde{g}$ es el levantamiento de $f * g$ que comienza en y y termina en $\tilde{g}(1)$, pues el levantamiento es único. Se sigue que

$$y([f][g]) = y[f * g] = \widetilde{f * g}(1) = \tilde{g}(1) = (\tilde{f}(1))[g] = (y[f])[g].$$

Esto comprueba que $\pi_1(X, x_0)$ actúa sobre $p^{-1}(x_0)$. Afirmamos que el estabilizador de $y \in p^{-1}(x_0)$ es $p_\#(\pi_1(Y, y))$. En efecto, sea f un lazo basado en x_0 y $\tilde{f}$ su levantamiento tal que $\tilde{f}(0) = y$. Si $[f]$ pertenece al estabilizador de y, entonces $y[f] = y = \tilde{f}(1)$, luego $[\tilde{f}] \in \pi_1(Y, y)$ y así $[f] = [p \circ \tilde{f}] \in p_* \pi_1(Y, y)$. Recíprocamente, si tomamos a $[f] = [p \circ \tilde{g}]$ para algún $[\tilde{g}] \in \pi_1(Y, y)$, entonces $\tilde{f} = \tilde{g}$, pues ambos son levantamientos de f y tienen el mismo punto inicial. Luego $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1) = y$, y de aquí que $y[f] = \tilde{f}(1) = y$.

1.2. Si $[\tilde{f}] \in \pi_n(Y) = [S^n, Y]$, entonces $p_\#[\tilde{f}] = [p\tilde{f}]$. Para ver que $p_\#$ es suprayectiva, sea $[f] \in \pi_n(X)$. Como S^q es simplemente conexa para $q \geq 2$, por el criterio de levantamiento existe un mapeo basado $\tilde{f} : S^q \to Y$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$, luego $p_\#[\tilde{f}] = [f]$.

Para ver que $p_\#$ es inyectiva, supóngase que $[p \circ \tilde{f}_0] = [p \circ \tilde{f}_1]$, donde $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1 : S^q \to Y$ son mapeos basados. Entonces $F : p \circ \tilde{f}_0 \simeq p \circ \tilde{f}_1$. Por el teorema de la homotopía cubriente, se sigue que existe $\tilde{F} : \tilde{f}_0 \simeq \tilde{f}_1$. Esto quiere decir que $[\tilde{f}_0] = [\tilde{f}_1]$.

1.3. Sea la identificación $p : I \to I/\partial I$. Tomemos $f : (I/\partial I, *) \to (Z, z_0)$, y definamos $p^\#(f) = f \circ p : (I, \partial I) \to (Z, z_0)$. Como p es una identificación, $p^\#(f)$ es continua. Además

$$(f \circ p)(0) = f(p(0)) = f[0] = z_0 = f[1] = f(p(1)) = (f \circ p)(1)$$

lo que significa que $p^{\#}(f)(\partial I) = z_0$. Que $p^{\#}$ es inyectiva es consecuencia de la suprayectividad de p pues

$$p^{\#}(f) = p\#(g) \Rightarrow f \circ p = g \circ p \Rightarrow f = g.$$

Para ver la suprayectividad, hagamos $\overline{f}[x] = f(p^{-1}[x])$, para $f : (I, \partial I) \to (Z, z_0)$ donde $[x] \in I/\partial I$. Entonces

$$p^{\#}(\overline{f})(x) = (\overline{f} \circ p)(x) = \overline{f}(p(x)) = f(p^{-1}[x]) = f(x)$$

pues $[0] = \{0, 1\}$ y $f(0) = z_0 = f(1)$.

1.4. Sea Z localmente compacto y Hausdorff. Sea $(f_0, z_0) \in C(Z, X) \times Z$ y U una vecindad abierta de $f_0(x_0)$ en X. Como f_0 es continua y Z es localmente compacto y Hausdorff, existe una vecindad compacta $A \ni x_0$ tal que $f_0(A) \subseteq U$. Tenemos que $f_0 \in U'$, donde U' es la vecindad de f_0 en la topología compacto-abierta dada por $U' = C(A, U)$. Entonces $U' \times A$ es una vecindad de (f_0, x_0) y, por construcción, $\mathrm{ev}(U' \times A) \subseteq U$, lo que prueba que ev es continua.

1.5. Para el caso del primer diagrama, sea $h \in C(SX, Z)$. Tenemos

$$\begin{aligned}
\Omega g_* \circ (\phi \circ p^{\#})(h) &= \Omega g_*(\phi(h \circ p)) = \Omega g_*((h \circ p)(s)) \\
&= g \circ ((h \circ p)(s)) = (g \circ (h \circ p))(s) \\
&= \phi(g \circ (h \circ p)) = \phi((g \circ h) \circ p) \\
&= (\phi \circ p^{\#})(g \circ h) = (\phi \circ p^{\#}) \circ g_*(h).
\end{aligned}$$

Para el segundo,

$$\begin{aligned}
f^* \circ (\phi \circ p^{\#})(h) &= f^*(\phi(h \circ p)) = f^*(h \circ p(s)) \\
&= (h \circ p)(s) \circ f = (h \circ p \circ f \times \mathrm{id})(s) \\
&\overset{*}{=} (h \circ Sf \circ p)(s) = \phi(h \circ Sf \circ p) \\
&= (\phi \circ p^{\#})(h \circ Sf) = (\phi \circ p^{\#})(Sf^*(h)) \\
&= (\phi \circ p^{\#}) \circ Sf^*(h)
\end{aligned}$$

donde $(*)$ es consecuencia de las igualdades establecidas por el cuadrado conmutativo que define a Sf.

1.6. Por un lado,

$$SX = X \times I/(X \times \{0\} \cup X \times \{1\} \cup \{x_0\} \times I),$$

(con la identificación p) y por otro

$$X \wedge S^1 = X \times S^1/(\{x_0\} \times S^1 \cup X \times \{1\}).$$

(con la identificación p'). Sea $h : X \times I \to X \times S^1 = \mathrm{id}_X \times \exp(2\pi \mathrm{i} t)$, que es de hecho un producto de una identidad por una identificación. Sabemos que es continua, así que
$$p \circ h : SX \to X \wedge S^1$$
es continua. Sólo hay que ver que su domino y su contradominio son quienes afirmamos, y tendremos la mitad del homeomorfismo. Como

$$[h(x,1)]_p = [x, \exp(2\pi \mathrm{i}1)]_p = [x,1]_p = [x, \exp(0)]_p = [h(x,0)]_p,$$

es claro que h pasa al cociente SX (sin indentificar el punto base) y

$$[h[x,1]_p]_{p'} = [x,1]_{p'} = [x_0, \exp(2\pi \mathrm{i} t)]_{p'} = [h[x_0,t]_p]_{p'}$$

por lo que $p \circ h$ pasa al cociente SX (ahora sí, con el punto base identificado). Por otro lado, definiendo $g : X \wedge S^1 \to SX$ a través de

$$g[x, \exp(2\pi \mathrm{i} t)]_{p'} = [x,t]_p,$$

es continua por que exp pasa al cociente, al estar en SX identificados $(x,0)$ y $(x,1)$ para todo X, y también porque

$$g[x,1]_{p'} = [x,0]_p = [x,1]_p = [x_0,t]_p = g[x_0, \exp(2\pi \mathrm{i} t)]_{p'}.$$

Finalmente

$$g \circ p \circ h[x,t]_p = f[x, \exp(2\pi \mathrm{i} t)]_{p'} = [x,t]_p,$$

pues los únicos puntos donde h no es inyectiva, están colapsados por $p \circ h$ a un punto, y la imagen de este punto es precisamente donde está colapsado el dominio de g. Del mismo modo

$$p \circ h \circ g[x, \exp(2\pi \mathrm{i} t)]_{p'} = p \circ h[x,t]_p = [x, \exp(2\pi \mathrm{i} t)]_p,$$

queda justificada.

1.7. Para $n = 2$, por definición y la adjunción de S y Ω,

$$\begin{aligned}
\Omega^2(X,x_0) &= C((S^1,1), \Omega(X,x_0)) \\
&= C((SS^1,*),(X,x_0)) \\
&= C((S^2,*),(X,x_0)) \\
&= C((S^2,*), \Omega^0(X,x_0))
\end{aligned}$$

Supongamos que es así para n, esto es

$$\Omega^n(X,x_0) = C((S^n,*),(X,x_0)) = C((S^2,*), \Omega^{n-2}(X,x_0));$$

para $n+1$, por ser S y Ω adjuntos,

$$\begin{aligned}\Omega^{n+1}(X,x_0) &= \Omega(\Omega^n(X,x_0))\\ &= C((S^1,1),\Omega^n(X,x_0))\\ &= C((S^1,1),\Omega(\Omega^{n-1}(X,x_0)))\\ &= C((SS^1,*),\Omega^{n-1}(X,x_0))\\ &= C((S^2,*),\Omega^{n-1}(X,x_0)),\\ &= C((S^n,*),(X,x_0))\end{aligned}$$

donde la última igualdad es la hipótesis de inducción. Esto significa que la igualdad del ejercicio es cierta para $n \geq 2$. El caso $n = 1$ es precisamente la definición.

1.8. Tenemos las biyecciones

$$[(X,x_0),(F(S^n;\mathbb{Z}),\Theta)] \xrightarrow{h_*} [(X,x_0),(\Omega F(S^{n+1};\mathbb{Z}),*)]$$

y

$$[(X,x_0),(\Omega F(S^{n+1};\mathbb{Z}),*)] \xrightarrow{\phi^{-1}} [(SX,*),(F(S^{n+1};\mathbb{Z}),*)].$$

Si tomamos $[u] \in [(X,x_0),(F(S^n;\mathbb{Z}),\Theta)]$, llegamos primero a $[h\circ u]$, donde $h \circ u : (X,x_0) \to (\Omega F(S^{n+1};\mathbb{Z}),*)$. Finalmente,

$$\sigma([u]) = [\phi^{-1}(h\circ u)[?,??]] = [(h\circ u)(?)(??)].$$

1.9. El isomorfismo σ del es basado. En efecto,

$$[(h\circ u)(x_0)(?)] = [\omega_{z_0}(?)] = [\mathrm{cte}_{z_0}].$$

Que el cuadrado conmuta es consecuencia de

$$\begin{aligned}(Sf)^*\circ\sigma_X([u]) &= (Sf)^*([(h\circ u)(?)(??)])\\ &= [(h\circ u)(f?)(??)]\\ &= \sigma([u\circ f])\\ &= \sigma_Y\circ f^*[u].\end{aligned}$$

1.10. Se satisface

$$\tilde{H}([x_0,s],t) = g[x_0,t] = z_0$$

y

$$\tilde{H}([f(x_0)],t) = g[f(x_0)] = z_0$$

pues $[x_0,t] \sim [f(x_0)]$. Como $r\circ\iota = \mathrm{id}_Y$, resta demostrar que la homotopía $H : i\circ r \simeq \mathrm{id}_{\mathrm{Cil}(f)}$ es basada. En efecto,

$$H([x_0,s],t) = [x_0,s] = * = [f(x_0)] = H([f(x_0)],t).$$

1.11. Sólo resta demostrar que $\overline{f}\circ\overline{j} = \mathrm{id}_{X/A}$ y $\overline{j}\circ\overline{f} = \mathrm{id}_{X\cup CA/CA}$. En efecto,

$$\overline{f} \circ \overline{j}([x]_A) = \overline{f}([x]_{CA}) = [x]_A$$

y $\overline{f} \circ \overline{j}([a]_A) = \overline{f}([a,1]_{CA}) = p(a) = [a]_A$. Además

$$\overline{j} \circ \overline{f}([x]_{CA}) = \overline{j}(\overline{f}[x]_{CA}) = [j(x)]_{CA} = [x]_{CA}$$

y, para $u \in CA$

$$\overline{j} \circ \overline{f}([u]_{CA}) = \overline{j}([a]_A) = [[a]_A]_{CA} = [[a,1]_A]_{CA} = [u]_{CA}.$$

1.12. Vemos que para todo $b \in B$, $\overline{H}([b],t) = [H(b,t)]$, pero $H(b,t) \in B$ para todo B, luego $\overline{H}([b],t) = *$ para todo t. Esto quiere decir que la homotopía $\overline{H}$ es de parejas.

1.13. Sean las inclusiones $i_\alpha : (X_\alpha, x_\alpha) \hookrightarrow (\bigvee X_\alpha, *)$, Dado

$$[f] \in [(\bigvee X_\alpha, *), (Y, y_0)],$$

definimos $f_\alpha = f \circ i_\alpha$, y con ello queda establecida la función $G : [f] \mapsto ([f_\alpha])$.

Ahora, dado $([f_\alpha]) \in \prod_\alpha [(X_\alpha, x_\alpha), (Y, y_0)]$, por la propiedad universal del producto, existe $f : (\bigvee X_\alpha, *) \to (Y, y_0)$ tal que $f_\alpha = f \circ i_\alpha$. De este modo, tenemos la función recíproca $G^{-1} : ([f_\alpha]) \mapsto [f]$.

Estas dos funciones son inversas pues su composición define $([f_\alpha]) \mapsto ([f_\alpha])$ que tiene la propiedad $i_\alpha = G^{-1} \circ G \circ i_\alpha$. Esto implica que $G^{-1} \circ G = \mathrm{id}$.

1.14. En primer lugar

$$A_C(\mathrm{id}_{C_0}) = (G\mathrm{id}_{C_0})(a) = \mathrm{id}_{GC_0}(a) = a,$$

y en segundo

$$A_C(\phi) = (G\phi)(T_{C_0}(\mathrm{id}_{C_0})) = (T_C \circ \phi@C_0)(\mathrm{id}_{C_0}) = T_C(\phi@C_0(\mathrm{id}_{C_0})) = T_C(\phi).$$

1.15. Tomando la transformación recíproca T^{-1}, ρ' queda definido como aquél que satisface

$$\epsilon_{C_0'}(\rho') = T^{-1}_{C_0'} \circ \epsilon'_{C_0'}(\mathrm{id}) = T^{-1}_{C_0'}(u_0')$$

y por las mismas razones que para T hace conmutar el diagrama adecuado. Entonces $@\rho' \circ @\rho$ hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
C_0@C_0 \arrow[r, "@\rho' \circ @\rho"] \arrow[d, "\epsilon_{C_0}"'] & C_0@C_0 \arrow[d, "\epsilon_{C_0}"] \\
GC_0 \arrow[r, "T^{-1}_{C_0} \circ T_{C_0}"] & GC_0
\end{tikzcd}$$

pero lo mismo hace $@\mathrm{id} = \mathrm{id}_{C_0@C_0}$. Dada la unicidad de ρ, se sigue que $@\rho' \circ @\rho = \mathrm{id}_{C_0@C_0}$. De modo completamente análogo, $@\rho \circ @\rho' = \mathrm{id}_{C_0'@C_0'}$.

1.18. Sean $[s_1, t_1], [s_2, t_2] \in SX$. Entonces $\sigma : I \to SX$ dada por

$$\sigma(\lambda) = \begin{cases} [s_1, 2(\lambda + (\frac{1}{2} - \lambda)t_1)], & 0 \leq \lambda \leq 1/2, \\ [s_2, 2((\lambda - \frac{1}{2})t_2 + 1 - \lambda)], & 1/2 \leq \lambda \leq 1, \end{cases}$$

es continua, pues $\sigma(\frac{1}{2}) = [s_1, 1] = [s_2, 1]$.

2.3. Sea $\phi \in S^n(K; G)$. Entonces

$$\begin{aligned} \delta^n \circ \delta^{n+1}(\phi) &= \delta^n \left(\sum_{i=0}^{n+2} (-1)^i d^{i*}(\phi) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n+2} (-1)^i \delta^n(\phi \circ d^i) \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} \delta^n(\phi \circ d^i) = \sum_{j<i} &(-1)^{i+j} \phi(v_0 < \cdots \hat{v}_j < \cdots < \hat{v}_i < \cdots < v_n) \\ &- \sum_{j>i} (-1)^{i+j} \phi(v_0 < \cdots \hat{v}_i < \cdots < \hat{v}_j < \cdots < v_n), \end{aligned}$$

e intercambiando índices en el segundo sumando se tiene que $\delta^n(\phi \circ d^i) = 0$. Luego $\delta^n \circ \delta^{n+1} = 0$.

2.6. Sea $\phi \in S^n(L; G)$. Entonces

$$\begin{aligned} f^{\#} \circ \delta(\phi) &= f^{\#} \circ \sum (-1)^i \phi \circ d^i \\ &= \sum (-1)^i \phi \circ d^i \circ \check{S}(f) \\ &= \sum (-1)^i \phi \circ \check{S}(f) \circ d^i \\ &= \delta(\phi \circ \check{S}(f)) \\ &= \delta(f^{\#}(\phi)) = \delta \circ f^{\#}(\phi). \end{aligned}$$

Bibliografía

[Dol80] Dold, Albrecht: *Lectures on algebraic topology*, volumen 200 de *Gundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 1980.

[Hat02] Hatcher, Allen: *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2002.

[LP05] Lluis Puebla, Emilio: *Álgebra homológica, cohomología de grupos y K-teoría algebraica clásica*. Sociedad Matemática Mexicana, 2005.

[Rot88] Rotman, Joseph J.: *An introduction to algebraic topology*, volumen 119 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1988.