**Київський Національний Університет
імені Тараса Шевченка**

Механіко-математичний факультет

Олена Дрозд-Корольова

Зображення узагальнених пучків ланцюгів

Реферат для вступу в аспірантуру
зі спеціальності 01.01.04 - "Геометрія і топологія"

Київ 2004

Зміст

1. Вступ

Пучки ланцюгів відграють значну роль у багатьох задачах сучасної теорії зображень та суміжних розділах математики. Мабуть, уперше приклад задачі цього типу було розглянуто Назаровою та Ройтером [**13**] у зв'язку з описом модулів над «діадою локальних дедекіндових кілець», або, що рівносильно, над локальним кільцем простої подвійної точки. Пізніше, в 1973, вони розглянули більш загальний випадок, так звану задачу Гельфанда [**14**], яка виникла в теорії зображень Хариш-Чандри груп Лі. Рівносильний клас задач був досліджений Кроулі-Бові в термінах «зображення кланів» [**7**].

Втім, формулювання задачі в [**13**] було не зовсім зручним для деяких застосувань, а у формулюванні основного результату були деякі похибки. Тому в 1993 Бондаренко переформулював цю задачу в дещо більш загальному вигляді, який він назвав «пучки напівланцюгів», і дав більш зручний і послідовний опис нерозкладних зображень такого пучка [**5**]. Інші автори для тієї самої задачі користувалися простішим терміном «пучки ланцюгів», і ми наслідуємо їхньому прикладу.

На той час вже з'ясувалося, що пучки ланцюгів виникають у різноманітних задачах теорії зображень та й інших розділів математики. Вони були, наприклад, використані при дослідженні наступних питань:

- Будова скінченних модулів над чисто нетеровими кільцями (широким узагальненням локального кільця простої подвійної точки) [**10**].
- Модулі Коена–Маколея над особливостями алгебричних кривих [**11**].
- Векторні розшарування над проективними кривими [**12**].
- Стабільні гомотопічні типи поліедрів, які мають дві ненульові групи гомологій або гомотопій [**3, 4**].
- Похідні категорії когерентних пучків на проективних кривих [**6**].

Звичайно, цей перелік не претендує на повноту, але вже з нього видно важливість цього класу матричних задач.

Але можливість подальших його застосувань була обмежена тим, що в ньому не передбачено розгляду розширень основного поля. Тому, як правило, його можна застосовувати лише для випадку, коли це полк є алгебраїчно замкненим. Оскільки розгляд незамкнених полів (наприклад, поля дійсних чисел) є важливим у багатьох питаннях, назріла необхідність узагальнення поняття пучка ланцюгів. Звичайно, при такому узагальненні треба зберегти найважливішу особливість цього класу матричних задач — так звану його «самовідновлюваність». Це означає, що в кожній задачі з даного класу можна виділити порівняно невеликий «елементарний фрагмент», матриці з якого можна звести до деякої канонічної форми, яка залежить від кількох дискретних і максимум одного неперервного параметру, після чого для тих матриць, які залишились, виникає нова задача з того самого класу. Це дає можливість будувати відповідь рекурсивно, поступово зменшуючи розмір матриць. Саме в такий спосіб було дано класифікацію зображень в роботах [**13, 14, 5**].

Моя робота присвячена саме такому узагальненню. У розділі 2 дається формулювання задачі про узагальнені пучки ланцюгів; у розділі 3 розглянуто «елементарні» фрагменти таких задач; у розділі 4 перевірено, що після зведення до канонічної форми цих елементарних фрагментів виникає знов задача про деякий (взагалі кажучи, новий) пучок ланцюгів. На цій основі у розділі 5 дається спосіб побудови канонічної форми всіх нерозкладних зображень. Нарешті, у розділі 6 розглянуто одне застосування: класифікація модулів над нерозщеплюваною особливістю типу A_1.

2. Формулювання задачі

ОЗНАЧЕННЯ 1. **Пучок ланцюгів** складається з

(1) двох множин $\mathcal{E}$ та $\mathcal{F}$ ($\mathfrak{X} := \mathcal{E} \cup \mathcal{F}$);
(2) упорядкування на $\mathcal{E}$ та на $\mathcal{F}$;
(3) симетричного відношення $\sim$ на $\mathfrak{X}$ (не еквівалентності);
(4) відношення еквівалентості $-$ на $\mathfrak{X}$;
(5) $\forall x (x \sim x)$ задається 2-вимірна напівпроста алгебра $F_x \supset K$.

При $x \not\sim x$ ми задаємо $F_x = K$. Ми позначаємо також $\mathcal{E}_x = \{\, y \in \mathcal{E} \mid x - y \,\}$ і $\mathcal{E}_x = \{\, y \in \mathcal{F} \mid x - y \,\}$.

Ці дані мають задовольняти наступним умовам:

(1) $\forall x$, $E_x(\mathcal{F}_x)$ - лагцюг відповідно до $<$.
(2) $\forall x \# \{y | y \sim x\} \leq 1$.
(3) $x - y, x - y', x' - y \,\&\, x' < x, y < y' \Rightarrow x' - y'$.

Простійше уявити собі які випадки НЕ дозволяються, а саме:

$$\uparrow \quad \overset{\longrightarrow}{\left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline * & * \end{array}\right)}$$

Зауваження 2. Для більшості застосувань достатньо "простого" випадку, а саме:

$$\mathcal{E} = \bigsqcup_i \mathcal{E}_i, \quad \mathcal{F} = \bigsqcup_j \mathcal{F}_j$$
$$\mathcal{E}_i, \mathcal{F}_i \text{ - ланцюги}$$
$$x \in \mathcal{E}_i, y \in \mathcal{F}_j, x - y \Rightarrow i = j$$

У цьому випадку умова (3) задавольняється автоматично.

Означення 3. (1) Зображення пучка ланцюгів визначається наступним чином:
- кожному $x \in \mathfrak{X}$ ставиться у відповіднсть натуральне число n_x, таке що $x \sim y \Rightarrow n_x = n_y$;
- кожній парі $x - y (x \in \mathcal{E}, y \in \mathcal{F})$ ставиться у відповідність матриця A_{xy} розміру $n_x \times n_y$ з елементами з $\mathrm{F}_x \otimes \mathrm{F}_y$.

(2) *Елементарні перетворення* визначаються так:
  (a) елементарні перетворення над F_x в цілому рядку (або стовпчику), що відповідає x (тобто у всьому A_{xy} одночасно)
  Додатково якщо $x \sim x' (x' \neq x)$, перетворення в рядку x такі самі як і в рядку x'.
  (звичайно, якщо x рядок, а x' стовпичик, "такі самі" означає "контрагредієнтні")

(b) якщо $x < x'$, то дозволяється додавати до рядків (стовпчиків) відповідних до x' ті, що відповідають x, "домножені" на елементи $\mathrm{Hom}_K(F_x, F_{x'})$

(3) Ми називаємо два зображення *еквівалентними*, якщо їх можна одержати одне з другого послідовністю елементарних перетворень.

Приклад 4. Якщо $\mathrm{F}_x =< \alpha, \beta >$ тоді рядок $a = \alpha a_1 + \beta a_2$ (a_1 та a_2 - рядки з елементами з K) і дозволяється додавати окремо a_1, окремо a_2 (у випадку $\mathrm{F}_{x'}$ - окремо **до** a_1 та **до** a_2).

3. Атомні задачі (один x та один y):

Задачу про пучок ланцюгів будемо звати «атомною», якщо $\#(\mathcal{E}) = \#(\mathcal{F}) = 1$. У залежності від наявності чи відсутності відношень $\sim$ та розширень основного поля виникає кілька можливостей.

3.1. Список атомних задач.

(1) $x \not\sim x, y \not\sim y, x \not\sim y, E = F = K$.

Тоді ми маємо одну матрицю з елементами з K:

$$\begin{array}{cc} & y \\ x & \boxed{} \end{array}$$

Всі елементарні перетворення дозволяються.

(2) $x \not\sim x, y \not\sim y, x \sim y, E = F = K$.

Знову маємо тільки одну матрицю над K:

$$\begin{array}{cc} & y \\ x & \boxed{} \end{array},$$

На цей раз дозволяються лише об'єднання.

(3) (a) $x \not\sim x, y \sim y, E = F = K$.

Тут ми маємо вже дві матриці з елементами з K:

$$\begin{array}{ccc} & y & y^* \\ x & \boxed{} & \boxed{} \end{array}$$

Елементарні перетворення рядків мають проводитись одночасно в обох матрицях.

(b) $x \sim x, y \not\sim y, E = F = K$.

Ця задача зводиться до попередньої.

(4) $x \sim x, y \sim y, E = F = K$.

Отримуємо чотири матриці з елементами з K :

$$\begin{array}{c|c|c|c|} & y & \multicolumn{1}{c}{} & y^* \\ \cline{2-2}\cline{4-4} x & & & \\ \cline{2-2}\cline{4-4} x^* & & & \\ \cline{2-2}\cline{4-4} \end{array} .$$

Елементарні перетворення дозволяються лише всередині рядка або стовпчика.

(5) (a) $x \sim x$, $y \not\sim y$, $E = K$, $(F : K) = 2$ (so x is fat).

Отримуємо матрицю з елементами з F :

$$\begin{array}{cc} & F \\ K & \boxed{\mathrm{F}} \end{array} .$$

Елементарні перетворення рядків дозволяються лише над K , стовпчиків - лише над F .

(b) $x \not\sim x$, $y \sim y$, $F = K$, $(E : K) = 2$.

Ця задача зводиться до попередньої.

(6) (a) $x \sim x, y \sim y, E = K, (F : K) = 2$.

Тут ми отримуємо дві матриці з елементами з F :

$$\begin{array}{ccc} & F & F \\ K & \boxed{\mathrm{F}} & \boxed{\mathrm{F}} \end{array} .$$

Елементарні перетворення рядків спільні і проводяться виключно над K .

(b) $x \sim x, y \sim y, (E : K) = 2, F = K$.

Ця задача зводиться до попередньої

(7) $x \sim x, y \sim y, (E : K) = (F : K) = 2$.

Отримуємо матрицю з елементами з $E \otimes K$. Елементарні перетворення рядків(стовпчиків) дозволяються лише над E (відповідно над F).

Випадки 1–4 були розглянуті Бондаренком (див. [**5**]).

Атомні задачі є власне частковим випадком зображень нормованих графів, розглянутих Длабом та Рінгелем (див.

[**8**]), тож я використовую їх результати. Зокрема, я використовую квадратичні форми, відповідні до атомних задач.

3.2. Квадратичні форми відповідні до атомних задач.

(1) $x^2 + y^2 - xy$

(2) $x^2 - x^2 = 0$

(3) (a) $x^2 + y^2 + y_1^2 - x(y_1 + y_2)$ (y_1 відповідає новому елементу y^*)

(b) $x^2 + x_1^2 + y^2 - (x + x_1)y$

(4) $x^2 + x_1^2 + y^2 + y_1^2 - (x + x_1)(y + y_1)$

(5) (a) $x^2 + 2y^2 - 2xy$

(b) $2x^2 + y^2 - 2xy$

(6) (a) $x^2 + 2y^2 + 2y_1^2 - 2x(y + y_1)$

(b) $2x^2 + 2x_1^2 + y^2 - 2(x + x_1)y$

(7) $2x^2 + 2y^2 - 4xy$

ОЗНАЧЕННЯ 5. Корені квадратичної форми $\mathrm{Q}(\overline{x})$ визначаються наступним чином:

- **"реальні" корені** — це корені рівняння $\mathrm{Q}(\overline{x}) = 1$ або, у випадку з розширенням, $\mathrm{Q}(\overline{x}) = 2$.
- **"уявні" корені** — це корені рівняння $\mathrm{Q}(\overline{x}) = 0$.

3.3. Зображення атомних задач. Для зображень атомних задач я використаю результати Длаба та Рінгеля (див. [**8**]). З цих результатів випливає:

(1) нерозкладні зображення існують тільки в тих розмірностях, які є коренями відповідних квадратичних форм

(2) реальний корень має тільки одне нерозкладне зображення і це є зображенням «загального положення» (тобто на кожному кроці зведення частина матриці, яку ми спрощуємо, має максимальний ранг; точне означення: орбіта нерозкладного зображення є відкритою у просторі всіх зображень даної розмірності).

Наведемо списки нерозкладних зображень. Кожному з них ми ставимо у відповідність деяке слово («ланцюг»). Роль цих слів буде видно у розділах 4 і 5.

Список нерозкладних зображень:

(1) Корінь $(1,1)$:

$$\boxed{1}\,, \quad w = e - f$$

(2) Уявний корінь (n) (реальних коренів немає):

Φ_π (Матриця Фробеніуса, що відповідає $\pi(t)$),

$w = e - f, \pi(t)$

та

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$w = e \sim f - e \sim f - \dots - e \sim f$.

(3) • Корінь $(1,1,1)$:

$$\boxed{1} \quad \boxed{1}$$

$w = e - f \sim f$

• Корінь $(1,1,0)$:

$$\boxed{1} \quad \boxed{}$$

(друга матриця порожня) $w = e - f$

• Корінь $(1,0,1)$:

$$\boxed{} \quad \boxed{1}$$

(перша матриця порожня) $w = e - f$

(4) • Корінь $(n, n, n, n+1)$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hline 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$w = f - e \sim e - f \sim f - \dots - f \sim f$

- Корінь $(n, n, n, n-1)$

$$\left(\begin{array}{ccccc|cccc}
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\hline
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{array}\right)$$

$w = e - f \sim f - e \sim e - \dots - f \sim f$

- Корінь $(n, n+1, n, n+1)$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccccc}
1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{array}\right)$$

$w = e - f \sim f - e \sim e - \dots - f$

- Уявний корінь $(n, n, n, n))$

$$\left[\begin{array}{c|c}
\mathrm{I} & \mathrm{I} \\
\hline
\mathrm{I} & \Phi_\pi
\end{array}\right]$$

$w = e - f\ ,\ \ \pi(t)$

та

$$\left[\begin{array}{c|c}
\mathrm{I} & \mathrm{I} \\
\hline
\mathrm{I} & J_0
\end{array}\right]$$

(з точністю до перестановок вертикальних та горизонтальних ліній)

$w = e \sim e - f \sim f - \cdots - f \sim f$

(5) • Корінь $(1,1)$:

(1) $w = e - f$

• Корінь $(1,2)$:

$(1\ \alpha)$ where $E = <1, \alpha>$ $w = e - f \sim f$

(6) • Корінь $(2n+1, n+1, n)$

$$\left[\begin{array}{ccccc|cccc}
1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & \dots & \dots & \vdots & \alpha & 0 & \dots & \vdots \\
\vdots & \alpha & \dots & \dots & \vdots & \vdots & 1 & \dots & \vdots \\
\vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \alpha & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \alpha & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \alpha \\
0 & \dots & \dots & \dots & \alpha & 0 & \dots & \dots & 0
\end{array}\right]$$

$w = e - f \sim f - e \sim e - ... - f$

• Корінь $(2n+1, n, n)$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\alpha & 0 & \dots & \vdots & 1 & 0 & \dots & \vdots \\
0 & 1 & \dots & \vdots & \alpha & 0 & \dots & \vdots \\
\vdots & \alpha & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \dots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \alpha & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \alpha & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\
0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \alpha
\end{array}\right]$$

$w = e \sim e - f \sim f - e \sim e - ... - e$

• Корінь $(2n-1, n, n)$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & \dots & \vdots & \alpha & 0\dots & \vdots & \\
\vdots & \alpha & \vdots & \vdots & 0 & 1 & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \alpha & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & \dots & \alpha & 0 & \dots & \dots & 1
\end{array}\right]$$

$$w = e - f \sim f - e \sim e - ... - f \sim f$$

- Корінь $(2n+2, n+1, n))$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc}
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\alpha & 0 & \dots & \vdots & 1 & \dots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \alpha & \dots & \vdots \\
\vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \alpha & \vdots & 0 & \dots & 1 \\
0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \alpha \\
0 & \dots & 0 & \alpha & 0 & \dots & 0
\end{array}\right]$$

$$w = e \sim f - f \sim f - e \sim e - ... - f$$

- Корінь $(2n, n+1, n)$

$$\left[\begin{array}{ccccc|cccc}
1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & \dots & \dots & \vdots & \alpha & 0 & \dots & \vdots \\
\vdots & \alpha & \dots & \dots & \vdots & 0 & 1 & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \alpha & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & \dots & 1 & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & \dots & \alpha & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\
0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \alpha
\end{array}\right]$$

$$w = f \sim f - e \sim e - f \sim f - ... - f$$

- Уявний корінь $(2n, n, n)$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} \Phi_\pi & 0 & \dots & 0 & \mathrm{I} & 0 & \dots & \alpha\mathrm{I} \\ 0 & \mathrm{I} & \dots & \vdots & \alpha\mathrm{I} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \alpha\mathrm{I} & \vdots & \vdots & 0 & \mathrm{I} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \alpha\mathrm{I} & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \mathrm{I} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \alpha\mathrm{I} & 0 & \dots & \dots & \mathrm{I} \end{array}\right] \quad (n \text{ непарне})$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} \alpha\Phi_\pi & 0 & \dots & 0 & \mathrm{I} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & \vdots & \vdots & \alpha\mathrm{I} & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \alpha\mathrm{I} & \vdots & \vdots & 0 & \mathrm{I} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \alpha\mathrm{I} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \mathrm{I} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \alpha\mathrm{I} & \vdots & \vdots & \vdots & \mathrm{I} \\ \mathrm{I} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \alpha\mathrm{I} \end{array}\right] \quad (n \text{ парне})$$

$w = e - f \sim f - e,\ \pi(t)$

(7) • Корінь $(n, n+1)$

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & \beta \end{bmatrix}$$

де $E =< 1, \alpha >,\ F =< 1, \beta >$

$w = e - f \sim f - e \sim e - ... - f \sim f$ (n непарне)

$w = f - e \sim e - f \sim f - ... - f \sim f$ (n парне)

• Корінь $(n+1, n)$

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ \beta & \alpha & \dots & \vdots \\ 0 & \beta & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \alpha \\ 0 & \dots & \dots & \beta \end{bmatrix}$$

$w = f - e \sim e - f \sim f - ... - e \sim e$ (n непарне)

$w = e - f \sim f - e \sim e - ... - e \sim e$ (n парне)

- Уявний корінь (n,n):

$$\begin{bmatrix} \alpha I & \beta I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha I & \beta I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta I \\ \beta\Phi_\pi & 0 & 0 & \dots & \alpha I \end{bmatrix}$$

$w = e \sim e - f \sim f\,,\ \pi(t)\,.$

4. Спрощення

Ця частина є, напевно, найважливійшою. В ній показано, що коли ми спрощуємо атомну частину пучку ланцюгів $\mathcal{X} = \{\mathcal{E}, \mathcal{F}, <, -, \sim\}$ і обмежемо елементарні перетворення до таких, які не змінюют канонічної форми цієї частини, ми знову отримуємо представлення (нового) пучка ланцюгів. Іншими словами, ми можемо зформулювати наступні правила для конструювання цього нового пучка ланцюгів:

(1) Оберемо мінімальний елемент $e \in \mathcal{E}$ та мінімальний елемент $f \in \mathcal{F}$ такі, що $e - f$. Покладемо $\mathcal{E}^- = \mathcal{E} \setminus \{e\}$, $\mathcal{F}^- = \mathcal{F} \setminus \{f\}$.

(2) Розглянемо атомну задачу, визначену пучком $(\{e\}, \{f\})$ (з відношенням $\sim$); назвемо таку задачу *атомною частиною* $\mathcal{X}$.

(3) Знайдімо множину $\mathcal{S}$ всіх слів, відповідних до нерозкладних зображень цієї атомної задачі.

(4) Побудуймо множини $\mathcal{E}^+$ and $\mathcal{F}^+$ наступним чином:

  (a) якщо існує $x \in \mathcal{E}^-$ таке, що $x - w$ або $w - x$ можливе, але немає $y \in \mathcal{F}^-$ з цією властивістю, тоді $w \in \mathcal{F}^+$; в цьому випадку покладемо $w - x$ для всіх елементів $x \in \mathcal{E}^-$ з цією властивістю;

  (b) якщо існує $x \in \mathcal{F}^-$ таке, що $x - w$ або $w - x$ можливе, але немає $y \in \mathcal{E}^-$ з цією властивістю, тоді $w \in \mathcal{E}^+$; в цьому випадку покладемо $w - x$ для всіх елементів $x \in \mathcal{F}^-$ з цією властивістю;

  (c) яущо існують і $x \in \mathcal{E}^-$ таке, що $x - w$ or $w - x$ можливе, і $y \in \mathcal{F}^-$ з тією самою властивістю, розглянемо два нові символи w_e, w_f та додамо

w_e to $\mathcal{E}^+$, w_f to $\mathcal{F}^+$; в цьому випадку покладемо $w_e \sim w_f$, $w_e - y$ для всіх $y \in \mathcal{F}^-$ та $w_f - x$ для всіх $x \in \mathcal{E}^-$ з цією властивістю; покладемо також $w_e \sim w_f$;
(d) назвімо w *товстим*, якщо $End A_w / rad\, End A_w \neq K$, де A_w відповідне зображення;
(e) назвімо w *подвійним*, якщо $w \sim w$, або $w \sim w^\circ$, або $w^\circ \sim w$ де w° *обернене* слово;
(f) для двох слів $w, v \in \mathcal{E}^+$ (або в $\mathcal{F}^+$), покладімо $w < v$ якщо існує ненульовий гомоморфізм $A_w \to A_v$ (відповідно $A_v \to A_w$);
(g) кожне слово $w \in \mathcal{E}^+ \sqcup \mathcal{F}^+$ наслідує всі відношення $<, -, \sim$ які елементи e, f мали з усіма іншими елементами $\mathcal{X}$; більш того, якщо $w \in \mathcal{E}^+$, тоді $e < w$, якщо $w \in \mathcal{F}^+$, то $f < w$; якщо обидва w_e та w_f, то $e < w_e$ і $f < w_f$;
(h) викинемо пару $e - f$ з відношення $-$.

(5) Покладемо $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \sqcup \mathcal{E}^+$, $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \sqcup \mathcal{F}^+$ та $\mathcal{X}' = \{\mathcal{E}', \mathcal{F}', <', -', \sim'\}$, де $<', -', \sim'$ позначають змінені відношення $<, -, \sim$.

5. Результат

Тепер з цієї рекурсивної процедури спрощення можна вивести наступний результат, який дає опис усіх нерозкладних зображень довільного пучка ланцюгів.

5.1. Означення.

Означення 6. (1) **Слово** це послідовність

$$w = a_0 r_1 a_1 r_2 a_2 \dots r_m a_m,$$

де $a_k \in \mathfrak{X}$ та кожен r_k є $\sim$ або $-$, такі, що для всіх можливих значень k:

- $a_{k-1} r_k a_k$ в $\mathfrak{X}$.
- $a_k \neq a_{k+1}$ та $r_k \neq r_{k+1}$.

(2) **Допустимими словами** є:

- **(i)** $x_1 \sim x_2 - x_3 \sim x_4 - x_5 \sim x_6 - ... - x_{n-1} \sim x_n$
- **(ii)** $x - x_1 \sim x_2 - ... - x_{n-1} \sim x_n$
  ($x \not\sim y$ для всіх $y \neq x$)

- **(iii)** $x - x_1 \sim x_2 - ... - x_{n-1} \sim x_n - z$
  ($x \not\sim y$ коли $y \neq x$)
  ($z \not\sim y$ коли $y \neq z$)

(3) Кінець типу $x \sim x$ зветься **особливим**. Слово з спеціальним кінцем зветься **особливим**. Слово з двома спеціальними кінцями зветься **біособливим**. Слово без особливих кінцівзветься **звичайним**.

(4) Слово типу (i), таке що $x_n - x_1$ зветься **циклом**. Цикл не може бути періодичним (тобто $w \neq v - v - v - ... - v$)

ОЗНАЧЕННЯ 7. Наступні слова звуться **"строковими даними"**:

- **(a)** (несиметричне) слово без особливих кінців
- **(b)** (несиметричне) слово з одним особливим кінцем та ("додаткова інформація") число $\delta \in \{1, 2\}$
- **(c)** (несиметричне) слово з двома особливими кінцями та ("додаткова інформація") трійкою $(\delta_1, \delta_2, m), \delta_i \in \{1, 2\}, m \in \mathbb{N}$

ОЗНАЧЕННЯ 8. Пара $(w, f(t))$, де w - (неперіодичний) цикл, $f(t)$ - степінь поліному над K, зветься **"стрічковими даними"**.

ЗАУВАЖЕННЯ 9. Можливо нам знадобиться умова, що $f(t) \neq t^d$ або в деяких випадках $f(t) \neq (t-1)^d$

5.2. Кінцева теорема. Моєю кінцевою метою є доказ наступної теореми та надання чіткої конструкції нерозкладних зображень, що відповідають будь-яким строковим або стрічковим даним.

ТЕОРЕМА 10. *Нерозкладні зображення знаходяться в взаємно однозначна відповідність з* $\{$*строковими даними*$\} \cup \{$*стрічковими даними*$\}$ *з точністю до "природньої" еквівалентності.*

ЗАУВАЖЕННЯ 11. Випадки, коли два слова визначають одне й те саме зображення:

- w та w^*
- w та $w^{(k)}$ (цикл "зсунутий" на k позицій)

- $(w, f(t))$ та $(w^{*(k)}, f^*(t))$ $(f^*(t) = t^d f(1/t)$ де $d = deg(f))$

6. Застосування

6.1. Скінчені модулі над нерозщіплюваною особливістю типу A_1.

ОЗНАЧЕННЯ 12. R позначає локально повне ньотерову k-алгебру, таку що:
R не має нільпотентних елементів
$R/radR = k$ де $radR$ позначає радикал Якобі R
$Kr.dimR = 1$
Ми кажемо, що R є особливістю типу , A_1 якщо:

- $\operatorname{rad} \widetilde{R} = \operatorname{rad} R$, де $\widetilde{R}$ позначає нормалізацію R;
- $\dim_k \widetilde{R}/\operatorname{rad} \widetilde{R} = R$

Надалі позначимо $J = \operatorname{rad} R = \operatorname{rad} \widetilde{R}$

Ми маємо два випадки - розщіплений ($\widetilde{R}/J = k \times k$) та нерозщіплений ($\widetilde{R}/J = F$, двовимірне розширення поля k).

Скінченно-породжені модулі розщіпленого випадка були описані Назаровою та Ройтером (див. [**13**]), тож я зконцентруюсь на нерозщіпленому випадку..

Тут $\widetilde{R} = f[|t|]$ і оскільки $J \subset R \subset \widetilde{R}$ та $J = \{a \in F[|t|] | a(0) = 0\}$, залишається єдина можливість:

$$R = \{a \in F[|t|] | a(0) \in k\}$$

Нашою головною метою є опис скінченно-породжених R-модулів. Але наші розрахунки є також дійсними для довільної пари локальних ньотерових кілець розмірності Круля 1, $R \subset \widetilde{R}$, таких що:

(1) $\widetilde{R}$ нормальне;
(2) $\operatorname{rad} R = \operatorname{rad} \widetilde{R} = J$;
(3) $F = \widetilde{R}/J$ дво-вимірне розширення поля $k = R/J$.

Ми маємо використати метод описаний Дроздом (див. [**10**]).

Оскільки кільце R є локально ньотеровим, для кожного скінченно-породженого R-модуля M існує точна послідовність

$$(1) \qquad Q \xrightarrow{f} P \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

де Q та P скінченно-породжені вільні R-модулі, а f гомоморфізм, такий що $\Im f \subseteq JP$. [**2**].

Ми називаємо (1) вільним представленням M.

Тензорно домноживши точну послідовність (1) на $\widetilde{R}$, ми отримаємо точну послідовність:

$$(2) \qquad \widetilde{Q} \xrightarrow{\widetilde{f}} \widetilde{P} \longrightarrow \widetilde{M} \longrightarrow 0$$

де $\widetilde{M}$ завжди позначає $\widetilde{R} \otimes_R M$, $\widetilde{f} = 1 \otimes f : \widetilde{R} \otimes_R Q \to \widetilde{R} \otimes_R P$. Оскільки $J = \operatorname{rad} \widetilde{R}$, ми маємо, що $\Im \widetilde{f} \subseteq \widetilde{R} \otimes_R JP = J \otimes_R P = J\widetilde{P} = JP$, тож (2) є знову вільним представленням $\widetilde{R}$-модуля $\widetilde{M}$.

Оскільки $\widetilde{R}$ нормальне, локальне та має розмірність Круля 1, воно є discrete valuation ring, зокрема, доменом головного ідеалу [**1**]. Таким чином, ми можемо обрати базиси в $\widetilde{P}$ та $\widetilde{Q}$ такими, що $\widetilde{f}$ задається дігональною $m \times m$ матрицею (де $m = rkP$, $n = rkQ$)

$$(3) \qquad \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_m \end{pmatrix}$$

де $a_1|a_2|...|a_m$.

Очевидно ми можево вважати, що $\widetilde{M}$ не має нульових стовпчиків.

Справді, якщо t є генератором J (як $\widetilde{R}$-модуля), то ми можемо вважати, що $a_i = t^{k_i}$ для деяких цілих $k_i > 0$ (як $\Im \widetilde{f} \subseteq J\widetilde{P}$, all $a_i \in J$).

Перепишемо матрицю (3) у формі:

$$(4) \qquad \widetilde{F} = \begin{pmatrix} t\mathrm{I}_{r_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t^2\mathrm{I}_{r_2} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & t^s\mathrm{I}_{r_s} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

де I_r позначає $r \times r$ одиничну матрицю (можливо, що деякі $r_k = 0$, тобто відповідні блоки $t^k\mathrm{I}_{r_k}$ не існують в $\widetilde{M}$).

Тепер ми можемо переформулювати нашу мету. Нам потрібно тепер знайти всі гомоморфізми $f : Q \to P$ вільних R-модулів такі, що $\widetilde{f}$ можуть бути представлені фіксованою матрицею $\widetilde{M}$ вигляду (4) в деяких базисах $\widetilde{Q}$ та $\widetilde{P}$. Якщо f дано в деяких базисах Q та P матрицею M, це означає, що існують обертовні матриці C, D над $\widetilde{R}$ такі, що $C\widetilde{M} = MD$ (зауважте, що всі значення M взяті з J оскільки $\Im f \subseteq JP$). Припустимо що M' інша матриця така, що $C'\widetilde{M} = M'D'$ для деяеих обертовних $\widetilde{R}$-матриць C', D'. Нехай $f' : Q' \to P'$ - відповідний гомоморфізм вільних R-модулів. Тоді $P/\Im f \simeq P'/\Im f'$ тоді і тільки тоді, коли існують ізоморфізми $\alpha f = f'\beta$, або, що те саме, існують обертовні матриці A, B над R такі що $AM = M'B$. В цьому випадку ми назимаємо матриці M та M' *еквівалентними.*

Це дає нам:

$$AC\widetilde{M} = AMD = M'BD = C'\widetilde{M}{D'}^{-1}BD$$

або

$$(5) \qquad {C'}^{-1}AC\widetilde{M} = \widetilde{M}{D'}^{-1}BD$$

Навпаки, якщо (5) справджується, ми отримуємо

$$AM = AC\widetilde{M}D^{-1} = C'\widetilde{M}{D'}^{-1}B = M'B$$

Позначимо через $\operatorname{Aut}\widetilde{M}$ множину всіх пар обертовних $\widetilde{A}$-матриць (X, Y) таких що $X\widetilde{M} = \widetilde{M}Y$. Тоді

$$({C'}^{-1}AC, {D'}^{-1}BD) \in \operatorname{Aut} M$$

і

$$(C', D')(C'^{-1}AC, D'^{-1}BD) = (A, B)(C, D).$$

Таким чином, класи еквівалентності матриць F знаходяться у взаємно-однозначній відповідності з подвійними суміжними класами:

(6) $GL(m, R) \times GL(n, R) \backslash GL(m, \widetilde{R}) \times GL(n, \widetilde{R}) / \operatorname{Aut} \widetilde{M}$

Зазначте, що $GL(n, R)$ містить підгрупу конгруентності

$$GL(n, \widetilde{R}, J) = \{X \in GL(n, \widetilde{R}) | X \equiv \mathrm{I}_n \mod J\} = GL(n, R, J)$$

Але $GL(n, \hat{R})/GL(n, \widetilde{R}, J) \simeq GL(n, F)$, при тому, що

$$GL(n.R)/GL(n, R, J) \simeq GL(n, k).$$

Отже, подвійні суміжні класи (6) можна замінити подвійними суіжними класами:

(7) $GL(m, k) \times GL(n, k) \backslash GL(m, F) \times GL(n, F) / \overline{\mathrm{Aut}} \widetilde{A}$

де $\overline{\mathrm{Aut}} \widetilde{M}$ позначає зображення $\operatorname{Aut} \widetilde{M}$ in $GL(m, F) \times GL(n, F)$.

Знайдемо $\operatorname{Aut} \widetilde{M}$. Припустимо, що $(X, Y) \in \operatorname{Aut} \widetilde{M}$, де

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1s} & x_{1,s+1} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2s} & x_{2,s+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{s1} & x_{s2} & \dots & x_{ss} & x_{s,s+1} \\ x_{s+1,1} & x_{s+1,2} & \dots & x_{s+1,s} & x_{s+1,s+1} \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1s} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{s1} & y_{s2} & \cdots & y_{ss} \end{pmatrix}$$

поділення на блоки відповідає поділенню $\widetilde{M}$ в (4). Тоді

$$X\widetilde{M} = \begin{pmatrix} tx_{11} & t^2x_{12} & \dots & t^sx_{1s} \\ tx_{21} & t^2x_{22} & \dots & t^sx_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ tx_{s1} & t^2x_{s2} & \dots & t^sx_{ss} \\ tx_{s+1,1} & t^2x_{s+1,2} & \dots & t^sx_{s+1,s} \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{M}Y = \begin{pmatrix} ty_{11} & ty_{12} & \dots & ty_{1s} \\ t^2y_{21} & t^2y_{22} & \dots & t^2y_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t^sy_{s1} & t^sy_{s2} & \dots & t^sy_{ss} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Звідси:

$$\begin{aligned} x_{11} = y_{11}, x_22 = y_22, ..., x_{ss} = y_{ss}; \\ y_{ij} = t^{j-i}x_{ij} \equiv 0(\mod J) \text{ if } i < j; \\ x_{ij} = t^{j-i}y_{ij} \equiv 0(\mod J) \text{ if } i > j; \\ x_{s+1,j} = 0 \text{ for } j = 1, ..., s. \end{aligned}$$

Отже $\overline{\mathrm{Aut}\widetilde{M}}$ утворено з усіх пар $(\overline{X}, \overline{Y})$ матриць над F вигляду:

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x}_{11} & \overline{x}_{12} & \dots & \overline{x}_{1s} & \overline{x}_{1,s+1} \\ 0 & \overline{x}_{22} & \dots & \overline{x}_{2s} & \overline{x}_{2,s+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \overline{x}_{ss} & \overline{x}_{s,s+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \overline{x}_{s+1,s+1} \end{pmatrix}$$

$$\overline{Y} = \begin{pmatrix} \overline{x}_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \overline{y}_{21} & \overline{x}_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ \overline{y}_{s1} & \overline{y}_{s2} & \dots & \overline{x}_{ss} \end{pmatrix}$$

Ми розглядаємо $GL(m, F) \times GL(n, F)$ як блочні матриці (з елементами з F):

$$\overline{C} = (C_y \; C_2 \; ... \; C_{s+1})$$
$$\overline{D} = (D_1 \; D_2 \; ... \; D_s)$$

де C_i має розмір $m \times r_i$, а D_i має розмір $n \times r_i$ (див. (4)).

Очевидна умова для строк: кількість e_1 (відповідно e_2), що з'являються в такій строці w має співпадати з кількістю c_i (відповідно d_i).

Більш того, якщо проста строка w починається з $e_1 \sim e_1 - c_i$, ьл відповідна матриця C:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{bmatrix}$$

Отже, вона вироджена, що неможливо. Так само, вона не може закінчуватись $c_i - e_1 \sim e_1$, або починатись (відповідно закінчуватись) $e_2 \sim e_2 - d_j$ (відповідно $d_j - e_2 \sim e_2$).

Аналогічно, якщо w починається $c_i \sim d_j$, то відповідний стовпчик в матриці C_i є нульовим, що також неможливо. Те саме справджується, якшо w починається з $d_j \sim c_i$ або закінчується цими елементами. Отже, залишається єдина можливість для простих слів:

$$c_{s+1} - e_1 \sim e_1 - c_{i_1} \sim d_{i_1} - e_2 \sim e_2 - ... - e_1 \sim e_1 - c_{s+1}$$

Відповідні матриці:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \alpha & 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \alpha & \dots & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 1 & 1 & \dots & \dots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \alpha & 1 & \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha & \end{pmatrix}$$

(останні два стовпчики матриці C належать до c_{s+1}; k-тий стовпчик C належить до c_{i_k}, а k-тий стовпчик D належить d_{i_k}.

Так само, подвійна строка має форму:

$$e_1 - c_{i_1} \sim d_{i_1} - e_2 \sim e_2 - ... - e_1 \sim e_1 - c_{s+1}$$

or

$$e_2 - d_{i_1} \sim c_{i_1} - e_1 \sim e_1 - ... - e_1 \sim e_1 - c_{s+1}$$

Відповідні матриці:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \alpha & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 1 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \alpha & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 1 & 1 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \alpha & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha \end{pmatrix}$$

(останній стовпчик C належить до c_{s+1})

Матриці відповідні до подвійної-подвійної строки наступні:

$$C=\begin{pmatrix} \ddots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \alpha & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \alpha & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \alpha & 1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \alpha & 1 & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix}$$

(в цьому випадку матриця c_{s+1} порожня)

Нарешті, матриці, відповідні до стрічки:

$$C=\begin{pmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{I} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha\mathrm{I} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \mathrm{I} & \mathrm{I} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \alpha\mathrm{I} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \mathrm{I} & \mathrm{I} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha\mathrm{I} \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \Phi \\ \alpha\mathrm{I} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \mathrm{I} & \mathrm{I} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \alpha\mathrm{I} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \mathrm{I} & \mathrm{I} & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha\mathrm{I} & 0 \end{pmatrix}$$

де Φ матриця Фробеніуса відповідна до первісного полінома $\pi(t) \neq t^d$.

(Знову, матриця, відповідна до c_{s+1} порожня)

Отже, дві пари, $(\overline{C}, \overline{D})$ та $(\overline{C}', \overline{D}')$ з $GL(m,F)\times GL(n,F)$ належать до одного і того самого подвійного суміного клвсу (7) тоді і тільки тоді, коли вони можуть бути отримані один з одного через наступні перетворення:

(1) елементарні перетворення рядків $\overline{C}$ та рядків $\overline{D}$ над полем k (відповідають множенню зліва на $GL(m,k)\times GL(n,k)$);

(2) звичайні елементарні перетворення стовпчиків C_i та D_i над F (відповідають множенню справа на $\overline{x}_{ii}$);

(3) додавання стовпчиків C_i домножених на елемент з F до стовпчиків C_j якщо $i < j$ (відповідають множенню на $\overline{x}_{ij}$);

(4) додавання стовпчиків D_i домножених на елемент з F до стовпчикві D_j якщо $i > j$ (відповідають множенню на $\overline{y}_{ij}$).

Матриці C, D мають бути обертовні. Це дає спрощення до можливих строк (всі стрічки задовольняють цим умовам автоматично).

Бібліоґрафія

[1] M. Atiyah and I. Macdonald. Introduction to Commutative Algebra. Addison–Wesley, 1969.

[2] H. Bass Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings. Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960), 466–488.

[3] H.-J. Baues and Yu. Drozd. Representation theory of homotopy types with at most two non-trivial homotopy groups, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 128 (2000), 283–300.

[4] H.-J. Baues and Yu. Drozd. Indecomposable homotopy types with at most two non-trivial homology groups, in: Groups of Homotopy Self-Equivalences and Related Topics. Contemporary Mathematics, 274 (2001) 39–56.

[5] V. V. Bondarenko, Representations of bundles of semichained sets and their applications, Algebra i Analiz 3, № 5 (1991) 38–61.

[6] I. Burban and Yu. Drozd. Coherent sheaves on rational curves with simple double points and transversal intersections. Duke Math. J. 121 (2004) 189–229.

[7] W. W. Crawley-Boevey. Functorial Filtrations II: Clans and the Gelfand Problem. Journal of the London Mathematical Society 40 (1989), 385-402

[8] V. Dlab and C. M. Ringel. Indecomposable Representations of Graphs and Algebras. Mem. Amer. Math. Soc. 173 (1976).

[9] V. Dlab and C. M. Ringel. Normal Forms of Real Matrices with Respect to Complex Similarity. Linear Algebra and its Applications 17, 107-124 (1977)

[10] Ю. А. Дрозд. Конечные модули над чисто нетеровыми кольцами. Труды матем. ин-та им. Стеклова. 183 (1991), 97–109.

[11] Yu. Drozd and G.-M. Greuel. Cohen–Macaulay module type, Compositio Math., 89 (1993) 315–338.

[12] Yu. Drozd and G.-M. Greuel. Tame and wild projective curves and classification of vector bundles. J. Algebra, 246 (2001) 1–54.

[13] Л. А. Назарова и А. В. Ройтер. Конечно-порожденные модули над диадой локальных дедекиндовых колец. Известия Академии Наук СССР 33 (1969), 65-89.

[14] Л. А. Назарова и А. В. Ройтер. Об одной задаче Гельфанда. Функц. анализ прилож. 7:4 (1973).