Зміст

Вступ

Матричні задачі з'явилися, як засіб обчислення зображень на початку 70-х років минулого сторіччя. Першим значним їх застосуванням до теоретичних питань теорії зображень стало доведення першої гіпотези Брауера-Тролла за допомогою алгоритму зведення матриць у роботі М.М.Клейнера та А.В.Ройтера [**32**]. Хоча цю гіпотезу було раніше доведено в роботі А.В.Ройтера суто теоретико-модульними методами, новий результат був істотно сильніший (і, до речі, його доведення теоретико-модульними методами так і не було одержано). Деяким недоліком результату було те, що алгоритм зведення матриць там було розвинено лише для задач над алгебрично замкненим полем. Тому гіпотеза Брауера-Тролла (у підсиленій формі) випливала звідси лише для досконалих полів.

Перші роботи, присвячені самим матричним задачам з'явилися в 1972 р. Це робота П.Ґабріеля [**31**] про зображення сагайдаків та робота Л.А.Назарової та А.В.Ройтера

[**9**], в якій були розглянуті зображення частково-впорядкованих множин. В тому ж році М.М.Клейнер [**6, 7**] одержав критерій скінченності типу та описав нерозкладні зображення множин скінченого типу. Новий підхід до зображень сагайдаків, який ґрунтувався на функторах віддзеркалень, запропонували в 1973 р. Бернштейн, Ґельфанд та Пономарьов [**1**]. У 1974 р. цю техніку розповсюдив на зображення частково впорядкованих множин Ю.А.Дрозд [**3**], хоча в цій роботі були побудовані лише функтори Коксетера та деякі композиції функторів віддзеркалень. Більш адекватний варіант його роботи, в якому були побудовані всі функтори віддзеркалень, вийшов у 1998 р. [**26**]. При цьому виявилось потрібним дещо узагальнити клас задач до зображень так званих перерізаних частково впорядиованих множин. На жаль у всіх цих задачах не беруть участь розширення основного поля. Ситуації, де такі розширення виникають були розглянуті В.Длабом і К.Рінгелем. В 1976 р. вони розглянули узагальнення на цей випадок зображень колчанів [**24**], побудували в нові ситуації функтори віддзеркалень і довели аналог теореми Ґабріеля. В іншій роботі 1975 р. [**23**] вони також розглянули певне узагальнення зображень частково впорядкованих множин. Втім, степінь загальності у цій роботі видається явно недостатньою, а про функтори віддзеркалень в ній зовсім не йдеться.

Інший важливий клас задач, який відіграє значну роль у багатьох питаннях теорії зображень та інших розділів математики - це зображення в'язок ланцюгів. Мабуть, уперше приклад задачі цього типу було розглянуто в 1969 р. Л.А.Назаровою та А.В.Ройтером [**10**] у зв'язку з описом модулів над діадою локальних дедекіндових кілець, або, що рівносильно, над локальним кільцем простої подвійної точки алгебраїчної кривої. Пізніше, в 1973, вони розглянули більш загальний випадок, так звану задачу Ґельфанда, яка виникла в теорії модулів Хариш-Чандри над групами Лі [**11**]. Рівносильний клас задач був досліджений У.Кроулі-Бові [**20**] в термінах «зображень кланів». Втім, наведені в цих роботах формулювання задач були не зовсім зручним для деяких застосувань, а у формулюванні основного результату були деякі похибки. Тому в 1993 В.М.Бондаренко [**2**] переформулював цю задачу в дещо більш загальному вигляді, який він назвав «в'язки напівланцюгових множин», і дав більш зручний і послідовний опис нерозкладних зображень такої в'язки. Інші автори для тієї самої задачі користувалися простішим терміном «в'язки ланцюгів».

На той час вже з'ясувалося, що в'язки ланцюгів виникають у різноманітних задачах теорії зображень та й інших розділів математики. Вони були, наприклад, використані при дослідженні таких питань, як будова скінчених модулів над чисто нетеровими кільцями (широким узагальненням локального кільця простої подвійної точки), модулі Коена–Маколея над особливостями алгебраїчних кривих, векторні розшарування над проективними кривими, стабільні гомотопічні типи поліедрів, похідні категорії когерентних пучків на проективних кривих (див, наприклад, [**5, 17, 18, 19, 29, 30**]). Звичайно, цей перелік не претендує на повноту, але вже з нього видно важливість цього класу матричних задач. Але можливість подальших його застосувань була обмежена тим, що в ньому не передбачено розгляду розширень основного поля. Тому, як правило, його можна застосовувати лише для випадку, коли це полк є алгебраїчно замкненим.

Отже, розширення вказаних результатів на випадок, коли основне поле вже не є алгебраїчно замкненим, а його розширення явно входять у постановку задач, є, безумовно актуальною проблемою теорії матричних задач. Саме таким узагальненням присвячена дана дисертація.

Метою роботи було узагальнення існуючих алгоритмів та результатів теорії матричних задач на випадок алгебраїчно незамкненого поля.

Основні методи дослідження, використані в роботі — це методи теорії категорій та лінійної алгебри, зокрема, техніка зведення матриць до канонічної форми, квадратичні форми та пов'язані з ними віддзеркалення. Використовувалися також методи алгебраїчної геометрії, пов'язані з теорією розмірності та дією алгебраїчних груп на многовидах.

В роботі отримано такі нові наукові результати:

- Розроблено алгоритм зведення матриць для бімодульних задач над кільцями. За його допомогою доведено першу гіпотезу Бракера-Тролла для локально артінових бімодулів та модулів над артіновими алгебрами.
- Введено зображення зважених впорядкованих множин, для них побудовано функтори віддзеркалень, вивчені їх властивості і за їх допомогою доведено критерій скінченності зображувального типу.
- Розглянуто зображення узагальнених в'язок ланцюгів, для них розроблено алгоритм зведення, введено комбінаторику струн і стрічок і встановлено взаємно однозначну відповідність між нерозкладними зображеннями та струнними і стрічковими даними.

Результати роботи можуть бути використані при дослідженнях з теорії зображень, алгебраїчної геометрії, алгебраїчної топології та інших розділів математики, в яких виникають класифікаційні задачі, зокрема при вивченні зображень артінових алгебр, модулів Коена-Маколея, векторних розшарувань, стабільних гомотопічних типів, тощо.

Результати дисертації доповідались на 3-ій Міжнародній Алгебраїчній Конференції в Україні (Суми, липень 2001) [**36**], на 10-ій Міжнародній Конференції з Зображень Алгебр (ICRA X, Торонто, серпень 2002) [**37**], на 4-ій Міжнародній Алгебраїчній Конференції в Україні (Львів, серпень 2003) [**38**], на 5-ій Міжнародній Конференції в Україні (Одеса, липень 2005) [**39**], на Всеукраїнській конференції з теорії радикалів (Київ, червень 2006) [**40**], на Київському алгебраїчному семінарі.

Основні результати дисертації опубліковано в 8 працях, з них 3 статті - у фахових наукових виданнях [**33, 34, 35**], 5 - у матеріалах та тезах міжнародних конференцій [**36, 37, 38, 39, 40**].

Тема дисертаційної роботи пов'язана з тематикою досліджень кафедри геометрії Київського національного університету імені Тараса Шевченка, підрозділ «Геометричні структури та їх застосування» держбюджетної теми 01БФ038-03 (номер державної реєстрації 0101U002479).

Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаної літератури, який містить 40 найменувань. Повний обсяг роботи становить 116 сторінок, з них 110 сторінок основного змісту і 6 сторінок використаних джерел.

У вступі дано короткий огляд теми дисертаційної роботи, актуальності обраного напрямку досліджень та одержаних результатів, наведено відомості про їх апробацію та публікації. У першому розділі викладено загальні відомості про категорії та матричні задачі, зокрема, про зображення сагайдаків, частоково впорядкованих множин та в'язок ланцюгів. Другий розділ дисертації присвячено бімодульним задачам.

Теорема 11. *У описаній ситуації позначимо* $\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{El}(\mathbf{L}, \partial_L)$ *і розглянемо* $\widetilde{\mathbf{A}}$*-бімодуль* $\widetilde{\mathbf{N}}$ *та диференціювання* $\widetilde{\partial} : \widetilde{\mathbf{A}} \to \widetilde{\mathbf{N}}$*, визначені в такий спосіб:*

- $\widetilde{\mathbf{N}}(\xi, \eta) = \mathbf{N}(X, Y)$*, якщо* $\xi \in \mathbf{L}(X, X)$*,* $\eta \in \mathbf{L}(Y, Y)$*.*
- $\widetilde{\partial}(f) = f\hat{\xi} - \hat{\eta}f - \partial f$*, якщо* $f : x \to y$ *в категорії* $\mathbf{El}(\mathbf{L}, \partial_L)$*.*

Тоді категорії $\mathbf{El}(\widetilde{\mathbf{N}}, \widetilde{\partial})$ *та* $\mathbf{El}(\mathbf{M}, \partial)$ *еквівалентні. Ця еквівалентність задається відображенням* $\phi : \mathbf{El}(\widetilde{\mathbf{N}}, \widetilde{\partial}) \to \mathbf{El}(\mathbf{M}, \partial)$*, яке переводить елемент* $x \in \widetilde{\mathbf{N}}(\xi, \xi)$ *в елемент* $x + \hat{\xi}$*.*

З цього безпосередньо випливає доведення першої гіпотези Брауера-Тролла для локально артинових бімодулів.

Теорема 14. *Якщо* $X_0 = Y_0$, *в категорії* $\mathbf{El}(\mathbf{L}, \partial_L)$ *(а тому й у* $\mathbf{El}(\mathbf{M}, \partial)$*) існує безліч неізоморфних нерозкладних об'єктів, причому розмірності цих об'єктів необмежені. Якщо, крім того, поле* $\mathbf{k}$ *нескінченне, існує безліч розмірностей, в кожній з яких є безліч нерозкладних неізоморфних об'єктів.*

Цей наслідок і є власне підсиленою гіпотезою Брауера-Тролла для бімодульних задач. Підсилення полягає в останньому твердженні про існування безлічі розмірностей.

За допомогою стандартної техніки мінімальних резольвент звідси виводиться аналогічна теорема для зображень алгебр.

Теорема 15. *Нехай* Λ *— алгебра над локальним нетеровим комутативним кільцем* K, *скінченнопороджена як* K*-модуль. Якщо* Λ *має безліч неізоморфних нерозкладних модулів скінченної довжини (над* K*), то довжини цих модулів необмежені. Більш того, якщо існує безліч неізоморфних* Λ*-модулів деякої фіксованої довжини, то існує безліч довжин, для кожної з яких є безліч нерозкладних неізоморфних* Λ*-модулів даної довжини.*

У третьому розділі дисертації розглянуто зважені частково впорядковані множини скінченого типу.

Теорема 21. *ЗВМ* $\mathbf{S}$ *має скінченний тип тоді й лише тоді, коли її форма Тітса слабо додатня, тобто*

$Q_{\mathbf{S}}(\mathbf{x}) > 0$ *для кожного ненульового вектора* $\mathbf{x}$ *з невід'ємними координатами. У цьому випадку розмірності нерозкладних зображень збігаються з додатніми коренями форми* $Q_{\mathbf{S}}$ *і всі нерозкладні зображення однієї розмірності ізоморфні між собою.*

Для доведення цієї теореми ми будуємо у підрозділі 3.2 *функтори віддзеркалень* Σ_p, де p — деякий елемент частково впорядкованої множини і встанровлюємо такі їхні властивості:

(1) Вони *інверсивні*, тобто $\Sigma_p^2 = \mathrm{id}$ (тотожній функтор) — Твердження 32.

(2) Якщо форма Тітса слабо додатня, вони узгоджені з віддзеркаленнями w_p на просторі розмірностей, тобто $\dim(\Sigma_p M) = w_p(\dim M)$ — Наслідок 38.

(3) Якщо форма Тітса слабо додатня, то кожне нерозкладне зображення одержується з деякого тривіального зображення послідовним застосуванням функторів віддзеркалень — пункт 5 теореми 35.

З циз властивостей, аналогічно [**26**] випливає доведення Теореми 20.

Четвертий розділ присвячено зображенням узагальнених в'язок ланцюгів.

Як і у випадку звичайних в'язок ланцюгів, зображення узагальнених в'язок ланцюгів природно будувати рекурсивно, починаючи з «атомних задач», тобто таких, що $\mathcal{E}$ і $\mathcal{F}$ мають по одному елементу. Для таких задач опис нерозкладних зображень фактично міститься у роботі В.Длаба і К.Рінгеля 1976 року.

В роботі показано, що коли ми спрощуємо атомну частину в'язки ланцюгів $\mathcal{X} = \{\mathcal{E}, \mathcal{F}, <, -, \sim\}$ і обмежуємо елементарні перетворення до таких, що не змінюють канонічної форми цієї частини, ми знову отримуємо зображення (нової) в'язки ланцюгів.

Теорема 47. *Нерозкладні зображення знаходятьcя у взаємно однозначній відповідності зі строковими даними та стрічковими даними з точністю до природної еквівалентності.*

Як приклад застосування, з цих результатів одержано опис скінчених модулів над особливістю типу A_1, або, що те саме, нерозщеплюваним аналогом діади локальних декіндових кілець. Найпростіший приклад такого кільця - це підкільце A кільця $C[t]$ степеневих рядів над полем комплексних чисел, яке складається з усіх рядів з дійсним вільним числом.

Розділ 1

ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО МАТРИЧНІ ЗАДАЧІ

Матричні задачі з'явилися як засіб обчислення зображень на початку 70-х років минулого сторіччя. Першим значним їх застосуванням до теоретичних питань теорії зображень стало доведення першої гіпотези Брауера–Тролла за допомогою алгоритму зведення матриць у роботі [**32**]. Хоча цю гіпотезу було раніше доведено в роботі [**13**] суто теоретико-модульними методами, результат [**32**] був істотно сильніший (і, до речі, його доведення теоретико-модульними методами так і не було одержано). Деяким недоліком результату [**32**] було те, що алгоритм зведення матриць там було розвинено лише для задач над алгебрично замкненим полем. Тому гіпотеза Брауера–Тролла (у підсиленій формі) випливала звідси лише для досконалих полів.

1. Категорії та модулі

В цьому розділі ми вважатимемо, що всі категорії та алгебри є категоріями та алгебрами над деяким фіксованим полем $\mathbf{k}$, а всі функтори та гомоморфізми є $\mathbf{k}$-лінійними. Ми також писатимемо $\mathrm{Hom}\,,\ \otimes\,,\ \dim$, і т.ін.

замість $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}$, $\otimes_{\mathbf{k}}$, $\dim_{\mathbf{k}}$, і т.ін. Для кожної підмножини $\mathsf{S} \subseteq \operatorname{Mor}\mathcal{A}$ і двох довільних об'єктів $x, y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ позначимо $\mathsf{S}(x,y) = \mathsf{S} \cap \mathcal{A}(x,y)$.

Нагадаймо, що категорія $\mathcal{A}$ зветься *цілком адитивною* [**23**], якщо вона є адитивною, а кожен ідемпотент в $\mathcal{A}$ розщіплюється (тобто відповідає прямому розкладу). З іншого боку ми називаємо категорію $\mathcal{A}$ *фундаментальною*, якщо вона задовольняє наступним умовам:

- всі її об'єкти попарно неізоморфні;
- для кожного об'єкту x в кільці $A(x,x)$ немає нетривіальних ідемпотентів.

Повна підкатегорія $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$ зветься *скелетом* $\mathcal{A}$, якщо вона є фундаментальною та кожен об'Єкт $x \in \mathcal{A}$ є ізоморфним члену (скінченої) прямої суми деяких об'єктів з $\mathcal{S}$.

Цілком адитивна категорія $\operatorname{add}\mathcal{A}$ зветься *цілком адитивною оболонкою* категорії $\mathcal{A}$, якщо $\mathcal{A}$ є повною підкатегорією $\operatorname{add}\mathcal{A}$ і кожен об'єкт $\operatorname{add}\mathcal{A}$ є ізоморфним до члена прямої суми об'єктів $\mathcal{A}$. Відомо (і інтуїтивно зрозуміло), що кожна категорія $\mathcal{A}$ мають цілком адитивну оболонку. Більш того, всі такі оболонки еквівалентні, і для кожного функтора $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$, де категорія $\mathcal{C}$ цілком адитивна, існує єдиний (з точністю до ізоморфізма) функтор $\operatorname{add}\mathcal{A} \to \mathcal{C}$, що розширює F. Ми позначимо це розширення також через F. Ми також писатимемо $\mathcal{A}(x,y)$ замість $(\operatorname{add}\mathcal{A})(x,y)$ для об'єктів x, y з $\operatorname{add}\mathcal{A}$.

Визначимо визначимо *радикал* локальної категорії $\mathcal{A}$ $\operatorname{rad}\mathcal{A}$ як множину необертовних морфізмів. Така множина буде ідеалом в $\mathcal{A}$. Позначимо через $\operatorname{rad}^{\infty}\mathcal{A}$ перетин $\bigcap_{k=1}^{\infty}(\operatorname{rad}\mathcal{A})^k$. Якщо категорія $\mathcal{A}$ має локальний скелет, можна також визначити її радикал: за означенням, $a : x \to y$ належить $\operatorname{rad}(x,y)$ тоді й лише тоді, коли її компоненти відносно деяких (а отже відносно будь-яких) розкладів $x \simeq \oplus_i x_i$, $y \simeq \oplus_j y_j$, де $x_i, y_j \in \mathcal{S}k\,\mathcal{A}$, належать $\operatorname{rad}(x_i, y_j)$.

Означення 1.

- A-модулем зветься K-лінійний функтор $M : A \to K-Mod$. Замість $M(a)x$, де $x \in M(X)$, а $a : X \to Y$ (в категорії A), пишуть ax.
- $A-B$-бімодулем зветься K-білінійний функтор $V : A^o \times B \to K-Mod$.

  Знов-таки, якщо $x \in V(X,Y)$, $a : X \to Y$, $b : Y \to Y'$, то замість $V(a^o, b)x)$ пишуть bxa.

2. Зображення сагайдаків

Сагайдаком ми називаємо орієнтований граф, в якому дозволяються петлі та стрілки між кожними двома вершинами. Вони широко використовуються в теорії зображень: зображення V сагайдака ставить у відповідність до кожної вершини x векторний простір $V(x)$, а до кожної стрілки a - лінійне відображення $V(a)$.

Морфізм $f : V \to V'$ між зображеннями сагайдака Q це набір лінійних відображень $f(x) : V(x) \to V'(x)$ таких, що для кожної стрілки вQ з x в y $V'(a)f(x) = f(y)V(a)$. Морфізм f є ізоморфізмом, якщо $f(x)$ обертовне для всіх вершин x сагайдака.

З такими означеннями зображення сагайдака формують категорію.

Якщо V та W - зображення сагайдака Q, тоді пряма сума цих зображень, $V \oplus W$, визначається в такий спосіб: $(V \oplus W)(x) = V(x) \oplus W(x)$ для всіх вершин x в Q та $(V \oplus W)(a)$ - прямої суми лінійних відображень $V(a)$ та $W(a)$.

Ми називаємо V нульовим зображенням, якщо $V_x = 0$ для всіх $x \in Q_0$. Якщо V ізоморфне до прямої суми $W \oplus Z$, де W та Z — ненульові зображення, то V зветься розкладним. Інакше V зветься нерозкладним. Кожне зображення має єдиний розклад у пряму суму нерозкладних зображення (з точністю до ізоморфізму та перестановки доданків).

Таким чином проблема класифікації зводиться до класифікації нерозкладних зображень.

Якщо сагайдак має лише скінченну кількість нерозкладних зображень, то він зветься сагайдаком скінченного типу. Якщо є нескінченно кількість зображень, але в кожній розмірності вони утворюють щонайбільше однопараметричні сімейста, то сагайдак відносять до ручного типу. Якщо теорія зображень сагайдака щонайменше така ж складна, як теорія зображень сагайдака з подвійною петлею, сагайдак відносять до дикого типу. Добре відомо [**28**], що в цьому випадку класифікація зображень даного сагайдака містить у собі класифікацію зображень довільної скінченнопородженої алгебри і тому не можна очікувати на пристойний опис цих зображень. Ці означення, звичайно, не є формальними, але достатньо інтуїтивно ясними. Ми не будемо наводити точних означень (див. наприклад [**28**]), достатньо знати, що кожен сагайдак або має скінчений тип, або дикий, або ручний. (Це вірно взагалі для широкого класу матричних задач — так званих *забражень боксів* [**28**].

Критерій скінченності для зображень сагайдаків уперше вивів П. Ґабріель [**31**].

Теорема 2 (Теорема Ґабріеля). (1) *Сагайдак має скінчений тип тоді й лише тоді, коли граф, що лежить в його основі (якщо ми опустимо орієнтацію стрілок) є незв'язним об'єднанням діаграм Динкіна типів* A_n, D_n, E_6, E_7, E_8.

(2) *Ці нерозкладні зображення знаходятъся у взаємно однозначній відповідністі із додатніми коренями відповідної діаграми Динкіна.*

Приблизно одночасно з тим, як Ґабріель довів цю теорему, Кац та Муді зробили узагальнення кореневих систем та відповідних алгебр Лі для Картанових матриць довільних сагайдаків. У 1980 році Кац довів наступну теорему.

Теорема 3 (Теорема Каца). *Для довільного сагайдака* Q, *множина векторів розмірностей нерозкладних зображень* Q *не залежить від орієнтації стрілок в* Q. *Вектори розмірностей нерозкладних зображень відповідають додатнім кореням відповідної кореневої системи.*

В теорії Каца–Муді з'являється розділення на дійсні та уявні корені. В теоремі Каца дійсні корені відповідають векторам розмірностей, для яких є точно одне нерозкладне зображення, а уявні корені — векторам розмірностей, для яких є цілі сімейства нерозкладних зображень.

Зв'язок з теорією алгебр Лі та алгебраїчних груп можна значно розширити. Так Рінгель показав, як можна сконструювати верхню трикутну частину обгортуючої алгебри простої алгебри Лі з зображень відповідного сагайдака Динціна Q, використовуючи алгебру Холла, асоційовану з Q. Зв'язок між зображеннями сагайдаків та канонічними базами квантових груп також досліджується.

Теорема Каца описує вектори розмірностей, в яких з'являються нерозкладні зображення. Нажаль, ця теорема не дає нам інструкції, як саме конструювати нерозкладні зображення.

Бернштейн, Ґельфанд та Пономарьов побудували функтори віддзеркалень F_i для кожної $+$ або $-$ вершини з властивостями $\dim F_i M = w_i(\dim M)$, де w_i - віддзеркалення відносно Q_Γ, яке відповідає i-ій координаті. За допомогою цих функторів вони дали нове доведення теореми Ґабріеля і довопнили її твердженням про те, що кожне нерозкладне зображення можна отодержати з тривіального за допомогою послідовного застосування функторів віддзеркалень. Тут *тривіальними* звуться зображення, для яких один із просторів $V(x)$ одновимірний, а всі інші — нульові.

Длаб та Рінгель довели аналог теореми Ґабріеля та теореми Бернштейна–Ґельфанда–Пономарьова для випадку, коли в зображенях беруть участь розширення основного поля. В цьому випадку теж узагальнений сагайдак має скінченно зображувальний тип тоді й лише тоді, коли його форма Тітса є додатньо визначеною, або, що те саме, він є незвідним об'єднанням схем Динкіна (тут вже, можливо, з кратними ребрами).

3. Зображення частково впорядкованих множин

Нагадаємо, що частково впорядкована множина це пара $(P;\leqslant)$, в якій P - множина, а$\leqslant$ - відношення на P, яке

- рефлексивне: $a \leqslant a$ для всіх $a \in P$;
- транзитивне: якщо $a \leqslant b$ та $b \leqslant c$ то $a \leqslant c$; та
- антисиметричне: якщо $a \leqslant b$ та $b \leqslant a$ то $a = b$.

Таке відношення зветься частковим впорядкуванням (або порядком).

Означення 4. (1) *Зображенням* V частково впорядкованъ множини $(P, \leqslant)$ зветься набір, який складається з векторного простору $V(0)$ і його підпросторів $V(x),\ x \in P$ таких, що коли $x \leqslant y$, то також $V(x) \subseteq V(y)$.

(2) *Гомоморфізм* зображення V у зображення W — це лінійне відображення $\phi : V(0) \to W(0)$ таке, що $\phi(V(x)) \subseteq W(x)$ для всіх $x \in P$.

(3) *Пряма сума* зображень V та W — це таке зображення $V \oplus W$, що $(V \oplus W)(x) = V(x) \oplus W(x)$ для $x = 0$ і для кожного $x \in P$.

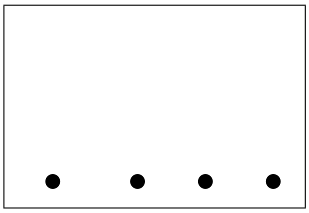
Так само, як і для сагайдаків, зображення частково впорядковані множини утворюють цілком адитивну (навіть локальну) категорію і кожне зображення однозначно розкладається в пряму суму нерозкладних. Кажуть, що частково впорядкована множина має *скінченний тип*, якщо вона має лише скінченну кількість нарозкладних неізоморфних зображень. У роботі [**6**] Клейнер довів наступний результат.

Теорема 5 (Критерій Клейнера). *Частково впорядкована множина S має скінчено зображувальний тип тоді й лише тоді, коли вона не містить жодної з п'яти підмножин, представлених у таблиці* **1.**

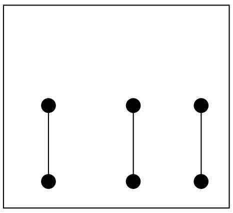
Ці підмножини називаються *критичними*.

Табл. **1. Критичні множини**

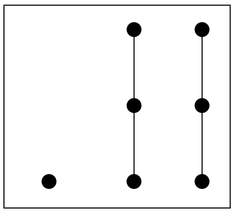
$\mathbf{C}_1$:



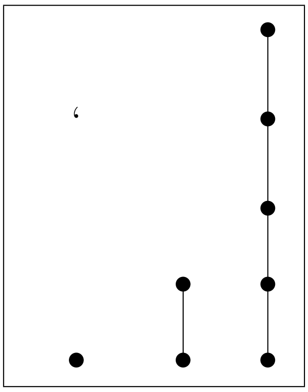
$\mathbf{C}_2$:



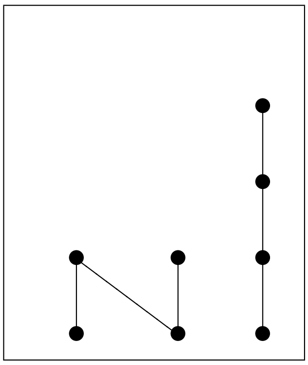
$\mathbf{C}_3$:



$\mathbf{C}_4$:



$\mathbf{C}_5$:



У роботах [**3, 26**] Дрозд побудував для зображень частково впорядкованих множин функтори віддзеркалень і функтори Коксетера і довів результати, аналогічні результатам Бернштейна–Ґельфанда–Пономарьова. При цьому, щоб побудувати всі функтори віддзеркалень, довелося узагальнити клас розглядуваних задач. Саме, у роботі [**26**] були введені зображення *перерізаних* частково впорядкованих множин (ПВМ). Під цим розуміється розбиття частково впорядкованої множини $P = P^+ \cup P^-$ на дві множини без спільних елементів таке, що коли $x \in P^+$ і $x < y$, то також $y \in P^+$. З таким розбиттям пов'язана матрична задача. Саме, *зображення* такої ПВМ задається набором векторних просторів $M(x),\ x \in P$ та $M(0)$ і набором лінійних відображень $f(x) : M(x) \to M(0)$ для $x \in P^-$ і $f(x) : M(0) \to M(x)$ для $x \in P^+$, причому якщо $x < y,\ x \in P^-,\ y \in P^+$, мусить бути $f(y)f(x) = 0$. Гомоморфізм зображення M у зображення M' складається з лінійних відображень $\phi(x) : M(x) \to M'(x)$, заданих для всіх $x \in \hat{P} = P \cup \{ 0 \}$, і відображень $\phi(xy) : M(x) \to M'(y)$, заданих для всіх пар (x, y), де $x < y$ і або $x, y \in P^+$, або $x, y \in P^-$, причому

$$\phi(0)f(x) = f'(x)\phi(x) + \sum_{y<x} f'(y)\phi(yx) \text{ для кожного } x \in P^-,$$

$$f'(x)\phi(0) = \phi(x)f(x) - \sum_{x<y} \phi(xy)f(y) \text{ для кожного } x \in P^+.$$

Припустимо, що $P = P^-,\ P^+ = \emptyset$. Кожне зображення V (у звичайному розумінні) частково впорядкованоъ множини P можна перетворити на зображення M такої ПВМ. Саме, покладемо $M(0) = V(0)$, а за $M(x)$, де $x \in P$, візьмемо якесь доповнення простору $V(x)$ до його підпростору $\sum_{y<x} V(y)$. За відображення $f(x)$ приймемо занурення $M(x)$ у $M(0)$. Очевидно, в такий спосіб одержуються всі зображення ПВМ P (з $P^+ = \emptyset$), в яких всі відображення $f(x)$ є мономорфізмами. Можна перевірити (див. [**3**]), що при цьому ізоморфні відображення переходять в ізоморфні, а нерозкладні — в нерозкладні. Єдине

нерозкладне зображення ПВМ, яке не можна так отримати — це тривіальне зображення, в якому $V(0)$ одновимірне, а всі $V(x)$ ($x \in P$) — нульові. Отже, з точки зору класифікації зображень, зокрема, зображувального типу, ці задачі рівносильні.

Перевага зображень ПВМ полягає в тому, що для них у роботі [**26**] були побудовані всі функтори віддзеркалень $\Sigma_x,\ x \in \hat{P}$. При цьому, якщо M — зображення ПВМ $P = P^- \cup P^+$, то значення $\Sigma_p M$ визначене, якщо або x — максимальний елемент у P^-, або мінімальний елемент у P^+, або $x = 0$ і одна з множин $P^\pm$ порожня. При цьому $\Sigma_p M$ є зображенням нової ПВМ (з тим самим P): у першому випадку елемент x переноситься з P^- до P^+, у другому — навпаки, у останньому P^- та P^+ міняються місцями.

Ці функтори мають ті самі властивості, що й функтори Бернштейна–Ґельфанда–Пономарьова, а саме:

(1) Вони інверсивні: $\Sigma_p^2 M \simeq M$.

Якщо ж форма Тітса множини P є слабо додатньою, то також

(2) $\dim \Sigma_p M = w_p \dim M$.

Тут $\dim M$ позначає вектор $(\dim M(x) \,|\, x \in \hat{P})$, форма Тітса — це квадратична форма на просторі всіх таких векторів:

$$Q_P(\mathbf{d}) = \sum_{x \in \hat{P}} \mathbf{d}_x^2 + \sum_{x<y} \mathbf{d}_x \mathbf{d}_y - \sum_{x \in P} \mathbf{d}_0 \mathbf{d}_x.$$

Ця форма зветься *слабо додатньою*, якщо $Q_p(\mathbf{d}) > 0$ для кожного вектора $\mathbf{d} \neq 0$ з невід'ємними координатами.

Звідси виводиться (знов-таки, аналогічно [**1**])

Теорема 6. [**3, 26**] *ПВМ P має скінченний тип тоді й лише тоді, коли форма Тітса Q_P слабо додатня. У цьому випадку нерозкладні зображення знаходяться у взаємно однозначній відповідності з додатніми коренями форми Q_P. Крім того, всі нерозкладні зображення одержуються з тривіальних послідовним застосуванням функторів віддзеркалень.*

4. Зображення в'язок ланцюгів

Розглянемо ще один важливий клас матричних задач — зображення в'язок ланцюгів. На відміну від роботи Бондаренка [**2**], ми використовуватимемо термін "в'язка ланцюгів"замість "в'язка напівланцюгових множин". Причина випливає з порівняння наших означень.

Означення 7. *В'язка ланцюгів* $\mathfrak{X}$ складається з:

- Індексної множини I, яку ми вважатимемо скінченною чи зліченою
- Для кожного $i \in I$, двох ланцюгів (лінійно впорядкованих множин) $\mathfrak{E}_i$ та $\mathfrak{F}_i$.

Ми покладемо $\mathfrak{E} = \bigcup_{i\in I} \mathfrak{E}_i$, $\mathfrak{F} = \bigcup_{i\in I} \mathfrak{F}_i$ та $|\mathfrak{X}| = \mathfrak{E} \cup \mathfrak{F}$.

- Симетричного відношення $\sim$ (не еквівалентності) на $|\mathfrak{X}|$, такого що для кожного x існує максимально один y для якого $x \sim y$ (можливо $x = y$).

Ми визначаємо відношення еквівалентності $\approx$ на $|\mathfrak{X}|$ у такий спосіб, що $x \approx y$ тоді й лише тоді, коли $x = y$ або $x \sim y$, і покладаємо $\widetilde{\mathfrak{X}} = |\mathfrak{X}|/\approx$. Ми писатимемо $x - y$, якщо існує індекс $i \in I$ такий, що $x \in \mathfrak{E}_i$, $y \in \mathfrak{F}_i$ або навпаки. Для кожного $x \in |\mathfrak{X}|$ такого, що $x \sim x$ ми вводимо два нових елементи x', x'' і покладаємо $\mathfrak{X}^* = (|\mathfrak{X}| \setminus \{\, x \mid x \sim x \,\}) \cup \{\, x', x'' \mid x \sim x \,\}$. Ми підрозділяємо $\mathfrak{X}^*$ на $\mathfrak{E}^* = \bigcup_i \mathfrak{E}_i^*$ та $\mathfrak{F}^* = \bigcup_i \mathfrak{F}_i^*$, які є образами $\mathfrak{E}_i$ і $\mathfrak{F}_i$; наприклад x' та x'' лежать в $\mathfrak{E}_i^*$ якщо $x \in \mathfrak{E}_i$. Ми розглядаємо упорядкування $<$ на $|\mathfrak{X}|$, яке є об'єднанням упорядкувань на всіх $\mathfrak{E}_i$ та $\mathfrak{F}_i$, і розширюємо його, так само як і відношення $-$, на $\mathfrak{X}^*$ так, що кожен "новий" елемент x' або x'' наслідує всі відношення, які має елемент x. Наприклад, $x' < y$, $y \in |\mathfrak{X}|$ означає, що $x < y$; $x'' - z'$ означає, що $x - z$, і т.д. Відзначимо, що елементи x', x'' завжди є непорівнюваними. З іншого боку, ми поширюємо еквівалентність $\approx$ на $\mathfrak{X}^*$ у тривіальний спосіб (кожен новий елемент x' або x'' є єдиним в своєму $\approx$-класі) і покладаємо $\widetilde{\mathfrak{X}}^* = \mathfrak{X}^*/\approx$.

В'язка ланцюгів $\mathfrak{X}$ породжує бімодульну задачу. А саме, ми фіксуємо поле $\mathbf{k}$ і визначаємо $\mathbf{k}$-категорію $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathfrak{X})$ і $\mathbf{A}$-бімодуль $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathfrak{X})$ у наступний спосіб:

- $\operatorname{Ob}\mathbf{A} = \widetilde{\mathfrak{X}}^*$.
- Якщо a, b - два клами еквівалентності, то базис простору морфізмів $\mathbf{A}(a, b)$ складається з елементів p_{yx} з $x \in a$, $y \in b$, $x < y$ і, якщо $a = b$, тотожнього морфізму 1_x.
- Множення задається правилом $p_{zy}p_{yx} = p_{zx}$ якщо $z < y < x$, а всі інші добутки є нульовими.
- Базис $\mathbf{U}(a, b)$ складається з елементів u_{yx} з $y \in b \cap \mathfrak{E}^*$, $x \in a \cap \mathfrak{F}^*$, $x - y$.
- Дія $\mathbf{A}$ на $\mathbf{U}$ задається правилом $p_{zy}u_{yx} = u_{zx}$ якщо $y < z$; $u_{yx}p_{xt} = u_{yt}$ якщо $x < t$, всі інші добутки є нульовими.

Категорія *зображень в'язки* $\mathfrak{X}$ над полем $\mathbf{k}$ визначається тоді як категорія $\mathbf{El}(\mathbf{U})$ елементів цього бімодуля. Інакше кажучи, зображення є множиною M блочних матриць

$$M_i = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots\dots \\ \dots \quad M_{xy} \quad \dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{pmatrix},$$

де $i \in \mathbf{I}$, $x \in \mathfrak{E}_i^*$, $y \in \mathfrak{F}_i^*$, $M_{xy} \in \operatorname{Mat}(n_x \times n_y, \mathbf{k})$, таких, що з $x \approx y$ випливає $n_x = n_y$. Два зображення є ізоморфними тоді й лише тоді, коли їх можна отримати одне з другого через послідовність наступних *елементарних перетворень*:

- елементарні перетворення рядків (або стовпчиків) в кожній горизонтальній (вертикальній) смузі; це означає, що перетворення застосовуються одночасно в усіх матрицях M_{xy} з фіксованим x (або, відповідно, y); більш того, якщо $x \approx z$, то перетворення в смузі x має бути таким самим, як перетворення в смузі z (звичайно, якщо одна з цих сміг горизонтальна, а інша вертикальна, "такі самі" слід замінити на "контрагредієнтні");
- якщо $x < y$, то добуток довільного рядка (або стовпчика) із смуги x на скаляр може додаватись до рядків (або стовпчиків) смуги y.

Опис нерозкладних зображень базується на комбінаториці *струн та стрічок.*

ОЗНАЧЕННЯ 8. Нехай $\mathfrak{X} = \{ I, \mathfrak{E}_i, \mathfrak{F}_i, \sim \}$ в'язка ланцюгів.

(1) $\mathfrak{X}$-*слово* це послідовність $w = x_1 r_1 x_2 r_2 x_3 \dots r_{m-1} x_m$, де $x_k \in |\mathfrak{X}|$ та $r_k \in \{ \sim, - \}$, такі, що для всіх можливих значень k

(a) $x_k r_k x_{k+1}$ в $|\mathfrak{X}|$.

(b) $r_k \neq r_{k+1}$.

Ми називатимемо m *довжиною* слова w. Можлива ситуація $m = 1$, тобто $w = x$ для деякого $x \in |\mathfrak{X}|$. Елементи x_1 та x_m звуться *кінцями* слова w.

(2) Ми називатимемо $\mathfrak{X}$-слово *повним*, якщо завжди, коли x_1 не є єдиним елементом в своєму $\approx$-класі, обов'язково $r_1 =\sim$, а завжди, коли x_m не є єдиним елементом в своєму $\approx$-класі, $r_{m-1} =\sim$.

(3) Ми позначатимемо через w^* *протилежне слово* $x_m r_{m-1} x_{m-1} \dots r_1 x_1$ і називатимемо $\mathfrak{X}$-слово *симетричним*, якщо $w = w^*$. Ми називатимемо w *квазісиметричним*, якщо його можна представити у формі $v \sim v^* \sim v \sim v^* \sim \cdots \sim v$, де v - коротше слово.

(4) Ми називатимемо кінець x_1 (x_m) слова w *особливим*, якщо $x_1 \sim x_1$ та $r_1 = -$ (відповідно $x_m \sim x_m$ та $r_{m-1} = -$). Ми називатимемо слово w

- *звичайним*, якщо жоден з його кінців не є особливим;
- *особливим*, якщо один з його кінців є особливим;
- *біособливим*, якщо обидва його кінці є особливими.

Зауважимо, що особливе слово ніколи не може бути симетричним, біспеціальне слово завжди є повним, квазісиметричне слово завжди є біособливим.

(5) Якщо $r_1 = r_{m-1} = \sim$ і $x_m - x_1$ в $\mathfrak{X}$, ми називатимемо w *$\mathfrak{X}$-циклом.* Зазначимо, що в цьому випадку m завжди парне. Для циклу w покладімо $r_m = -$ та $x_{qm+k} = x_k$, $r_{qm+k} = r_k$ для цілих q, k.

(6) Ми називатимемо $\mathfrak{X}$-цикл $w = x_1 r_1 x_2 r_2 x_3 \dots r_{m-1} x_m$ *неперіодичним*, якщо послідовність $x_1 r_1 x_2 r_2 \dots x_m r_m$ неможливо переписати як низку $vv \dots v$ коротших послідовностей v.

(7) *k-ий зсув* цикла w визначається як цикл $w^{[k]} = x_{k+1} r_{k+1} x_{k+2} \dots r_{k-1} x_k$ для деякого парного цілого $0 \leqslant k < m$. Ми називатимемо неперіодичний цикл w *симетричним*, якщо $w^* = w^{[k]}$ для деякого k. (Зазначимо, що $w^{[k]} = w^{[l]}$ з $k \neq l$ є неможливим, якщо цикл w неперіодичний.)

(8) Для цикла w і парного цілого $0 \leqslant k < m$ визначимо $\nu(k, w)$ як кількість парних цілих $0 \leqslant i \leqslant k$ таких, що x_{i-1} та x_i належать $\mathfrak{E}$ або $\mathfrak{F}$ одночасно.

Означення 9. (1) *Звичайними струнними* даними є несиметричне повне звичайне слово.

(2) *Особливими струнними* даними є пара (w, δ), де w - особливе повне слово і $\delta \in \{+, -\}$.

(3) *Біособливими струнними* даними є четвірка $(w, m, \delta_1, \delta_2)$, де w - біособливе слово, яке не є ані симетричним, ні квазісиметричним, $m \in \mathbb{N}$ та $\delta_i \in \{+, -\}$.

(4) *Стрічковими* даними є пара (w, f), де w - неперіодичний цикл, а $f \in \mathbf{k}[t]$ - *примарний многочлен* над полем $\mathbf{k}$, тобто ступінь нерозкладного многочлена зі старшим коефіцієнтом 1, такий, що $f(0) \neq 0$, а якщо w симетричне, то ще й $f(1) \neq 0$. Якщо поле $\mathbf{k}$ є алгебраїчно замкненим і $f = (t - \lambda)^d$, ми писатимемо (w, d, λ) замість (w, f).

(5) Наступні струнні дані звуться *еквівалентними*:

(a) звичайні струнні дані w та w^*;

(b) особливі струні дані (w, δ) та (w^*, δ);

(c) біособливі струні дані $(w, m, \delta_1, \delta_2)$ та $(w^*, m, \delta_2, \delta_1)$.

(6) Два набори стрічкових даних звуться *еквівалентними*, якщо вони можуть бути отримані одні з одних через послідовність наступних перетворень:

(a) заміна (w, f) на $(w^{[k]}, f)$, якщо $\nu(k, w)$ парне;

(b) заміна (w, f) на $(w^{[k]}, \alpha^{-1}t^d f(1/t))$, де $d = \deg f$ і $\alpha = f(0)$, якщо $\nu(k, w)$ непарне;

(c) заміна (w, f) на (w^*, f).

Зауважимо, що якщо $f(t) = (t-\lambda)^d$, то $\alpha^{-1}t^d f(1/t) = (t - \lambda^{-1})^d$.

Тепер можна сформулювати основну теорему про в'язки ланцюгів.

ТЕОРЕМА 10. *Існує взаємнооднозначна відповідність між класами ізоморфізму нерозкладних зображень в'язок ланцюгів і класами еквівалентності струнних та стрічкових даних.*

Ми називаємо нерозкладні зображення, що відповідають звичайним струнним даним (особливим струнним даним, біособливим струнним даним, стрічковим даним) *звичайні струни* (або, відповідно, *особливі струни, біособливі струни, стрічки*).

Розділ 2

БІМОДУЛЬНІ ЗАДАЧІ НАД КІЛЬЦЯМИ

1. Бімодульні категорії. Теорема редукції

Нагадаємо деякі означення, пов'язані з бімодульними категоріями [**21, 28**]. Усі категорії та алгебри, які ми розглядаємо, є категоріями та алгебрами над деяким фіксованим комутативним кільцем K. Нехай $\mathbf{A}$ — деяка категорія, $\mathbf{M}$ — деякий $\mathbf{A}$-бімодуль, тобто біадитивний біфунктор $\mathbf{M} : \mathbf{A}^{\circ} \times \mathbf{A} \to \mathbf{Ab}$ (категорія абелевих груп). *Диференціюванням* ∂ категорії $\mathbf{A}$ до бімодуля $\mathbf{M}$ зветься набір K-лінійних відображень $\partial(X, Y) : \mathbf{A}(X, Y) \to \mathbf{M}(X, Y)$, які задовольняють правилу Ляйбніца: $\partial(ab) = (\partial a)b + a(\partial b)$. Якщо задано бімодуль $\mathbf{M}$ та диференціювання ∂, *бімодульна категорія* $\mathbf{El}(\mathbf{M}, \partial)$ визначається в такий спосіб.

- Множиною *об'єктів* категорії $\mathbf{El}(\mathbf{M}, \partial)$ є об'єднання множин елементів $\bigsqcup_{X \in \operatorname{Ob} \mathbf{A}} \mathbf{M}(X, X)$.
- *Морфізмом* об'єкта $x \in \mathbf{M}(X, X)$ в об'єкт $y \in \mathbf{M}(Y, Y)$ зветься такий морфізм $f \in \mathbf{A}(X, Y)$, що $fx = yf + \partial f$ (зауважимо, що всі елементи з останньої рівності належать $\mathbf{M}(X, Y)$).

Очевидно, $\mathbf{El}(\mathbf{M}, \partial)$ знову є категорією над кільцем K. Більш того, якщо категорія $\mathbf{A}$ є *адитивною* (тобто в ній існують прямі суми) або *цілком адитивною* (тобто такою адитивною категорією, в якій кожен ідемпотентний морфізм визначає розклад у пряму суму), то такою ж є й бімодульна категорія $\mathbf{El}(\mathbf{M}, \partial)$. Очевидно також, що коли ми замінимо категорію $\mathbf{A}$ еквівалентною їй категорією $\mathbf{A}'$, а $\mathbf{A}$-бімодуль $\mathbf{M}$ — відповідним $\mathbf{A}'$-бімодулем $\mathbf{M}'$, в результаті одержимо категорію $\mathbf{El}(\mathbf{M}', \partial')$ еквівалентну $\mathbf{El}(\mathbf{M}, \partial)$. Наприклад, в якості $\mathbf{A}'$ можна взяти повну підкатегорію $\mathbf{A}$, яка містить по одному представнику з кожного класу ізоморфізму, а за $\mathbf{M}'$ — обмеження $\mathbf{M}$ на $\mathbf{A}'$.

Нехай $\mathbf{N}$ — підбімодуль в $\mathbf{M}$, $\mathbf{L} = \mathbf{M}/\mathbf{N}$. Позначимо ∂_L композицію диференціювання ∂ з сюр'єкцією $\pi : \mathbf{M} \to \mathbf{L}$; очевидно, це є диференціювання категорії $\mathbf{A}$ до бімодуля $\mathbf{L}$. Проекція π індукує функтор $\Pi : \mathbf{El}(\mathbf{M}, \partial) \to \mathbf{El}(\mathbf{L}, \partial_L)$, який також сюр'єктивний. Для кожного елемента $\xi \in \mathbf{L}(X, Y)$ фіксуємо деякий прообраз $\hat{\xi} \in \mathbf{M}(X, Y)$, тобто такий елемент, що $\pi(\hat{\xi}) = \xi$.

Теорема 11. *У описаній ситуації позначимо* $\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{El}(\mathbf{L}, \partial_L)$ *і розглянемо* $\widetilde{\mathbf{A}}$*-бімодуль* $\widetilde{\mathbf{N}}$ *та диференціювання* $\widetilde{\partial} : \widetilde{\mathbf{A}} \to \widetilde{\mathbf{N}}$, *визначені в такий спосіб:*

- $\widetilde{\mathbf{N}}(\xi, \eta) = \mathbf{N}(X, Y)$, *якщо* $\xi \in \mathbf{L}(X, X)$, $\eta \in \mathbf{L}(Y, Y)$.

- $\widetilde{\partial}(f) = f\hat{\xi} - \hat{\eta}f - \partial f$, *якщо* $f : x \to y$ *в категорії* $\mathbf{El}(\mathbf{L}, \partial_L)$.

Тоді категорії $\mathbf{El}(\widetilde{\mathbf{N}}, \widetilde{\partial})$ *та* $\mathbf{El}(\mathbf{M}, \partial)$ *еквівалентні. Ця еквівалентність задається відображенням* $\phi : \mathbf{El}(\widetilde{\mathbf{N}}, \widetilde{\partial}) \to \mathbf{El}(\mathbf{M}, \partial)$, *яке переводить елемент* $x \in \widetilde{\mathbf{N}}(\xi, \xi)$ *в елемент* $x + \hat{\xi}$.

Доведення зводиться до простої перевірки, якщо зауважити, що на об'єктах відображення ϕ є бієктивним за визначенням.

2. Застосування до артінового випадку

Припустимо, що категорія $\mathbf{A}$ та бімодуль $\mathbf{M}$ *локально артінові*, тобто всі K-модулі $\mathbf{A}(X, Y)$ та $\mathbf{M}(X, Y)$ є модулями скінченної довжини. Крім того, ми вважатимемо, що категорія $\mathbf{A}$ є цілком адитивною. Тоді ця категорія *локальна*, тобто кожен її об'єкт $X \in \operatorname{Ob} \mathbf{A}$ розкладається у скінченну пряму суму нерозкладних, а кільце ендоморфізмів кожного нерозкладного об'єкту є локальним артіновим кільцем. Якщо об'єкт $X \in \operatorname{Ob} \mathbf{A}$ розкладається у пряму суму d нерозкладних об'єктів, назвемо число d *розмірністю* об'єкта X, а також *розмірністю* кожного елемента $x \in \mathbf{M}(X, X)$. *Радикал* $\operatorname{rad} \mathbf{A}$ такої категорії збігається з множиною таких морфізмів $f : X \to Y$, для яких в якомусь (а тоді в кожному) розкладі $X \simeq \bigoplus_j X_j$, $Y \simeq \bigoplus_i Y_i$, де X_i та Y_j нерозкладні, відповідає матриця (f_{ij}), де $f_{ij} : X_j \to Y_i$, всі компоненти якої необертовні. Факторкатегорія $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}/\operatorname{rad}\mathbf{A}$ є *напівпростою*, тобто такою локальною категорією, в якій кожен ненульовий морфізм між нерозкладними об'єктами є ізоморфізмом. Бімодуль $\mathbf{M}$ повністю визначається своїм обмеженням на *кістяк* $\mathbf{A}_0$ категорії $\mathbf{A}$, тобто повну підкатегорію, яка складається з нерозкладних об'єктів, взятих по одному з кожного класу ізоморфізму. Позначимо $\overline{\mathbf{M}} = \mathbf{M}/(\operatorname{rad}\mathbf{A}\mathbf{M} + \mathbf{M}\operatorname{rad}\mathbf{A})$; це бімодуль над $\overline{\mathbf{A}}$. Нехай $\overline{\mathbf{M}}(X_0, Y_0) \neq 0$ для якоїсь пари об'єктів $X_0, Y_0 \in \operatorname{Ob}\mathbf{A}_0$. Визначимо підмодуль $\mathbf{M}' \subseteq \overline{\mathbf{M}}$ на об'єктах з $\mathbf{A}_0$ правилом

$$\mathbf{M}'(X,Y) = \begin{cases} \overline{\mathbf{M}}(X_0,Y_0) & \text{якщо } \; X = X_0, \; Y = Y_0, \\ 0 & \text{інакше.} \end{cases}$$

Це дійсно підмодуль, оскільки $\overline{\mathbf{A}}(X_0, X) = \overline{\mathbf{A}}(X, X_0) = 0$ при $X \in \mathbf{A}_0, \; X \neq X_0$ і $\overline{\mathbf{A}}(Y_0, Y) = \overline{\mathbf{A}}(Y, Y_0)$ при $Y \in \mathbf{A}_0, \; Y \neq Y_0$. Оскільки $\overline{\mathbf{M}}(X_0, Y_0)$ є K-модулем скінченної довжини, в $\mathbf{M}'$ є максимальний підбімодуль $\mathbf{M}''$. Позначимо через $\mathbf{N}$ прообраз $\mathbf{M}''$ в $\mathbf{M}$. Тоді $\mathbf{L} = \mathbf{M}/bN \simeq \overline{\mathbf{M}}/\mathbf{M}''$ — простий $\mathbf{A}$-бімодуль. За побудовою, він анулюється радикалом $\operatorname{rad}\mathbf{A}$. Тому обмеження диференціювання ∂_L на радикал є гомоморфізмом бімодулів:

$$\partial_L(ab) = (\partial a)b + a(\partial b) = \begin{cases} a(\partial b), & \text{якщо } \; b \in \operatorname{rad}\mathbf{A}, \\ (\partial a)b, & \text{якщо } \; a \in \operatorname{rad}\mathbf{A}. \end{cases}$$

Отже, або це обмеження нульове, або воно сюр'єктивне, тобто для кожного елемента $\xi \in \mathbf{L}(X,Y)$ існує такий елемент $r \in \operatorname{rad}\mathbf{A}$, що $\xi = \partial_L r$. Якщо $X = Y$, цю рівність можна переписати як $(1_X + r)\xi = 0(1_X + r) + \partial_L r$, бо $r\xi = \partial 1_X = 0$. Оскільки морфізм $1_X + r$ $(r \in \operatorname{rad}\mathbf{A})$ є завжди обертовним, кожен елемент з $\mathbf{L}(X,X)$ ізоморфний нульовому елементу. Отже, нерозкладними елементами категорії $\mathbf{El}(\mathbf{L},\partial_L)$ у цьому випадку є лише нульові елементи з $\mathbf{L}(X,X)$, де об'єкт X нерозкладний в $\mathbf{A}$ (з точністю до ізоморфізму $X \in \mathbf{A}_0$).

Надалі припустимо, що $\partial_L(\operatorname{rad}\mathbf{A}) = 0$. Зокрема, якщо $X_0 \neq Y_0$, то взагалі $\partial_L = 0$. Позначимо $\overline{\mathbf{A}}(X_0,X_0) = A$, $\overline{\mathbf{A}}(Y_0,Y_0) = B$, $U = \mathbf{L}(X_0,Y_0)$. K-алгебри A, B є тілами, тому існують максимальні ідеали $\mathfrak{m}$ та $\mathfrak{n}$ у кільці K такі, що $\mathfrak{m}A = \mathfrak{n}B = 0$. Оскільки $U \neq 0$, обов'язково $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$. Отже, A і B — скінченновимірні тіла над полем $\mathbf{k} = K/\mathfrak{m}$, а U — скінченновимірний (над $\mathbf{k}$) A-B-бімодуль.

Твердження 12. *Припустимо, що $X_0 \neq Y_0$. Позначимо*

$$m = \min\{\dim_A U, \dim_B U\}, \quad n = \max\{\dim_A U, \dim_B U\}.$$

(1) *Якщо $m = 1$, $n \leqslant 3$, у категорії $\mathbf{El}(\mathbf{L},\partial_L)$ є лише скінченна кількість нерозкладних неізоморфних об'єктів.*

(2) *Якщо* $m > 1$ *або* $n \geqslant 4$, *категорія* $\mathbf{El}(\mathbf{L}, \partial_L)$ *(а тому й* $\mathbf{El}(\mathbf{M}, \partial)$*) містить безліч нерозкладних неізоморфних об'єктів, причому розмірності цих об'єктів необмежені. Якщо, крім того, поле* $\mathbf{k}$ *нескінченне, існує безліч розмірностей, в кожній з яких є безліч нерозкладних неізоморфних об'єктів.*

Це твердження добре відомо (див. напр. [**24**]).

Твердження 13. *Якщо* $X_0 = Y_0$, *в категорії* $\mathbf{El}(\mathbf{L}, \partial_L)$ *(а тому й у* $\mathbf{El}(\mathbf{M}, \partial)$*) існує безліч неізоморфних нерозкладних об'єктів, причому розмірності цих об'єктів необмежені. Якщо, крім того, поле* $\mathbf{k}$ *нескінченне, існує безліч розмірностей, в кожній з яких є безліч нерозкладних неізоморфних об'єктів.*

Доведення. Зауважимо, що тут $A = B$ і $m = n$. Об'єкт x категорії $\mathbf{El}(\mathbf{L}, \partial_L)$ — це квадратна матриця з коефіцієнтами з U (розміру $k \times k$, якщо $x \in \mathbf{L}(X, X)$, де $X = kX_0$). Дві такі матриці x, y ізоморфні в категорії $\mathbf{El}(\mathbf{L}, \partial_L)$, якщо існує така обертовна матриця S з коефіцієнтами з A, що $Sx = yS + \partial_L S$. Фіксуємо базу $u_1, u_2, \ldots, u_n$ U як правого A-модуля і позначимо $\phi(a)$, де $a \in A$, таку матрицю $(a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n, A)$, що $au_j = \sum_{i=1}^{n} u_i a_{ij}$. Очевидно, ϕ — гомоморфізм $A \to \mathrm{Mat}(n, A)$. Припустимо, що $n = 1$; тоді ϕ — автоморфізм тіла A, а елемент $u = u_1 a$

ототожнюється з елементом $a \in A$. Розглянемо кільце $P = A[t; \phi, \partial_L]$ *скручених многочленів*. Нагадаємо, що його елементи — многочлени вигляду $\sum_{i=1}^{d} t^i a_i$, але з множенням, "підкрученим" за правилом $at = t\phi(a) + \partial_L(a)$ для $a \in A$. Об'є кти з $\mathbf{El}(\mathbf{L}, \partial_L)$, тобто квадратні матриці x над A можна ототожнити з P-модулями (скінченновимірними над $\mathbf{k}$, або, що те саме, над A): у відповідному модулі елемент t діє як множення на матрицю x. Розмірність такого об'єкту дорівнює розмірності над A відповідного модуля. Ізоморфні об'єкти відповідають ізоморфним модулям і навпаки. Відомо (див. напр. [**8**]), що кільце P має нерозкладні модулі довільної розмірності над A, що й доводить твердження. Якщо, крім того, поле $\mathbf{k}$ нескінченне, існує безліч розмірностей, в кожній з яких є безліч нерозкладних неізоморфних об'єктів (це, наприклад, об'єкти, які задаються жордановими клітинами над полем $\mathbf{k}$). Випадок $n > 1$ розглядається так само (навіть простіше). $\square$

3. Гіпотеза Брауера–Тролла

Результати попереднього розділу мають такий важливий наслідок.

Наслідок 14. *Припустимо, що категорія* $\mathbf{A}$ *та бімодуль* $\mathbf{M}$ *локально артінові. Якщо в категорії* $\mathbf{El}(\mathbf{M}, \partial)$ *існує безліч неізоморфних нерозкладних об'єктів, то їхні* *розмірності необмежені. Якщо, крім того, в якійсь розмірності є безліч неізоморфних об'єктів, то існує безліч розмірностей, в кожній з яких є безліч нерозкладних неізоморфних об'єктів.*

ДОВЕДЕННЯ. Насправді досить довести останнє твердження. Воно ж легко виводиться (індукцією за розмірністю) з тверджень 12 та 13 (так само, як, наприклад, у [**28**]). □

Цей результат є варіантом відомої гіпотези Брауера–Тролла для бімодульних задач у підсиленій формі (підсиленням є останнє твердження про існування безлічі розмірностей). За допомогою стандартної техніки мінімальних резольвент з нього випливає аналогічна теорема для зображень алгебр.

ТЕОРЕМА 15. *Нехай Λ — алгебра над локальним нетеровим комутативним кільцем K, скінченнопороджена як K-модуль. Якщо Λ має безліч неізоморфних нерозкладних модулів скінченної довжини (над K), то довжини цих модулів необмежені. Більш того, якщо існує безліч неізоморфних Λ-модулів деякої фіксованої довжини, то існує безліч довжин, для кожної з яких є безліч нерозкладних неізоморфних Λ-модулів даної довжини.*

ДОВЕДЕННЯ. Знов-таки, достатньо довести останнє твердження. Оскільки нас цікавлять лише модулі скінченної довжини, нічого не зміниться, якщо ми замінимо K його $\mathfrak{m}$-адичним поповненням $\hat{K}$, де $\mathfrak{m}$ — максимальний ідеал, а алгебру Λ — $\hat{K}$-алгеброю $\Lambda \otimes_K \hat{K}$. Тому надалі ми вважатимемо K повним у $\mathfrak{m}$-адичній топології. Тоді відомо, що Λ є напівдосконалим кільцем у розумінні [**16**] і для кожного скінченнопородженого Λ-модуля M існує *мінімальне проективне подання*, тобто такий гомоморфізм скінченнопороджених проективних Λ-модулів $f : P_1 \to P_0$, що $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{rad} P_0$, $\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{rad} P_1$ і $M \simeq \operatorname{Cok} f$. Більш того, таке подання єдине з точністю до ізоморфізмів модулів P_0 та P_1. Нехай $\mathbf{P}$ — категорія скінченнопороджених проективних Λ-модулів, $\mathbf{R}$ — $\mathbf{P}$-бімодуль, визначений правилом $\mathbf{R}(P, P') = \operatorname{Hom}_\Lambda(P, \operatorname{rad} P')$ і функтор $C : \mathbf{El}(\mathbf{R}) \to \Lambda\text{-mod}$ переводить $f \in \mathbf{R}(P, P')$ в $\operatorname{Cok} f$. Цей функтор є *щільним*, тобто кожен модуль ізоморфний деякому Cf, а $Cf \simeq Cf'$ тоді й лише тоді, коли ці два гомоморфізми відрізняються лише на тривіальні прямі доданки вигляду $Q_i \to 0$ для деяких нерозкладних Q_i. Оскільки останніх є лише скінченна кількість, їх можна не брати до уваги. Отже, умови теореми виконуються для алгебри Λ тоді й лише тоді, коли умови наслідку 14 виконуються для $\mathbf{P}$-бімодуля $\mathbf{R}$. З цього й випливає доведення теореми. $\square$

Розділ 3

ЗВАЖЕНІ ЧАСТКОВО-ВПОРЯДКОВАНІ МНОЖИНИ СКІНЧЕНОГО ТИПУ

Зображення частково впорядкованих множин були вперше розглянуті в роботі [**9**]. У роботах [**6, 7**] було дано критерій скінченності типу та описані нерозкладні зображення множин скінченного типу. Надалі, у роботі [**28**], за прикладом [**1**], було побудовано перетворення Коксетера, за допомогою яких критерій скінченності типу та вигляд нерозкладних зображень було одержано без прямих обчислень. Деякий недолік, порівняно з [**1**], полягав у тому, що не вдалося побудувати всі функтори віддзеркалень. Його було ліквідовано в роботі [**26**]. Для цього довелося дещо узагальнити задачу, розглянувши зображення *перерізаних* частково впорядкованих множин.

Зауважимо, що всі ці задачі є "розщепленими" в тому розумінні, що в них не беруть участь розширення основного поля. Ситуації, де такі розширення виникають, були розглянуті Длабом і Рінгелем [**24, 23**]. Задачі, розглянуті в [**23**] є деяким узагальненням зображень частково впорядкованих множин, хоча степінь загальності в цій роботі видається недостатньою, особливо в порівнянні з [**24**].

Мета нашої роботи — узагальнити зображення частково вполрядкованих множин на випадок, коли розглядаються розширення (в тому числі некомутативні) основного поля, побудувати для них функтори віддзеркалень і за їх допомогою дати критерій скінченності типу й опис нерозкладних зображень у скінченному випадку. Клас задач, який при цьому виникає, ми назвемо *зображеннями зважених частково впорядкованих множин.* На наш погляд, це найприродніше узагальнення зображень частково впорядкованих множин. До речі, навіть у "розщепленому" випадку воно включає ще й так звані *шурівські категорії векторних просторів.*

1. Означення і основна теорема

Нагадаємо з [**26**], що *перерізана частково впорядкована множина* — це частково впорядкована множина $\mathbf{S}$ разом із розбиттям $\mathbf{S} = \mathbf{S}^- \cup \mathbf{S}^+$ $(\mathbf{S}^- \cap \mathbf{S}^+ = \emptyset)$ таким, що коли $i \in \mathbf{S}^-$ і $j < i$, то й $j \in \mathbf{S}^-$. Ми вводимо новий символ $0 \notin \mathbf{S}$ та покладаємо $\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{S} \cup \{ 0 \}$.

Це видається зручним, і ми й надалі так робитимемо, покладаючи $0 < i$ для $i \in \mathbf{S}^-$ і $i < 0$ для $i \in \mathbf{S}^+$. Зазначимо, що $<$ є порядком на $\widehat{\mathbf{S}}^-$ і на $\widehat{\mathbf{S}}^+$, але не є порядком на $\widehat{\mathbf{S}}$. Ми писатимемо

- $i \lessdot j$ якщо $i < j$ і або обидва $i, j \in \widehat{\mathbf{S}}^-$, або вони $i, j \in \widehat{\mathbf{S}}^+$;

- $i \ll j$ якщо $i < j,\ i \in \mathbf{S}^-,\ j \in \mathbf{S}^+$;
- $i \lesseqgtr j$ якщо $i < j$ або $j < i$ для $i, j \in \mathbf{S}$.

Фіксуємо деяке "базове" поле $\Bbbk$. Ми розглядатимемо скінченновимірні тіла (алгебри з діленням) над $\Bbbk$ та скінченновимірні бімодулі над такими тілами. Якщо V є $\mathbf{K}$-$\mathbf{L}$-бімодулем, а W є $\mathbf{L}$-$\mathbf{F}$-бімодулем, позначатимемо через VW $\mathbf{K}$-$\mathbf{F}$-бімодуль $V \otimes_{\mathbf{L}} W$. Позначимо також $V^* = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, \Bbbk) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(V, \mathbf{K}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{L}}(V, \mathbf{L})$. Нагадаємо відомі еквівалентності функторів:

(1)

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}\text{-}\mathbf{F}}(UV, W) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}\text{-}\mathbf{L}}(U, WV^*) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{L}\text{-}\mathbf{F}}(V, U^*W) \simeq$$
$$\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{F}\text{-}\mathbf{L}}(W^*U, V^*) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{L}\text{-}\mathbf{K}}(VW^*, U^*),$$

де U, V, W є, відповідно, $\mathbf{K}$-$\mathbf{L}$-, $\mathbf{L}$-$\mathbf{F}$- та $\mathbf{K}$-$\mathbf{F}$-бімодулями, так само як ізоморфізм дуальності $V \simeq V^{**}$. Якщо відображення f належить одному з цих просторів, ми звичайно позначатимемо через $\widetilde{f}$ його образ в іншому, під дією відповідного ізоморфізму.

Означення 16. *Зважена перерізана частково впорядкована множина*, або *ЗВМ*, складається з:

- (Скінченної) перерізаної частково впорядкованої множини $\mathbf{S} = \mathbf{S}^- \cup \mathbf{S}^+$.
- Відображення $i \mapsto \mathbf{K}(i)$, де $i \in \hat{\mathbf{S}}$, а $\mathbf{K}(i)$ — скінченновимірне тіло (алгебра з діленням) над базовим полем $\mathbf{K}$.

- Набору скінченновимірних $\mathbf{K}(i)$-$\mathbf{K}(j)$-бімодулів $V(ij)$, заданих для кожної пари $i, j \in \hat{\mathbf{S}}$ такої, що:
  - або $j < i$, причому обидва ці елементи одночасно належать $\mathbf{S}^-$ чи $\mathbf{S}^+$;
  - або $i < j,\ i \in \mathbf{S}^-,\ j \in \mathbf{S}^+$;
  - або $i \in \mathbf{S}^-,\ j = 0$;
  - або $i = 0,\ j \in \mathbf{S}^+$.
- Набору $\mathbf{K}(i)$-$\mathbf{K}(j)$-лінійних відображень $\mu(ikj)$: $V(ik)V(kj) \to V(ij)$, заданих для кожної трійки $i, j, k \in \hat{\mathbf{S}}$, для якої всі ці простори визначені. Ми писатимемо uv замість $\mu(ijk)(u \otimes v)$.

При цьому мають виконуватись наступні умови:

- "*асоціативність*": $\mu(ilj)(\mu(ikl \otimes 1) = \mu(ikj)(1 \otimes \mu(klj))$, як тільки всі ці простори визначені;
- "*шуровість*":
  - якщо $j < i$ і $i \in \mathbf{S}^-$, то для кожного ненульового елемента $v \in V(ij)$ знайдеться елемент $u \in V(j0)$, для якого $vu \neq 0$;
  - якщо $j < i$ і $j \in \mathbf{S}^+$, то для кожного ненульового елемента $v \in V(ij)$ знайдеться елемент $u \in V(0i)$, для якого $uv \neq 0$;
  - усі відображення $\mu(j0i)$ $(i < j,\ i \in \mathbf{S}^-,\ j \in \mathbf{S}^+)$ сюр'єктивні.

Ми часто писатимемо “ЗВМ $\mathbf{S}$”, не уточнюючи складові $\mathbf{S}^{\pm}$, $\mathbf{K}(i)$, $V(ij)$ та $\mu(ikj)$.

Означення 17. *Зображення* (M, f) ЗВМ $\mathbf{S}$ складається з:

- Скінченновимірних $\mathbf{K}(i)$-векторних просторів $M(i)$, заданих для кожного $i \in \hat{\mathbf{S}}$.
- $\mathbf{K}(0)$-лінійних відображень $f(i) : M(i) \to V(i0)M(0)$, заданих для кожного $i \in S^-$ та $\mathbf{K}(j)$-лінійних відображень $f(j) : M(0) \to V(0j)M(j)$, заданих для кожного $j \in S^+$.

При цьому для кожної пари $i < j,\ i \in \mathbf{S}^-,\ j \in \mathbf{S}^+$ добуток

$$M(i) \xrightarrow{f(i)} V(i0)M(0) \xrightarrow{1\otimes f(j)} V(i0)V(0j)M(j) \xrightarrow{\mu(i0j)\otimes 1} V(ij)M(j)$$

має бути нульовим.

Зображення M зветься *справжнім*, якщо $M(i) \neq 0$ для всіх $i \in \hat{\mathbf{S}}$; інакше воно зветься *несправжнім*.

Зауваження. Зауважимо, що коли всі тіла $\mathbf{K}(i)$ та всі бімодулі $V(ij)$ збігаються з полем $\mathbf{k}$, а всі відображення $\mu(ikj)$ тотожні, ці означення перетворюються на означення зображень перерізаної частково впорядкованої множини з роботи [**26**]. У більш загальному випадку, коли $\mathbf{K}(i) = \mathbf{k}$ для всіх i, але бімодулі $V(ij)$ можуть бути не одновимірними, одержимо деяке узагальнення шурівських категорій векторних просторів. Слід, правда, зауважити, що в останньому випадку задача не може мати скінченний тип.

Так визначені зображення та їх морфізми утворюють $\mathbf{k}$-лінійну, цілком адитивну категорію $\operatorname{rep}\mathbf{S}$. Оскільки всі простори морфізмів $\operatorname{Hom}(M,N)$ у цій категорії скінченновимірні, ця категорія локальна, зокрема, в ній виконується теорема Крулля–Шмідта про однозначний розклад у пряму суму нерозкладних об'єктів.

Означення 18. Морфізм $\phi : (M,f) \to (N,g)$ зображень ЗВМ $\mathbf{S}$ — це набір $\mathbf{K}(i)$-лінійних відображень

$$\phi(i) : M(i) \to N(i) \quad \text{для} \quad i \in \hat{S},$$

$$\phi(ij) : M(j) \to V(ij)N(j) \quad \text{для } i<j,\ i,j \in S^-, \text{ або } i,j \in S^+,$$

які задовольняють співвідношення

$$g(i)\phi(0) = (1 \otimes \phi(i))f(i) + \sum_{i<j} (\mu(0ji) \otimes 1)(1 \otimes \phi(ij))f(j)$$

для $i \in S^+$ та

$$g(i)\phi(i) = (1 \otimes \phi(0))f(i) + \sum_{j<i} (\mu(ij0) \otimes 1)(1 \otimes g(j))\phi(ji)$$

для $i \in S^+$.

Ми збираємось знайти критерій того, що ЗВМ має скінченний зображувальний тип і в цьому випадку описати всінерозкладні зображення у випадку. Для цього, як і в [**1, 24, 28, 26**], ми використовуємо *Форму Тітса* та *функтори віддзеркалень*.

Означення 19. Казатимемо, що ЗВМ $\mathbf{S}$ має *скінченний тип*, якщо вона має лише скінченну кількість нерозкладних зображень з точністю до ізоморфізму.

Означення 20. *Формою Тітса* ЗВМ $\mathbf{S}$ зватимемо квадратичну форму $\mathrm{Q}_{\mathbf{S}}$ на (дійсному) векторному просторі $\mathrm{D}(\mathbf{S})$ функйцій $\hat{\mathbf{S}} \to \mathbf{R}$, де $\mathbf{R}$ — поле дійсних чисел, задану формулою

$$\mathrm{Q}_{\mathbf{S}}(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \hat{\mathbf{S}}} d_i \mathbf{x}(i) + \sum_{i,j \in \mathbf{S},\, i<j} v_{ij} \mathbf{x}(i)\mathbf{x}(j) - \sum_{i \in \mathbf{S}} v_i \mathbf{x}(0)\mathbf{x}(i),$$

де $d_i = \dim \mathbf{K}(i)$, $v_{ij} = \dim V(ij)$, $v_i = \dim V_{i0}$, якщо $i \in \mathbf{S}^+$, і $v_i = \dim V_{0i}$, якщо $i \in \mathbf{S}^-$; усі розмірності рахуються над основним полем $\mathbf{k}$.

Надалі ми фіксуємо стандартну базу e_i $(i \in \hat{\mathbf{S}})$ у просторі $\mathrm{D}(\mathbf{S})$, де $e_i(j) = \delta_{ij}$, і ототожнюємо функцію $\mathbf{x}$ з вектором $(x_i \,|\, i \in \hat{\mathbf{S}})$, де $x_i = \mathbf{x}(i)$. Зокрема, для кожного зображення M ЗВМ $\mathbf{S}$ визначена його (векторна) *розмірність* $\dim M \in \mathrm{D}(\mathbf{S})$, де $(\dim M)(i) = \dim_{\mathbf{K}(i)} M(i)$.

Форма Тітса є *цілою квадратичною формою* у розумінні [**13**], тому для неї визначені (дійсні) *корені*: це ті вектори, які можна одержати *відбиттями* з базових векторів e_i. Нагадаємо, що відбиття — це лінійне перетворення простору $\mathrm{D}(\mathbf{S})$, яке в кожному векторі змінює лише одну координату й зберігає значення форми $\mathrm{Q}_{\mathbf{S}}$.

Пригадаймо, що віддзеркалення σ_i визначається як унікальне нетотожнє лінійне відображення $\mathbb{R}^{\widehat{\mathbf{S}}} \to \mathbb{R}^{\widehat{\mathbf{S}}}$ таке що $\sigma_i \mathbf{x}(j) = \mathbf{x}(j)$ для всіх $j \neq i$ і $\mathrm{Q}_{\mathbf{S}}(\sigma_i \mathbf{x}) = \mathrm{Q}_{\mathbf{S}}(\mathbf{x})$ для всіх $\mathbf{x}$. Легко бачити, що

$$
\begin{aligned}
d_0 \sigma_0 \mathbf{x}(0) &= \sum_{i \in \mathbf{S}} d_{i0} \mathbf{x}(i) - d_0 \mathbf{x}(0), \\
d_i \sigma_i \mathbf{x}(i) &= d_{i0} \mathbf{x}(0) - d_i \mathbf{x}(i) - \sum_{j \lesseqgtr i} d_{ij} \mathbf{x}(j) \quad \text{якщо} \quad i \in \mathbf{S}.
\end{aligned}
$$

Ми пишемо $\mathbf{x} > 0$ і називаємо $\mathbf{x}$ *додатнім* якщо $\mathbf{x} \neq 0$ та $\mathbf{x}(i) \geqslant 0$ для всіх $i \in \widehat{\mathbf{S}}$. Особливо визначаються *додатні корені*. Основним результатом є наступна теорема, яка узагальнює результати [**28, 26**].

Теорема 21. *ЗВМ* $\mathbf{S}$ *має скінченний тип тоді й лише тоді, коли її форма Тітса слабо додатня, тобто* $\mathrm{Q}_{\mathbf{S}}(\mathbf{x}) > 0$ *для кожного ненульового вектора* $\mathbf{x}$ *з невід'ємними координатами. У цьому випадку*

- *розмірності нерозкладних зображень збігаються з додатніми коренями форми* $\mathrm{Q}_{\mathbf{S}}$
- *всі нерозкладні зображення однієї розмірності ізоморфні між собою.*

Те, що для множини скінченного типу форма Тітса слабо додатня — це загальний факт, який має місце для довільни х "*матричних задач*" і випливає, наприклад, із [**4**]. Отже, треба доводити обернене твердження, а також результати про розмірності нерозкладних зображень.

2. Функтори віддзеркалень

Спочатку визначимо віддзеркалення самих ЗВМ.

ОЗНАЧЕННЯ 22. (1) Нехай $\mathbf{S}$ - ЗВМ. Покладемо:

- $V(ii) = \mathbf{K}(i)$ і візьмемо за $\mu(iij)$ та $\mu(ijj)$ природні ізоморфізми $\mathbf{K}(i)V(ij) \simeq V(ij)$ та $V(ij)\mathbf{K}(j) \simeq V(ij)$ при визначеному $V(ij)$;
- $V(ji) = V(ij)^*$ при визначеному $V(ij)$;
- $\mu(kji)$ та $\mu(jik)$ відображення, що відповідають $\mu(ikj)$ через ізоморфізм (**1**) при визначеному $\mu(ikj)$.

Легко перевірити, що умови асоціативності справджуються також і для цих відображень, а умови невиродженості перетворюються в сюр'єктивність відображень $\mu(j0i)$ for all $i, j \in \mathbf{S},\ j < i$.

(2) Ми називаємо елемент $p \in \widehat{\mathbf{S}}$ *початком* (*кінцем*) якщо це максимальний елемент $\widehat{\mathbf{S}}^-$ (відповідно мінімальний елемент $\widehat{\mathbf{S}}^+$). Зокрема 0 - початок (кінець) тоді й лише тоді, коли $\mathbf{S}^- = \emptyset$ (відповідно, $\mathbf{S}^+ = \emptyset$).

(3) Для кожного початку або кінця p ми визначаємо *віддзеркалену* ЗВМ $\mathbf{S}_p$ з тими самими відповідними частково впорядкованими множинами і тими самими значеннями $\mathbf{K}(i)$:

   (a) Якщо $p \in \mathbf{S}^-$ ($p \in \mathbf{S}^+$) - початок (відповідно, кінець), то $\mathbf{S}_p^- = \mathbf{S}^- \setminus \{\,p\,\}$, $\mathbf{S}_p^+ = \mathbf{S}^+ \cup \{\,p\,\}$ (відповідно, $\mathbf{S}_p^+ = \mathbf{S}^+ \setminus \{\,p\,\}$, $\mathbf{S}_p^- = \mathbf{S}^- \cup \{\,p\,\}$);

   (b) Якщо 0 - початок (кінець), то $\mathbf{S}^- = \mathbf{S},\ \mathbf{S}^+ = \emptyset$ (відповідно, $\mathbf{S}^+ = \mathbf{S},\ \mathbf{S}^- = \emptyset$).

   Нові значення $V(ij)$ та $\mu(ikj)$ визначаються як і в(1).

Зазначимо, що якщо p - початок (або кінець) в $\widehat{\mathbf{S}}$, він стає кінцем (або, відповідно, початком) в $\widehat{\mathbf{S}}_p$.

Також ми розглядаємо *дуальну* ЗВМ.

Означення 23. Нехай $\mathbf{S}$ - ЗВМ, $M = (M, f)$ - зображення $\mathbf{S}$. *Дуальна* ЗВМ $\mathbf{S}^\circ$ та *дуальне зображення* $M^\circ(M^\circ, f^\circ)$ визначається в наступний спосіб:

(1) Як впорядкована множина $\mathbf{S}^\circ$ протилежна до $\mathbf{S}$, тобто яка складається з тих сами елементів, але $i < j$ в $\mathbf{S}^\circ$ тоді й лише тоді, коли $j < i$ в $\mathbf{S}$. Розділ задається правилом $\mathbf{S}^{\circ\pm} = \mathbf{S}^{\mp}$. Тіла $\mathbf{K}^\circ(i)$ протилежні до $\mathbf{K}(i)$, $V^\circ(ij) = V(ji)$ як $\mathbf{K}^\circ(i)$-$\mathbf{K}^\circ(j)$-bimodule, і $\mu^\circ(ikj) = \mu(jki)$ під дією природнього утотожнення $V^\circ(ik)V^\circ(kj)$ та $V(jk)V(ki)$.

(2) $M^\circ(i) = M(i)^*$ і $f^\circ(i) = \widetilde{f(i)^*}$, а саме,

(a) якщо $i \in \mathbf{S}^{\circ+} = \mathbf{S}^-$, тобто $f(i) : M(i) \to V(i0)M(0)$, тоді $f(i)^* : M(0)^*V(i0)^* \to M(i)^*$ і

$$\widetilde{f(i)^*} : M(0)^* = M^\circ(0) \to M(i)^*V(i0) = V^\circ(0i)M^\circ(i);$$

(b) якщо $i \in \mathbf{S}^{\circ-} = \mathbf{S}^+$, тоді $f(i) : M(0) \to V(0i)M(i)$, тоді $f(i)^* : M(i)^*V(0i)^* \to M(0)^*$, і

$$\widetilde{f(i)^*} : M(i)^* = M^\circ(i) \to M(0)^*V(0i) = V^\circ(i0)M^\circ(0).$$

(3) Якщо $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(M, N)$, ми визначаємо морфізм $\phi^\circ : N^\circ \to M^\circ$, покладаючи $\phi^\circ(i) = \widetilde{\phi(i)^*}$ і $\phi^\circ(ij) = \widetilde{\phi(ji)^*}$.

Згідно з цими означеннями наступний результат є цілком очевидним.

Твердження 24. *Означення 23 встановлює функтор дуальності* $^\circ : \mathrm{rep}\,\mathbf{S} \to \mathrm{rep}\,\mathbf{S}^\circ$, *тобто еквівалентність* $\mathrm{rep}\,\mathbf{S} \to (\mathrm{rep}\,\mathbf{S}^\circ)^{\mathrm{op}}$ *таку що існує природній ізоморфізм* $M \simeq (M^\circ)^\circ$. *Отже, існує взаємно однозначна відповідність між нерозкладними зображеннями* $\mathbf{S}$ *і* $\mathbf{S}^\circ$. *Зокрема,* $\mathbf{S}$ *має скінченне зображення тоді й лише тоді, коли його має* $\mathbf{S}^\circ$.

Введемо кілька корисних позначень.

Означення 25. Нехай $M = (M, f)$ - зображення ЗВМ $\mathbf{S}$, $p \in \mathbf{S}$. Покладемо:

$$M^+(p) = \bigoplus_{p \leqslant i,\, i \in \mathbf{S}^+} V(pi)M(i),$$

$$M^-(p) = \bigoplus_{i \leqslant p,\, i \in \mathbf{S}^-} V(pi)M(i),$$

$f^+(p) : V(p0)M(0) \to M^+(p)$ відображення з компонентами

$$f^+(pi) : V(p0)M(0) \xrightarrow{1 \otimes f(i)} V(p0)V(0i)M(i) \xrightarrow{\mu(p0i) \otimes 1} V(pi)M(i),$$

$f^-(p) : M^-(p) \to V(p0)M(0)$ відображення з компонентами

$$f^-(pi) : V(pi)M(i) \xrightarrow{1 \otimes f(i)} V(pi)V(i0)M(0) \xrightarrow{\mu(pi0) \otimes 1} V(p0)M(0).$$

Ми визначаємо $M^{\pm}(0)$ і $f^{\pm}(0)$ через аналогічні формули, опускаючи лише умови "$p \leqslant i$" і "$i \leqslant p$" під знаком суми.

Тепер ми можемо побудувати функтори віддзеркалень $\Sigma_p : \operatorname{rep} \mathbf{S} \to \operatorname{rep} \mathbf{S}_p$.

Означення 26. Нехай $M = (M, f)$ - зображення ЗВМ $\mathbf{S}$, $p \in \widehat{\mathbf{S}}$ - початок або кінець. Ми визначаємо зображення $\Sigma_p M = (M', f')$ ЗВМ $\mathbf{S}_p$ в наступний спосіб (в усіх випадках $M'(i) = M(i)$ для всіх $i \neq p$):

(1) Якщо $p \in \mathbf{S}^-$ початок, ми покладаємо $f'(i) = f(i)$ для $i \neq p$, $M'(p) = \operatorname{Ker} f^+(p) / \operatorname{Im} f^-(p)$, оберемо $\rho_M : V(p0)M(0) \to \operatorname{Ker} f^+(p)$ і покладемо $f'(p) = \widetilde{\pi_M \rho_M}$, де π_M - природня сюр'єкція $\operatorname{Ker} f^+(p) \to M'(p)$.

(2) Якщо $p = 0$ початок, ми покладаємо $M'(0) = \operatorname{Cok} f^+$ і $f'(i) = \widetilde{\pi_M(i)}$, де $\pi_M(i)$ i-тий компонент природньої сюр'єкції $\pi_M : M^+(p) \to M'(0)$.

(3) Якщо $p \in \mathbf{S}^+$ кінець, ми покладаємо $f'(i) = f(i)$ якщо $i \neq p$, $M'(p) = \operatorname{Ker} f^+(p)/\operatorname{Im} f^-(p)$, обераємо частину $\sigma_M : \operatorname{Cok} f_p^- \to V(p0)M(0)$ і покладаємо $f'(p) = \sigma_M \varepsilon_M$, де ε_M природня ін'єкція $M'(p) \to \operatorname{Cok} f^-(p)$.

(4) Якщо 0 кінець, ми покладаємо $M'(0) = \operatorname{Ker} f^-(0)$ і $f'(i) = \widetilde{\varepsilon_M(i)}$, де $\varepsilon_M(i)$ i-тий компонент вкладення $\varepsilon_M : M'(0) \to M^-(0)$.

Очевидно, що M' справді є зображенням $\mathbf{S}_p$. У випадках 1 і 3 ці означення залежать від вибору ρ_M і σ_M. Незважаючи на це, Наслідок 28 покаже, що альтернативний вибір η_M і σ_M дасть ізоморфні зображення $\mathbf{S}_p$.

Ми також визначимо *зеркальні морфізми*.

Означення 27. Залишимо позначення Означення 26. Нехай $\phi : M \to N$ морфізм зображень, $N = (N, g)$. Ми визначаємо морфізм $\Sigma_p \phi = \phi' : \Sigma_p M \to \Sigma_p(N)$ в наступний спосіб (знов-таки ми покладаємо $\phi'(i) = \phi(i)$ і $\phi'(ij) = \phi(ij)$ якщо $i \neq p$, $j \neq p$):

(1) Нехай $p \in \mathbf{S}^-$ початок. Тоді $f^+(p)$ індукує ін'єкцію $\operatorname{Im}(1-\theta\rho_M) \to M^+(p)$, де θ вкладення $\operatorname{Ker} f^+(p) \to V(p0)M(0)$, отже ми можемо обрати гомоморфізм

$\xi : M^+(p) \to V(p0)M(0)$ такий що $\xi f^+(p) = \theta\rho_M - 1$. Ми покладаємо

- $\phi'(p)(x + \operatorname{Im} f^-(p)) = (1 \otimes \phi(0))(x) + \operatorname{Im} g^-(p)$ для всіх $x \in \operatorname{Ker} f^+(p)$. Зазначимо, що з означення морфізмів випливає, що $1 \otimes \phi(0)$ відображає $\operatorname{Ker} f^+(p)$ в $\operatorname{Ker} g^+(p)$ і $\operatorname{Im} f^-(p)$ в $\operatorname{Im} g^-(p)$.
- $\phi'(pi) = \widetilde{\psi(i)}$, де $i > p$, $\psi(i) = \pi_N \rho_N (1 \otimes \phi(0))\xi(i)$ і $\xi(i)$ - i-тий компонент ξ.

(2) Нехай $p = 0$ початок. Тоді оберемо частину $\eta : M'(0) \to M^+(0)$ і покладемо

- $\phi'(0) = \pi_N \phi^+ \eta$, де $\phi^+ : M^+(0) \to N^+(0)$ має (ij)-тий компонент $1 \otimes \phi(i)$ якщо $i = j$, $(\mu(pji) \otimes 1)(1 \otimes \phi(ij))$ якщо $i < j$, і 0 якщо $j < i$.

(3) Нехай $p \in \mathbf{S}^+$ кінець. Тоді $g^-(p)$ індукує сюр'єкцію $N^-(p) \to \operatorname{Im}(1 - \sigma_N \tau)$, де τ природна сюр'єкція $V(p0)N(0) \to \operatorname{Cok} g^-(p)$, отже ми можемо обрати $\eta : V(p0)N(0) \to N^-(p)$ такий що $g^-(p)\eta = \sigma_N \tau - 1$. Покладемо

- $\phi'(p)(x + \operatorname{Im} f^-(p)) = (1 \otimes \phi(0))(x) + \operatorname{Im} g^-(p)$ для всіх $x \in \operatorname{Ker} f^+(p)$.
- $\phi'(ip) = \eta(i)(1 \otimes \phi(0)) f'(p)$, де $i < p$ і $\eta(i)$ i-тий компонент η. (Пригадаймо, що $f'(p) = \sigma_M \varepsilon_M$.)

(4) Нехай $p = 0$ кінець. Тоді ми обираємо скорочення $\xi : N^-(0) \to N'(0)$ і покладаємо

- $\phi'(0) = \xi\phi^{-}\varepsilon_M$, де $\phi^{-} : M^{-}(0) \to N^{-}(0)$ має (ij)-тий компонент $1\otimes\phi(i)$ якщо $i = j$, $(\mu(pji)\otimes 1)(1 \otimes \phi(ij))$ якщо $i < j$, і 0 якщо $j < i$.

Знов-таки ця конструкція залежить від вибору ξ або η. Але ми покажемо, що після деяких неістотних факторизацій ця залежність зникає.

ОЗНАЧЕННЯ 28. Позначимо через T^p *тривіальне зображення* в точці p, тобто таке, що $T^p(p) = \Bbbk$, $T^p(i) = 0$ для $i \neq p$, через I_p ідеал $\operatorname{rep}\mathbf{S}$ породжений тотожнім морфізмом T^p і через $\operatorname{rep}^{(p)}\mathbf{S}$ фактор-категорію $\operatorname{rep}\mathbf{S}/I_p$. Ми називаємо зображення M *T^p-вільним* якщо воно не має прямих доданків ізоморфних T^p.

З побудови $\Sigma_p M$ випливає, шо це зображення завжди є T^p-вільним. Наступний результат також очевидний.

ТВЕРДЖЕННЯ 29. (1) *Якщо $p \in \mathbf{S}^{-}$, M T^p-вільний тоді й лише тоді, коли*

$$f(p)^{-1}\Big(\sum_{i<p}\operatorname{Im} f^{-}(p)(i)\Big) = 0.$$

(2) *Якщо $p \in \mathbf{S}^{+}$, M T^p-вільний тоді й лише тоді, коли*

$$\widetilde{f(p)}\Big(\bigcap_{i>p}\operatorname{Ker} f^{+}(p)(i)\Big) = M(p).$$

(3) *M є T^ω-вільним тоді й лише тоді, коли* $\operatorname{Ker} f^+(\omega) \subseteq \operatorname{Im} f^-(\omega)$.

Твердження 30. *Ми залишаємо позначення Означеннь 26 і 27.*

(1) *$\Sigma_p\phi$ справді є морфізмом $\Sigma_pM \to \Sigma_pN$.*

(2) *Оберемо інший гомоморфізм ξ' або η' замість ξ або η, який задовольняв би тим самим умовам. Позначимо одержаний морфізм $\Sigma_pM \to \Sigma_pN$ через ϕ''. Тоді $\phi' - \phi'' \in I_p$.*

Доведення. Перевіримо випадок (3); випадок (1) дуже схожий, а випадки(2) і (4) навіть легші. Щоб довести, що ϕ' є морфізмом, нам достатньо перевірити, що

$$g'(p)\phi'(p) = (1\otimes\phi'(0))f'(p)+\sum_{i<p}(\mu(pi0)\otimes1)(1\otimes g(i))\phi'(ip).$$

Перш за все зазначимо, що $\phi'(p)$ співпадає з $\rho'\tau(1\otimes\phi(0))\sigma_M\varepsilon_M$, де $\rho' : \operatorname{Cok} g^-(p) \to N'(p)$ довільне скорочення. Отже

$$g'(p)\phi'(p) = \sigma_N\varepsilon_N\rho'\tau(1\otimes\phi(0))\sigma_M\varepsilon_M = \sigma_N\tau(1\otimes\phi(0))f'(p).$$

З іншого боку, $(\mu(pi0)\otimes1)(1\otimes g(i))$ є i-тим компонентом $g^-(p)(i)$ $g^-(p)$. Отже

$$(\mu(pi0)\otimes1)(1\otimes g(i))\phi'(ip) = g^-(p)(i)\eta(i)(1\otimes\phi(0))f'(p) =$$
$$= (\sigma_N(i)\tau(i) - 1)(1\otimes\phi(0))f'(p).$$

Також звідси випливає, що

$$(1\otimes\phi'(0))f'(p)+\sum_{i<p}(\mu(pi0)\otimes 1)(1\otimes g(i))\phi'(ip) = \sigma_N\tau(1\otimes\phi(0))f'(p).$$

Якщо ми оберемо інший η' такий, що $g^-(p)\eta' = \sigma_N\tau - 1$ тоді $\delta = \phi' - \phi''$ має всі нульові компоненти окрім можливо $\delta(ip) = \gamma(i)(1\otimes\phi(0))f'(p)$, де $\gamma = \eta - \eta'$ і $g^-(p)\gamma = 0$. Отже, $\delta = \delta'\delta''$, де $\delta'' : M' \to rT^p$ ($r = \dim_{\mathbb{K}(p)} M'(p)$) має всі нульові компоненти окрім $\delta''(p) = 1$, при тому, що $\delta' : rT^p \to N'$ має всі нульові компоненти окрім $\delta'(ip) = \delta(ip)$. Всі відношення, які ми маємо перевірити для того, щоб показати, що δ' і δ'' справді є морфізмами, тривіальні, окрім одного - для δ' в точці p. Але останнє співпадає з відповідним відношенням для δ. $\square$

Наслідок 31. *Конструкція з 25 та 26 власне визначає функтор $\Sigma_p : \operatorname{rep}^{(p)}\mathbf{S} \to \operatorname{rep}^{(p)}\mathbf{S}_p$. Зокрема, клас ізоморфізмів $\Sigma_p M$ не залежить від вибору ρ_M у випадку 1 або σ_M у випадку 3.*

Твердження 32. *Якщо p є початком або кінцем, то $\Sigma_{pp} \simeq \mathsf{Id}$, тотожній функтор категорії $\operatorname{rep}^{(p)}\mathbf{S}$. Отже $\Sigma_p : \operatorname{rep}^{(p)}\mathbf{S} \to \operatorname{rep}^{(p)}\mathbf{S}_p$ — еквівалентність категорій.*

Доведення. Знов-таки ми розглянемо лише випадок 1, коли $p \in \mathbf{S}^-$ є початком. Нехай $M = (M, f)$ - T^p-вільне зображення $\operatorname{rep}(\mathbf{S})$, $M' = (M', f') = F_p M$ і $M'' = (M'', f'') = F_p M'$. Всі компоненти M' і M'' співпадають з компонентами M окрім $M'(p) = \operatorname{Ker} f^{+}(p)/\operatorname{Im} f^{-}(p)$, $f'(p) = \widetilde{\pi_M\rho_M}$ і $M''(p) = \operatorname{Ker} f'^{+}(p)/\operatorname{Im} f'^{-}(p)$, $f''(p) = \sigma_{M'}\varepsilon_{M'}$. За означенням, $M'^{+}(p) = M^{+}(p) \oplus M'(p)$ і $f'^{+}(p)(p) = \pi_M\rho_M$, отже $\operatorname{Ker} f'^{+}(p) = \operatorname{Ker} f^{+}(p) \cap \operatorname{Ker} \pi_M\rho_M = \operatorname{Im} f^{-}(p)$. Таким чином $M''(p) = \operatorname{Im} f^{-}(p)/\sum_{i<p}\operatorname{Im} f^{-}(p)(i)$. За 24 (1), $f(p)$ ін'єктивне і $\operatorname{Im} f^{-}(p) = \operatorname{Im} f(p) \oplus \sum_{i<p}\operatorname{Im} f^{-}(p)(i)$. Отже природне відображення $\iota : M(p) \to M''(p)$ є бієктивним. Більш того, ми можемо обрати частину $\sigma_{M'}$ в такий спосіб, що $\varepsilon_{M'}\sigma_{M'}$ співпадатиме з цією бієкцією. Тоді ми одержимо ізоморфізм $\phi : M \to M''$, що переводить $\phi(p) = \iota$, $\phi(i) = 1$ для $i \neq p$ і $\phi(ij) = 0$ для всіх можливих i, j. Очевидно, що ця конструкція є функтором по модулю ідеала I_p, отже ми одержали ізоморфізм функторів $\mathsf{Id} \simeq F_{pp}$. □

ОЗНАЧЕННЯ 33. (1) Нехай $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ - послідовність елементів з $\widehat{\mathbf{S}}$. Ми називаємо її *допустимою* і визначаємо $\mathbf{S}_{\mathbf{p}}$ через наступні рекурсивні правила:

- Якщо $m = 1$, $\mathbf{p}$ допустима тоді й лише тоді, коли p_1 - початок або кінець; тоді $\mathbf{S}_{\mathbf{p}} = \mathbf{S}_{p_1}$.
- Якщо $m > 1$, $\mathbf{p}$ допустима тоді й лише тоді, коли p_1 - початок або кінець в $\mathbf{S}_{\mathbf{q}}$, де $\mathbf{q} = (p_2, p_3, \ldots, p_m)$; тоді $\mathbf{S}_p = (\mathbf{S}_{\mathbf{q}})_{p_1}$.

(2) Якщо p_m початок (кінець) і, для кожного $k < m$, p_k початок (або, відповідно, кінець) в $\mathbf{S}_{(p_{k+1}, p_{k+2}, \ldots, p_m)}$,

ми називаємо послідовність $\mathbf{p}$ *послідовністю початків* (відповідно, *послідовністю кінців*).

(3) Ми покладаємо $\mathbf{p}^* = (p_m, p_{m-1}, \dots, p_1)$.

(4) Якщо $\mathbf{p}$ допустима, ми позначаємо через $\Sigma_{\mathbf{p}}$ композицію $\Sigma_{p_1}\Sigma_{p_2}\dots\Sigma_{p_m}$ і через $I_{\mathbf{p}}$ ідеал в $\operatorname{rep}\mathbf{S}$ породжений тотожніми морфізмами зображень $T^{(p_1,p_2,\dots,p_k)} = \Sigma_{(p_1,p_2,\dots,p_{k-1})}T^{p_k}$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$. Ми покладаємо $\operatorname{rep}^{(\mathbf{p})}\mathbf{S} = \operatorname{rep}\mathbf{S}/I_{\mathbf{p}}$.

Наслідок 34. *Якщо послідовність $\mathbf{p}$ допустима, то функтор $\Sigma_{\mathbf{p}}$ встановлює еквівалентність $\operatorname{rep}^{(\mathbf{p})}\mathbf{S} \to \operatorname{rep}^{(\mathbf{p}^*)}\mathbf{S}_{\mathbf{p}}$, при оберненій еквівалентності $\Sigma_{\mathbf{p}^*}$. Зокрема, існує взаємно однозначна відповідність між нерозкладними зображеннями $\mathbf{S}$ і $\mathbf{S}_{\mathbf{p}}$; таким чином $\mathbf{S}$ має скінченний тип тоді й лише тоді, коли $\mathbf{S}_{\mathbf{p}}$ має скінченний тип.*

3. Доведення основної теореми

Доведення необхідності в теоремі 21 є простим. А саме: через наслідок 34, ми тільки маємо встановити її для *тривіального* перерізу, коли $\mathbf{S} = \mathbf{S}^-$ (або $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+$). Тоді $\operatorname{rep}(\mathbf{S})$ може розглядатись як *бімодульна категорія* у розумінні розділу 2. А саме, нехай $\mathcal{S}$ — категорія з множиною об'єктів $\mathbf{S}$ і $\mathcal{S}(i,j) = V(ji)$, $\mathcal{K}$ — категорія з одним об'єктом ω і $\mathcal{K}(\omega,\omega) = \mathbb{K}(\omega)$, $\mathcal{V}$ - $\mathcal{K}$-$\mathcal{S}$-бімодуль, такий що $\mathcal{V}(\omega, i) = V(i\omega)$. Множення в $\mathcal{S}$ і дія $\mathcal{S}$ на $\mathcal{V}$ індукуються відображеннями $\mu(ijk) : V(ij)V(jk) \to V(ik)$ $(i, j, k \in$

$\widehat{\mathbf{S}}$). Тоді легко бачити, що $\mathrm{rep}(\mathbf{S})$ еквівалентне бімодульній категорії $\mathbf{El}(\mathcal{V})$ (катогрії елементів з $\mathcal{V}$). Більш того, форма $\mathrm{Q}_{\mathbf{S}}$ співпадає з формою Тітса бімодуля $\mathcal{V}$. Отже в цьому випадку необхідність в теоремі 21 випливає з того факту, що якщо бімодуль має скінченне зображення, його форма Тітса слабко додатня.

Отже *надалі ми вважатимемо, що форма Тітса* $\mathrm{Q}_{\mathbf{S}}$ *є слабко додатньою.* Для заданої векторної розмірності $\mathbf{d} \in \mathrm{D}(\mathbf{S})$ і кожного елемента $i \in \widehat{\mathbf{S}}$, ми фіксуємо векторний простір $U(i)$ над $\mathbb{K}(i)$ розмірності $\mathbf{d}(i)$ (наприклад $\mathbb{K}(i)^{\mathbf{d}(i)}$) і позначаємо через $\mathrm{rep}(\mathbf{d}, \mathbf{S})$ множину всіх зображень M $\mathbf{S}$ таких, що $M(i) = U(i)$. Можна її розглядати як множину $\Bbbk$-нормованих точок афінного алгебріїчного многовиду $\mathrm{rep}(\mathbf{d}, \mathbf{S})$, тобто підмноговид афінного простору

$$\mathbf{A}(\mathbf{d}) = \prod_{i \in \mathbf{S}^-} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(i)}(U(i), V(i\omega)U(\omega)) \times \\ \times \prod_{i \in \mathbf{S}^+} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\omega)}(U(\omega), V(\omega i)U(i))$$

визначений співвідношеннями з означення зображень ЗВМ (означення 17). Зазначимо, що кожне відношення $(1 \otimes f(j))f(i) = 0$ власне є множиною відношення $\mathrm{B}_\alpha(f(j), f(i)) = 0$ для координат цього добутку, де B_α - білінійні форми. Отже, якщо $\Bbbk$ нескінченне, множина $\Bbbk$-нормованих точок

$\mathrm{rep}(\mathbf{d}, \mathbf{S})$ щільна в многовиді $\mathrm{rep}(\mathbf{d}, \mathbf{S})$. Її розмірність щонайменш

$$\mathrm{Q}^{-}_{\mathbf{S}}(\mathbf{d}) = \sum_{i \in \mathbf{S}} v_{i\omega}\mathbf{d}(i)\mathbf{d}(\omega) \; - \sum_{\substack{i<j \\ i \in \mathbf{S}^{-}, j \in \mathbf{S}^{+}}} v_{ij}\mathbf{d}(i)\mathbf{d}(j)$$

(розмірність $\mathbf{A}(\mathbf{d})$ мінус кількість відношень).

Ми також розглядаємо алгебраїчну групу $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{d}, \mathbf{S})$, яка діє на $\mathrm{rep}(\mathbf{d}, \mathbf{S})$. Множина $\mathrm{G}(\mathbf{d}, \mathbf{S})$ $\Bbbk$-раціональних точок $\mathbf{G}$ складається з сімейств

$$\phi = \left\{ \phi(i), \phi(jk) \mid i \in \widehat{\mathbf{S}},\, j, k \in \mathbf{S}^{-} \text{ or } j, k \in \mathbf{S}^{+}, \text{ і } j < k \right\},$$

де $\phi(i)$ автоморфізм $U(i)$ і $\phi_{jk} : U(j) \to V(jk)U(k)$. Добуток визначається як добуток морфізмів зображень ЗВМ. Розмірність цієї групи дорівнює

$$\mathrm{Q}^{+}_{\mathbf{S}}(\mathbf{d}) = \sum_{i \in \widehat{\mathbf{S}}} v(i)\mathbf{d}(i)^2 \; + \sum_{\substack{i<j \\ i,j \in \mathbf{S}^{-} \text{or } i,j \in \mathbf{S}^{+}}} v_{ij}\mathbf{d}(i)\mathbf{d}(j).$$

При заданому зображенні $M \in \mathrm{rep}(\mathbf{d}, \mathbf{S})$ і елементі $\phi \in \mathbf{G}$, одразу видно, що існує єдине зображення ϕM таке що ϕ морфізм (а отже ізоморфізм) $M \to \phi M$. Власне, гомоморфізми, які визначають ϕM можна підрахувати рекурсивно згідно з означенням 18. Це визначає регулярну дію $\mathbf{G}(\mathbf{d}, \mathbf{G})$ на $\mathrm{rep}(\mathbf{d}, \mathbf{S})$ і орбіти цієї дії, що містять $\Bbbk$-нормовані точки або, що те саме, орбіти $\mathrm{G}(\mathbf{d}, \mathbf{S})$

на $\operatorname{rep}(\mathbf{d},\mathbf{S})$ є просто класами ізоморфізму зображень розмірностей $\mathbf{d}$. Ми позначаємо через $\operatorname{ind}(\mathbf{d},\mathbf{S})$ множину нерозкладних зображень з $\operatorname{rep}(\mathbf{d},\mathbf{S})$. Це множина $\Bbbk$-нормованих точок конструйовної підмножини $\operatorname{ind}(\mathbf{d},\mathbf{S})$ многовиду $\operatorname{rep}(\mathbf{d},\mathbf{S})$.

Спочатку розглянемо випадок коли *поле* $\Bbbk$ *нескінченне*. Тоді ми уточнимо Головну теорему наступним чином.

ТЕОРЕМА 35. *Нехай полу* $\Bbbk$ *нескінченне і форма Тітса* $\mathrm{Q}_{\mathbf{S}}$ *слабко додатня. Тоді*

(1) $\mathbf{S}$ *має скінченне зображення.*

(2) *Розмірності нерозкладних зображень* $\mathbf{S}$ *співпадають з додатніми коренями форми* $\mathrm{Q}_{\mathbf{S}}$.

(3) *Якщо* $\mathbf{d} = w\mathbf{e}_i (w \in W(\mathbf{S}))$, *існує єдине (з точністю до ізоморфізму) нерозкладне зображення* M *розмірності* $\mathbf{d}$ *і* $\operatorname{Hom}_{\mathbf{S}}(M,M) \simeq \mathbb{K}(i)$.

(4) *Орбіта нерозкладного зображення з* $\operatorname{rep}(\mathbf{d},\mathbf{S})$ *відкрита та щільна в компоненті цього многовиду.*

(5) *Для кожного справжнього нерозкладного зображення* M $\mathbf{S}$ *існує послідовність початків (та послідовність кінців)* $\mathbf{p}$ *в* $\mathbf{S}$ *така що* $M \simeq F_{\mathbf{p}^*}L$ *для несправжнього нерозкладного зображення* $L \in \operatorname{rep}(\mathbf{S}_{\mathbf{p}})$.

(6) *Нехай* M *нерозкладне зображення* $\mathbf{S}$, $\mathbf{d} = \operatorname{Dim} M \neq \mathbf{e}_p$, $\mathbf{d}' = w_p\mathbf{d}$, *де* p *початок або кінець в* $\mathbf{S}$. *Тоді*

(a) *якщо* $\mathbf{d}(p) > 0$ *or* $\mathbf{d}'(p) \geqslant 0$, *відображення* $f^+(p)$ *сюр'єктивне, а відображення* $f^-(p)$ *ін'єктивне.*

(b) *якщо* $\mathbf{d}(p) = 0$ *і* $\mathbf{d}'(p) \leqslant 0$, $\operatorname{Ker} f^+(p) = \operatorname{Im} f^-(p)$.

Доведення розбивається в декілька кроків, деякі з яких самі по собі є доволі цікавими. Ми використовуємо індукцію по кількості елементів в $\mathbf{S}$; очевидно, теорема справджується, якщо $\mathbf{S}$ має лише один елемент. Отже надалі ми *вважаємо, що форма Тітса* $\mathrm{Q}_\mathbf{S}$ *слабко додатня і теорема 35 справджується для всіх точних підмножин* $\mathbf{S}' \subset \mathbf{S}$.

Лема 36. *Твердження 6 теореми 35 справджується.*

Доведення. Якщо $\mathbf{d}(p) = 0$, M можна розглядати як зображення точної підмножини $\mathbf{S}' = \mathbf{S} \setminus \{p\}$, отже теорема 35 справджується на ній.

Нехай $\mathbf{d}(p) \neq 0$. Позначимо через $\overline{M}$ обмеження M на $\mathbf{S}'$. Нехай $N = (N, g)$ нерозкладна пряма сума $\overline{M}$, $\varepsilon : N \to \overline{M}$ вкладення і $\pi : \overline{M} \to N$ обмеження, тобто $\pi\varepsilon = 1_N$. Припустімо для початку, що $\operatorname{Im} g^-(p) = \operatorname{Ker} f^+(p)$ і p початок (випадок кінця є аналогічним і може бути отриманий через дуалізм). Тоді $\operatorname{Im} f(p) \subseteq \operatorname{Ker} f^+(p)$, отже $\operatorname{Im} \pi(\omega) f(p) \subseteq \operatorname{Ker} f^+(p) = \operatorname{Im} f^-(p)$. Таким чином існує гомоморфізм $\psi : M(p) \to N^-(p)$ такий що $g^-(p)\psi = \pi(\omega) f(p)$. Позначимо через $\widetilde{\pi}(ip) : M(p) \to V(pi)N(i)$

i-тий компонент ψ. Поклавши $\widetilde{\pi}(p) = 1$, $\widetilde{\pi}(i) = \pi(i)$ і $\widetilde{\pi}(ji) = \pi(ji)$ для $i \in \widehat{\mathbf{S}} \setminus \{p\}$, ми одержуємо скорочення $\widetilde{\pi} : M \to N$, що є неможливим, оскільки M є нерозкладним. $\square$

Наслідок 37. *Якщо $M \not\simeq T^p$ - нерозкладне зображення $\mathbf{S}$ таке що $M(p) \neq 0$, де p початок (кінець), тоді $\mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(T^p, M) = 0$ (відповідно $\mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(M, T^p) = 0$), і $\mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(M, N) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}_p}(F_pM, F_pN)$ для будь-якого іншого зображення N з тими самими властивостями.*

Наслідок 38. *Нехай $p \in \widehat{\mathbf{S}}$ - початок або кінець, $M \in \mathrm{ind}(\mathbf{d}, \mathbf{S})$, де $\mathbf{d}(p) > 0$ і $\mathbf{d} \neq \mathbf{e}_p$. Тоді $\mathrm{Dim}\, F_pM = w_p \,\mathrm{Dim}\, M$. Зокрема, $w_p \,\mathrm{Dim}\, M > 0$.*

Доведення. Доведення випливає з Леми 36. $\square$

Тепер ми можемо завершити доведення Теореми 35. Очевидно, існує послідовність початків (або кінців) $\mathbf{s} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, яка містить всі елементи $\widehat{\mathbf{S}}$ (де $n = |\mathbf{S}|+1$). Покладемо $w_i = w_{p_i}$ і $C = w_1 w_2 \dots w_n$ (*перетворення Коксетера* для форми Тітса $\mathrm{Q}_{\mathbf{S}}$). Довільний фіксований вектор з C також є фіксованим вектором для кожного віддзеркалення w_i. Оскільки $\mathrm{Q}_{\mathbf{S}}$ слабко додатня, $C\mathbf{x} \neq \mathbf{x}$ для кожного $\mathbf{x} > 0$, для кожної $\mathbf{d} \in \mathrm{D}(\mathbf{S})$ множина $W\mathbf{d} \cap \mathrm{D}(\mathbf{S})$ є скінченою [**28**]. Отже існує таке m, що $C^m\mathbf{d} \not> 0$. Якщо $\mathbf{d} = \mathrm{Dim}\, M$, де M нерозкладне зображення, з Наслідку 38 випливає, що існує послідовність $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_r)$, де ми покладаємо $w_{n+i} = w_i$ для кожного i, така, що $\operatorname{Dim} F_{p_j p_{j+1} \ldots p_n} M = w_j \ldots w_j \ldots w_2 w_1 \mathbf{d}$ для кожного $j \leqslant r$ і зображення $L = F_{\mathbf{p}} M$ є нерозкладним і несправжнім. Власне, $L(p_r) = 0$ і $L(i) \neq 0$ для $i \neq p_r$, отже L - зображення $\mathbf{S}' = \mathbf{S}_{\mathbf{p}} \setminus \{p_r\}$. Покладімо $\mathbf{d}' = \operatorname{Dim} L$ і $\mathrm{Q}' = \mathrm{Q}_{\mathbf{S}'}$. Зазначимо, що послідовність $\mathbf{p}$, а отже і розмірність $\mathbf{d}'$, залежить лише від розмірності $\mathbf{d}$, а не від вибору M. З індуктивного припущення випливає, що

- $\mathbf{d}'$ корінь Q', а отже і корінь $\mathrm{Q}_{\mathbf{S}}$. Отже $\mathbf{d}$ є також коренем $\mathrm{Q}_{\mathbf{S}}$, оскільки $W(\mathbf{S}') \subseteq W(\mathbf{S})$.
- L - єдине нерозкладне зображення розмірності $\mathbf{d}'$, а отже $M \simeq F_{\mathbf{p}^*} L$ - єдине нерозкладне зображення розмірності $\mathbf{d}$.
- Якщо $\mathbf{d}' = w\mathbf{e}_i$, тоді $\operatorname{Hom}_{\mathbf{S}'}(L, L) \simeq \mathbb{K}(i)$, а отже $\operatorname{Hom}_{\mathbf{S}'}(M, M) \simeq \mathbb{K}(i)$ за Наслідком 37.

Так само якщо $\mathbf{d}$ - будь-який додатній корінь $\mathrm{Q}_{\mathbf{S}}$, ми знаходимо послідовність початків (або кінців) $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_r)$ таку, що всі вектори $\mathbf{d}_j = w_1 w_2 \ldots w_j \mathbf{d}$ $(j \leqslant r)$ додатні, а $\mathbf{d}_r$ несправжнє. Тоді існує нерозкладне зображення розмірності $\mathbf{d}_r$, а отже існує нерозкладне зображення розмірності $\mathbf{d}$ (єдине, як ми вже бачили вище). Отже ми довели твердження (2),(3) і (6) Теореми 35. Оскільки множина додатніх коренів є скінченою, звідси також випливає твердження (1). Отже, для кожної розмірності $\mathbf{d}$ є лише скінченна кількість орбіт $\mathbf{G} M_k$, де $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{d}, \mathbf{S})$ і

$M(k) \in \mathrm{rep}(\mathbf{d}, \mathbf{G})$. Оскільки $\Bbbk$-нормовані точкі є щільними, $\bigcup_k \overline{\mathrm{G} M_k} = \mathrm{rep}(\mathbf{d}, \mathbf{S})$. Зазначимо, що всі орбіти є незвідними, оскільки незвідною є група $\mathbf{G}$. Нехай $\mathbf{C}$ - компонент $\mathrm{rep}(\mathbf{d}, \mathbf{S})$. Тоді одна з орбіт $\mathbf{O}_k$ є щільною, а отже відкритою, в $\mathbf{C}$ і $\dim \mathbf{C} = \dim \mathbf{G} M_k = \dim \mathbf{G} - \dim \mathrm{St}(M_k)$, де $\mathrm{St}(M_k)$ стабілізатор M_k в $\mathbf{G}$. Зазначимо, що $\dim \mathrm{St}(M_k) = \dim \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(M_k, M_k)$.

Зауважимо ще, що, використовуючи результати [**12**], можна дати характеристику ЗВМ скінченного типу, аналогічну критерію Клейнера для зображень частково впорядкованих множин [**6**].

Розділ 4

ЗОБРАЖЕННЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ В'ЯЗОК ЛАНЦЮГІВ

1. Формулювання задачі

ОЗНАЧЕННЯ 39. **Узагальнена в'язка ланцюгів** складається з

(1) двох множин $\mathcal{E}$ та $\mathcal{F}$; ми позначаємо $\mathfrak{X} = \mathcal{E} \cup \mathcal{F}$;

(2) упорядкування $<$ на $\mathfrak{X}$;

(3) симетричних відношень $\sim$ та $-$ на $\mathfrak{X}$ (не еквівалентностей); ми продовжуємо відношення $-$ до еквівалентності θ на $\mathfrak{X}$ і позначаємо $\mathcal{E}_c = \mathcal{E} \cap c$ і $\mathcal{F}_c = \mathcal{F} \cap c$ для кожного класу еквівалентності $c \in \mathfrak{X}/\theta$;

(4) для кожного класу $c \in \mathfrak{X}/\theta$ двох заданих розширень E_c, F_c поля K розмірності щонайбільше 2. Якщо $F_c \neq K$ (відповідно, $E_c \neq K$), ми звемо елементи з $\mathcal{E}_c$ (відповідно, з $\mathcal{F}_c$) "*товстими*" (зверніть увагу на те, що при визначенні товстих елементів з $\mathcal{E}$ ми розглядаємо поля F_c і навпаки). Якщо $x \in \mathcal{E}_c$ ($x \in \mathcal{F}_c$), то ми позначатимемо також $K_x = E_c$ (відповідно, $K_x = F_c$).

Ці дані мають задовольняти наступним умовам:

(1) якщо $x - y$ і $x \in \mathcal{E}$, то $y \in \mathcal{F}$;

(2) якщо $x \sim y$, то $K_x = K_y$;

(3) для кожного класу c множини $\mathcal{E}_c$ і $\mathcal{F}_c$ є ланцюгами відносно впорядкування $<$;

(4) $\#\{y|y \sim x\} \leq 1$ для кожного $x \in \mathfrak{X}$;

(5) якщо елемент x товстий, то $x \sim x$.

(6) якщо $x, x', y, y' \in \mathfrak{X}$ — такі, що $x - y, x - y', x' - y$ і $x' < x, y < y'$, то також $x' - y'$.

Остання умова, як буде видно з наступних означень, "забороняє" такий випадок, коли додавання при перетворення матриць мають вигляд

$$\begin{array}{cc} & \longrightarrow \\ \uparrow & \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline * & * \end{array}\right) \end{array}$$

Зауваження 40. Для більшості застосувань достатньо "простого" випадку, а саме, коли $\mathcal{E}$ та $\mathcal{F}$ є об'єднанням ланцюгів, які не перетинаються:

$$\mathcal{E} = \bigsqcup_i \mathcal{E}_i, \quad \mathcal{F} = \bigsqcup_j \mathcal{F}_j$$

$\mathcal{E}_i, \mathcal{F}_j$ - ланцюги

причому

$$\text{якщо } x \in \mathcal{E}_i, y \in \mathcal{F}_j, \text{ то } x - y \Rightarrow i = j.$$

У цьому випадку умова (2) задавольняється автоматично.

Надалі ми часто будемо опускати слово "узагальнений" і казати просто "в'язка ланцюгів". Введемо ще такі означення

Означення 41. (1) Елемент x назвемо *подвійним*, якщо він не є товстим і $x \sim x$.

(2) Для кожного подвійного елемента x введемо новий елемент x^* і позначимо $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{X} \sqcap \{\, x^* \mid x \text{ подвійний} \,\}$.

(3) Ми продовжуємо відношення $<$ та $-$ (але не $\sim$) на множину $\mathfrak{X}^*$ так, що кожен елемент x^* наслідує всі відношення, в яких перебуває елемент x. (Наприклад, якщо $x < y$, то $x < y^*,\ x^* < y,\ x^* < y^*$ у кожному випадку, коли відповідні елементи визначені.)

(4) Покладемо $\mathcal{E}_c^* = \mathcal{E}_c \sqcap \{\, x^* \mid x \in \mathcal{E}_c,\ \text{подвійний} \,\}$ та $\mathcal{F}_c^* = \mathcal{F}_c \sqcap \{\, x^* \mid x \in \mathcal{F}_c,\ \text{подвійний} \,\}$; $\mathcal{E}^* = \cap_c \mathcal{E}^*$, $\mathcal{F}^* = \cap_c \mathcal{F}_c^*$.

Тепер ми вводимо поняття *зображення* узагальненої в'язки ланцюгів.

Означення 42. Зображення A в'язки ланцюгів визначається наступним чином:

(1) кожному $x \in \mathfrak{X}$ ставиться у відповіднсть натуральне число n_x причому якщо $x \sim y$, то $n_x = n_y$;

(2) кожній парі (x, y), де $x - y,\ x \in \mathcal{E}_c^*,\ y \in \mathcal{F}_c^*)$ ставиться у відповідність матриця A_{xy} розміру $n_x \times n_y$

з елементами з $E_c \otimes F_c$. (Якщо $n_x = 0$ або $n_y = 0$, ця матриця "порожня": не має жодного рядка або, відповідно, стовпчика.)

(3) Вектор $\operatorname{Dim} A = (n_x \,|\, x \in \mathfrak{X}^*)$ назвемо *розмірністю* зображення A.

Ми ще маємо визначими, які зображення ми вважатимемо "однаковими", точніше, *еквівалентними*.

Означення 43. (1) Для $x \in \mathcal{E}_c^*$ (відповідно, для $x \in \mathcal{F}_c^*$) позначимо через H_x простір $\operatorname{End}_{E_c}(E_c \otimes F_c)$ (відповідно, $\operatorname{End}_{F_c}(E_c \otimes F_c)$).

(2) Зображення A і B, які мають однакову розмірність, назвемо *еквівалентними*, якщо їх можна перетворити одне на одне послідовністю наступних *елементарнних перетворень*:

(a) Елементарними перетвореннями над E_c (відповідно, над F_c) одночасно в усій *x-смузі*, тобто в усіх матрицях A_{xy} з фіксованим $x \in \mathcal{E}_c^*$ (відповідно, в усіх матрицях A_{yx} з фіксованим $x \in \mathcal{F}_c^*$); при цьому, якщо $x \sim z$, перетворення в смугах x і z мають бути однаковими, якщо обидва ці елементи належать $\mathcal{E}^*$ або $\mathcal{F}^*$ і контрагредієнтними, якщо один з них належить $\mathcal{E}^*$, а інший $\mathcal{F}^*$.

(b) Додаванням якогось рядка (стовпчика) із x-смуги, домноженого на гомоморфізм з H_x до якогось рядка (стовпчика) із x'-смуги, якщо $x < x'$ і обидва ці елементи належать одній множині $\mathcal{E}_c^*$ (відповідно, $\mathcal{F}_c^*$).

Наприклад, якщо $x, x' \in \mathcal{E}_c$ і поле F_c має базу α, β над K, а $E_c = K$, то рядок a з x-смуги має вигляд $a_1\alpha + a_2\beta$, де a_1, a_2 — рядки з елементами з поля K. Так само рядок b із x'-смуги має вигляд $b_1\alpha + b_2\beta$, де b_1, b_2 — рядки з елементами з поля K. У цьому випадку можна додавати *окремо* рядок a_1 до b_1, і окремо a_2 до b_2.

Легко бачити, що коли всі поля E_c та F_c збігаються з основним полем K, це означення збігається з означенням в'язки лінцюгів та його зображень з підрозділу 1.4 (або роботи [**2**]).

2. Результат

У цьому розділі ми виведмо комбінаторну класифікацію нерозкладних зображень узагальнених в'язок ланцюгів, аналогічну тій, яка отримана в роботі [**2**]. Вона добре вкладається в комбінаторику так званих "струн та стрічок", яка досит часто зустрічається в різних задачах теорії зображень

2.1. Комбінаторика слів.

Означення 44. (1) **$\mathfrak{X}$-словом** (або просто **словом**) назвемо послідовність

$$w = a_0 r_1 a_1 r_2 a_2 \dots r_m a_m,$$

де всі $a_k \in \mathfrak{X}$, а кожен r_k є $\sim$ або $-$, причому для всіх можливих значень k виконуються властивості:

- $a_{k-1} r_k a_k$ в $\mathfrak{X}$.
- $r_k \neq r_{k+1}$.

(2) Ми позначаємо w^* *протилежне слово*, тобто $w^* = a_m r_m a_{m-1} \dots a_1 r_0 a_0$. Слово w зветься *симетричним*, якщо $w = w^*$.

(3) **Допустимими словами** звуться такі:

- **(i)** $x_1 \sim x_2 - x_3 \sim x_4 - x_5 \sim x_6 - ... - x_{n-1} \sim x_n$;
- **(ii)** $x - x_1 \sim x_2 - ... - x_{n-1} \sim x_n$ за умови, що $x \not\sim y$ для всіх $y \neq x$;
- **(iii)** $x - x_1 \sim x_2 - ... - x_{n-1} \sim x_n - z$ за умови, що $x \not\sim y$, коли $y \neq x$, і $z \not\sim y$, коли $y \neq z$.

(4) Кінець слова, який має вигляд $x - y$, де елемент x або y є подвійним, зветься **особливим**. (Якщо $w = x - y,\ x \sim x,\ y \sim y$, обидва кінці вважаються особливими.)

(5) Допустиме слово з одним особливим лівим кінцем зветься **особливим**. Допустиме слово з двома особливими кінцями зветься **біособливим**. Допустиме слово без особливих кінців зветься **звичайним**.

(6) Біособливе слово зветься *періодичним*, якщо воно має вигляд $v \sim v \sim \cdots \sim v$ або $v \sim v^* \sim v \sim v^* \sim \cdots \sim v \sim v^*$.

(7) Слово типу (i), таке що $x_n - x_1$ зветься **циклом**. Цикл зветься *періодичним*, якщо він має вигляд $w = v - v - v - \ldots - v$ для деякого коротшого слова v (воно автоматично є циклом).

(8) Якщо w — цикл, то через $w^{(k)}$ позначається його k-ий зсув, тобто цикл $a_{2k} \sim a_{2k+1} - \cdots \sim a_m - a_0 \sim \cdots \sim a_{2k-1}$. (Зауважимо, що довжина m цикла завжди непарна.) Цикл зветься *симетричним*, якщо $w^* = w^{(k)}$ для деякого k.

ОЗНАЧЕННЯ 45. Наступні слова звуться **"струнними даними"**:

- **(a)** несиметричне звичайне слово;
- **(b)** пара (w, δ), де w — особливе слово, а $\delta \in \{1, 2\}$ (зауважимо, що особливе слово не може бути симетричним);
- **(c)** четвірка $(w, \delta_1, \delta_2, n)$, де w — несиметричне і неперіодичне біособливе слово, $n \in \mathbb{N}$, а $\delta_1, \delta_2 \in \{1, 2\}$.

ОЗНАЧЕННЯ 46. Пара $(w, f(t))$, де w — неперіодичний цикл, а $f(t)$ — степінь деякого незвідного полінома, над полем K, відмінного від t, а якщо цикл w симетричний, відмінного також від $t-1$, зветься **"стрічковими даними"**.

2.2. Основна теорема. Ми встановимо наступний результат, аналогічний основному результату роботи [**2**].

ТЕОРЕМА 47. *Нерозкладні зображення знаходяться у взаємно однозначній відповідності зі струнними даними та стрічковими даними з точністю до "природної" еквівалентності, а саме, такі дані визначають одне й те саме зображення в наступних випадках і лише в них:*

- *звичайні слова* w *та* w^**;*
- *четвірки* $(w, \delta_1, \delta_2, n)$ *та* $(w^*, \delta_2, \delta_1, n)$*, де* w *— біособливе слово;*
- *пари* $(w, f(t))$ *та* $(w_1^{(k)}, f_1(t))$*, де* $w_1 = w$ *або* $w = w^*$*, а* $f_1(t) = f(t)$*, якщо* k *парне, і* $f_1(t) = t^d f(1/t)$*, якщо* k *непарне, де* $d = \deg f(t)$*.*

Доведення цього результату, як і в роботі [**2**] є рекурсивним. Спочатку ми розглядаємо найпростіші задачі ("атомні"), для яких відповідь відома. Надалі ми використовуємо деякий варіанть алгоритму зведення, після чого одержуємо знову задачу про зображення (нової) в'язки ланцюгів, але вже меншої розмірності. Після цього доведення одержується простю індукцією. Цей план буде реалізовано в наступних підрозділах.

3. Атомні задачі (один x та один y)

Задачу про в'язку ланцюгів будемо звати «атомною», якщо $\#(\mathcal{E}) = \#(\mathcal{F}) = 1$. У залежності від наявності чи відсутності відношень $\sim$ та розширень основного поля виникає кілька можливостей.

3.1. Список атомних задач.

(1) $x \not\sim x, y \not\sim y, x \not\sim y, E = F = K$.

Тоді ми маємо одну матрицю з елементами з K:

$$\begin{array}{cc} & y \\ x & \boxed{} \end{array}$$

Всі елементарні перетворення дозволяються.

(2) $x \not\sim x, y \not\sim y, x \sim y, E = F = K$.

Знову маємо тільки одну матрицю над K:

$$\begin{array}{cc} & y \\ x & \boxed{} \end{array},$$

На цей раз дозволяються лише *подібні перетворення*: $A \mapsto S^{-1}AS$.

(3) (a) $x \not\sim x, y \sim y, E = F = K$.

Тут ми маємо вже дві матриці з елементами з K:

$$\begin{array}{ccc} & y & y^* \\ x & \boxed{} & \boxed{} \end{array}$$

Елементарні перетворення рядків мають проводитись одночасно в обох матрицях.

(b) $x \sim x, y \not\sim y, E = F = K$.

Це — задача, “транспонована” до попередньої (знову маємо дві матриці, але на цей раз спільними є перетоворення стовпчиків).

(4) $x \sim x, y \sim y, E = F = K$.

Отримуємо чотири матриці з елементами з K :

$$\begin{array}{ccc} & y & y^* \\ x & \boxed{} & \boxed{} \\ x^* & \boxed{} & \boxed{} \end{array}.$$

Елементарні перетворення дозволяються лише всередині рядка або стовпчика.

(5) (a) $x \sim x$, $y \not\sim y$, $E = K$, $(F : K) = 2$ (отже, елемент x товстий).

Отримуємо матрицю з елементами з F :

$$\begin{array}{cc} & F \\ K & \boxed{\ \mathrm{F}\ } \end{array}.$$

Елементарні перетворення рядків дозволяються лише над K , стовпчиків - лише над F .

(b) $x \not\sim x$, $y \sim y$, $F = K$, $(E : K) = 2$ (елемент y товстий).

Це — задача “транспонована” до попередньої.

(6) (a) $x \sim x, y \sim y, E = K, (F : K) = 2$ (отже, елемент x товстий, а елемент y подвійний).

Тут ми отримуємо дві матриці з елементами з

$F:$

$$\begin{array}{ccc} & F & F \\ K & \boxed{\mathrm{F}} & \boxed{\mathrm{F}} \end{array}.$$

Елементарні перетворення рядків спільні і проводяться виключно над K, елементарні перетворення стовпчиків роздільні і проводяться над полем F.

(b) $x \sim x, y \sim y, (E:K) = 2, F = K$.

Це — задача “транспонована”до попередньої.

(7) $x \sim x, y \sim y, (E:K) = (F:K) = 2$.

Отримуємо матрицю з елементами з $E \otimes K$. Елементарні перетворення рядкі в(стовпчиків) дозволяються лише над E (відповідно, над F).

Випадки 1–4 — це, звичайно, атомні задачі з роботи [**2**]).

3.2. Квадратичні форми відповідні до атомних задач. Атомні задачі є, власне, частковим випадком зображень нормованих графів, розглянутих Длабом та Рінгелем (див. [**24**]), тож я використовую їх результати. Зокрема, я використовую квадратичні форми, відповідні до атомних задач. Саме, ними будемо називати наступні квадратичні форми (відповідно до розглянутих випадків атомних задач):

(1) $x^2 + y^2 - xy$

(2) $x^2 - x^2 = 0$

(3) (a) $x^2 + y^2 + y_1^2 - x(y + y_1)$

(тут y_1 відповідає новому елементу y^*)

(b) $x^2 + x_1^2 + y^2 - (x + x_1)y$

(4) $x^2 + x_1^2 + y^2 + y_1^2 - (x + x_1)(y + y_1)$

(5) (a) $x^2 + 2y^2 - 2xy$

(b) $2x^2 + y^2 - 2xy$

(6) (a) $x^2 + 2y^2 + 2y_1^2 - 2x(y + y_1)$

(b) $2x^2 + 2x_1^2 + y^2 - 2(x + x_1)y$

(7) $2x^2 + 2y^2 - 4xy$

Означення 48. Корені квадратичної форми $\mathrm{Q}(\overline{x})$ визначаються наступним чином:

- **"дійсні" корені** — це корені рівняння $\mathrm{Q}(\overline{x}) = 1$ або, у випадку з розширенням, $\mathrm{Q}(\overline{x}) = 2$.
- **"уявні" корені** — це корені рівняння $\mathrm{Q}(\overline{x}) = 0$.

3.3. Зображення атомних задач. Для зображень атомних задач я використаю результати Длаба та Рінгеля (див. [**24**]). З цих результатів випливає:

(1) нерозкладні зображення існують тільки в тих розмірностях, які є коренями відповідних квадратичних форм

(2) дійсний корень має тільки одне нерозкладне зображення і це є зображенням «загального положення»

(тобто на кожному кроці зведення частина матриці, яку ми спрощуємо, має максимальний ранг; точне означення: орбіта нерозкладного зображення є відкритою у просторі всіх зображень даної розмірності).

Наведемо списки нерозкладних зображень. Кожному з них ми ставимо у відповідність деякі струнні або стрічкові дані. Ми користуємося нумерацією атомних задач, введеною вище.

Список нерозкладних зображень:

(1) Корінь $(1, 1)$:

$$\boxed{1}\,, \quad w = e - f$$

(2) Уявний корінь (n) (дійсних коренів немає):

Φ_f (Матриця Фробеніуса, що відповідає $f(t)$),

їй відповідають стрічкові дані $(w = e - f, f(t))$, якщо $f(t) \neq t^d$ і струнрні дані $w = e \sim f - e \sim f - \cdots - e \sim f$, якщо $f(t) = t^d$. У останньому випадку ми одержимо клітину Жордана:

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

.

(3) • Корінь $(1,1,1)$:

$$\boxed{1} \quad \boxed{1}$$

$w = e - f \sim f$

• Корінь $(1,1,0)$:

$$\boxed{1} \quad \boxed{}$$

(друга матриця порожня): $(w,1)$, де $w = e - f$.

• Корінь $(1,0,1)$:

$$\boxed{} \quad \boxed{1}$$

(перша матриця порожня): $(w,2)$, де $w = e - f$.

(4) • Корінь $(n,n,n,n+1)$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccccc}
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\
\hline
1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0
\end{array}\right)$$

Цьому зображенню відповідає пара $(w,2)$, де $w = f - e \sim e - f \sim f - \dots - f \sim f$.

Парі $(w,1)$ відповідає зображення розмірності $(n,n,n+1,n)$, яке одержується з наведеного перестановкою вертикальних смуг.

- Корінь $(n,n,n,n-1)$

$$\left(\begin{array}{ccccc|cccc}
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\hline
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{array}\right)$$

Цьому зображенню відповідає пара $(w,2)$, де $w = f \sim e \sim e - f \sim f - \dots - e \sim e$. Парі $(w,1)$ відповідає зображення розмірності $(n,n,n-1,n)$, яке одержується з наведеного перестановкою вертикальних смуг.

- Зображення, які відповідають кореням $(n+1,n,n,n)$ та $(n-1,n,n,n)$ одержуються з попередніх транспонуванням. Відповідні дані одержуються заміною e на f і навпаки.

- Корінь $(n,n+1,n,n+1)$

$$
\left(\begin{array}{cccc|ccccc}
1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{array}\right)
$$

Цьому зображенню відповідає четвірка $(w, 2, 2, 2n+1)$, де $w = e - f$ (єдине неперіодичне і несиметричне біособливе слово). Зміна “додаткових даних” δ_1, δ_2 відповідає перестановці вертикальних і горизонтальних смуг. Це дає зображення, які відповідають кореням $(n+1, n, n, n+1)$, $(n, n+1, n+1, n)$ і $(n, n+1, n+1, n)$.

В наступних атомних задачах ми не будемо спеціально оговорювати подібні перестановки смуг, які відповідають подвійним точкам, оскільки їх легко відновити.

- Уявний корінь (n, n, n, n)

Йому відповідають зображення вигляду

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I} & \mathrm{I} \\ \hline \mathrm{I} & \Phi_f \end{array}\right]$$

де Φ_f — матриця Фробеніуса з характеристичним многочленом $f(t)$. Йому відповідають струнні дані $(w, f(t))$, де $w = e \sim e - f \sim f$ (єдиний неперіодичний цикл), якщо $f(t) \neq t^d$ і $f(t) \neq (t-1)^d$ (зауважимо, що цикл w симетричний: $w^* = w^{(1)}$). Якщо $f(t) = (t-1)^d$, цьому зображенню відповідає неособливе слово $e \sim e - f \sim f \sim \cdots - e \sim e - f \sim f$ (з точністю до перестановок вертикальних та горизонтальних смуг), а якщо $f(t) = t^d$, цьому зображенню відповідає четвірка $(w, 1, 1, 2n)$, де $w = e - f$. Зміні додаткових даних δ_1, δ_2 в цій четвірці знов-таки відповідає пререстановка вертикальних і горизонтальних смуг. В цьому разі результат залежить від того, на якому місці розташована вироджена матриця $J_0(n)$ (нільпотентна клітина Жордана).

$w = e \sim e - f \sim f - \cdots - f \sim f$

(5) • Корінь $(1,1)$:

(1) $w = e - f$

• Корінь $(1,2)$:

$(1\ \alpha)$ where $E =< 1, \alpha >$ $w = e - f \sim f$

(6) • Корінь $(2n + 1, n + 1, n)$

$$\left[\begin{array}{ccccc|cccc}
1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & \dots & \dots & \vdots & \alpha & 0 & \dots & \vdots \\
\vdots & \alpha & \dots & \dots & \vdots & \vdots & 1 & \dots & \vdots \\
\vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \alpha & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \alpha & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \alpha \\
0 & \dots & \dots & \dots & \alpha & 0 & \dots & \dots & 0
\end{array}\right]$$

$w = e - f \sim f - e \sim e - ... - f$

• Корінь $(2n + 1, n, n)$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\alpha & 0 & \dots & \vdots & 1 & 0 & \dots & \vdots \\
0 & 1 & \dots & \vdots & \alpha & 0 & \dots & \vdots \\
\vdots & \alpha & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \dots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \alpha & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \alpha & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\
0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \alpha
\end{array}\right]$$

$w = e \sim e - f \sim f - e \sim e - ... - e$

• Корінь $(2n - 1, n, n)$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots & \alpha & 0\dots & \vdots & \\ \vdots & \alpha & \vdots & \vdots & 0 & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \alpha & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \alpha & 0 & \dots & \dots & 1 \end{array}\right]$$

$$w = e - f \sim f - e \sim e - ... - f \sim f$$

- Корінь $(2n+2, n+1, n))$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha & 0 & \dots & \vdots & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \alpha & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \alpha & \vdots & 0 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \alpha \\ 0 & \dots & 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 \end{array}\right]$$

$$w = e \sim f - f \sim f - e \sim e - ... - f$$

- Корінь $(2n, n+1, n)$

$$\left[\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \vdots & \alpha & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \alpha & \dots & \dots & \vdots & 0 & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \alpha & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \alpha & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \alpha \end{array}\right]$$

$$w = f \sim f - e \sim e - f \sim f - ... - f$$

- Уявний корінь $(2n, n, n)$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} \Phi_\pi & 0 & \dots & 0 & \mathrm{I} & 0 & \dots & \alpha\mathrm{I} \\ 0 & \mathrm{I} & \dots & \vdots & \alpha\mathrm{I} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \alpha\mathrm{I} & \vdots & \vdots & 0 & \mathrm{I} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \alpha\mathrm{I} & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \mathrm{I} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \alpha\mathrm{I} & 0 & \dots & \dots & \mathrm{I} \end{array}\right] \qquad (\, n \text{ непарне})$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} \alpha\Phi_\pi & 0 & \dots & 0 & \mathrm{I} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & \vdots & \vdots & \alpha\mathrm{I} & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \alpha\mathrm{I} & \vdots & \vdots & 0 & \mathrm{I} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \alpha\mathrm{I} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \mathrm{I} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \alpha\mathrm{I} & \vdots & \vdots & \vdots & \mathrm{I} \\ \mathrm{I} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \alpha\mathrm{I} \end{array}\right] \qquad (n \text{ парне})$$

$$w = e - f \sim f - e\,,\ \pi(t)$$

(7) • Корінь $(n, n+1)$

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & \beta \end{bmatrix}$$

де $E =< 1, \alpha >\,,\ F =< 1, \beta >$

$$w = e - f \sim f - e \sim e - ... - f \sim f \ \ (n \text{ непарне})$$

$$w = f - e \sim e - f \sim f - ... - f \sim f \ \ (n \text{ парне})$$

• Корінь $(n+1, n)$

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ \beta & \alpha & \dots & \vdots \\ 0 & \beta & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \alpha \\ 0 & \dots & \dots & \beta \end{bmatrix}$$

$w = f - e \sim e - f \sim f - ... - e \sim e$ (n непарне)

$w = e - f \sim f - e \sim e - ... - e \sim e$ (n парне)

- Уявний корінь (n, n):

$$\begin{bmatrix} \alpha I & \beta I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha I & \beta I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta I \\ \beta \Phi_\pi & 0 & 0 & \dots & \alpha I \end{bmatrix}$$

$w = e \sim e - f \sim f$, $\pi(t)$.

4. Зведення матриць

Ця частина є, напевно, найважливійшою. В ній показано, що коли ми спрощуємо атомну частину в'язки ланцюгів $\mathcal{X} = \{\mathcal{E}, \mathcal{F}, <, -, \sim\}$ і обмежемо елементарні перетворення до таких, які не змінюют канонічної форми цієї частини, ми знову отримуємо представлення (нової) в'язки ланцюгів. Іншими словами, ми можемо сформулювати наступні правила для конструювання цього нової в'язки ланцюгів:

(1) Оберемо мінімальний елемент $e \in \mathcal{E}$ та мінімальний елемент $f \in \mathcal{F}$ такі, що $e - f$. Покладемо $\mathcal{E}^- = \mathcal{E} \setminus \{e\}$, $\mathcal{F}^- = \mathcal{F} \setminus \{f\}$.

(2) Розглянемо атомну задачу, визначену в'язкою $(\{e\}, \{f\})$ (з відношенням $\sim$); назвемо таку задачу *атомною частиною* $\mathcal{X}$.

(3) Знайдімо множину $\mathcal{S}$ всіх слів, відповідних до нерозкладних зображень цієї атомної задачі.

(4) Побудуємо множини $\mathcal{E}^+$ and $\mathcal{F}^+$ наступним чином:

   (a) якщо існує $x \in \mathcal{E}^-$ таке, що $x - w$ або $w - x$ можливе, але немає $y \in \mathcal{F}^-$ з цією властивістю, тоді $w \in \mathcal{F}^+$; в цьому випадку покладемо $w - x$ для всіх елементів $x \in \mathcal{E}^-$ з цією властивістю;

   (b) якщо існує $x \in \mathcal{F}^-$ таке, що $x - w$ або $w - x$ можливе, але немає $y \in \mathcal{E}^-$ з цією властивістю, тоді $w \in \mathcal{E}^+$; в цьому випадку покладемо $w - x$ для всіх елементів $x \in \mathcal{F}^-$ з цією властивістю;

   (c) якщо існують і $x \in \mathcal{E}^-$ таке, що $x - w$ or $w - x$ можливе, і $y \in \mathcal{F}^-$ з тією самою властивістю, розглянемо два нові символи w_e, w_f та додамо w_e to $\mathcal{E}^+$, w_f to $\mathcal{F}^+$; в цьому випадку покладемо $w_e \sim w_f$, $w_e - y$ для всіх $y \in \mathcal{F}^-$ та

$w_f - x$ для всіх $x \in \mathcal{E}^-$ з цією властивістю; покладемо також $w_e \sim w_f$;

(d) назвімо w *товстим*, якщо $End A_w / rad\, End A_w \neq K$, де A_w відповідне зображення;

(e) назвемо w *подвійним*, якщо $w \sim w$, або $w \sim w^\circ$, або $w^\circ \sim w$ де w° *обернене* слово;

(f) для двох слів $w, v \in \mathcal{E}^+$ (або в $\mathcal{F}^+$), покладемо $w < v$ якщо існує ненульовий гомоморфізм $A_w \to A_v$ (відповідно $A_v \to A_w$);

(g) кожне слово $w \in \mathcal{E}^+ \sqcup \mathcal{F}^+$ наслідує всі відношення $<, -, \sim$ які його кінці (e чи f) мали з усіма іншими елементами $\mathcal{X}$; більш того, якщо $w \in \mathcal{E}^+$, тоді $e < w$, якщо $w \in \mathcal{F}^+$, то $f < w$; якщо існують обидва w_e та w_f , то $e < w_e$ і $f < w_f$;

(h) викинемо пару $e - f$ з відношення $-$.

(5) Покладемо $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \sqcup \mathcal{E}^+$, $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \sqcup \mathcal{F}^+$ та $\mathcal{X}' = \{\mathcal{E}', \mathcal{F}', <', -', \sim'\}$, де $<', -', \sim'$ позначають змінені відношення $<, -, \sim$.

З наведеного вище переліку зображень атомних задач безпосередньо випливає

Твердження 49. *Після зведеня атомарної частини узагальненої в'язки ланцюгів $\mathfrak{X}$ одержуємо знову задачу про зображення (нової) узагальненої в'язки ланцюгів $\mathfrak{X}'$, побудованої вище. При цьому кількість елементів у матрицях, які задають зведене зображення, зменшується, якщо тільки не всі матриці, які відповідають обраній атомній задачі, є порожніми.*

Очевидно, якщо всі ці матриці були порожні, ми просто одержимо зображення (тієї ж розмірності) меншої в'язки ланцюгів (який одержується з даного викиданням одного з елементів e, f або навіть обох).

Оскільки ми вже встановили відповідність між струнними і стрічковими даними та нерозкладними зображеннями для атомних задач, тепер доведення теореми 47 випливає з твердження 49 очевидною індукцією.

5. Застосування

5.1. Скінчені модулі над нерозщеплюваною особливістю типу A_1.

Означення 50. R позначає локальну повну ньотерову k-алгебру, таку що:

R не має нільпотентних елементів

$R/radR = k$, де $radR$ позначає радикал Джекобсона R

$Kr.dimR = 1$

Ми кажемо, що R є особливістю типу A_1 якщо:

- $\operatorname{rad} \widetilde{R} = \operatorname{rad} R$, де $\widetilde{R}$ позначає нормалізацію R;
- $\dim_k \widetilde{R} / \operatorname{rad} \widetilde{R} = 2$

Надалі позначимо $J = \operatorname{rad} R = \operatorname{rad} \widetilde{R}$

Ми маємо два випадки - розщеплений ($\widetilde{R}/J = k \times k$) та нерозщеплений ($\widetilde{R}/J = F$, двовимірне розширення поля k).

Скінченно-породжені модулі розщепленого випадка були описані Назаровою та Ройтером (див. [**10**]), тож я сконцентруюсь на нерозщепленому випадку.

Тут $\widetilde{R} = k[|t|]$ і оскільки $J \subset R \subset \widetilde{R}$ та $J = \{a \in F[|t|] | a(0) = 0\}$, залишається єдина можливість:

$$R = \{a \in F[|t|] \mid a(0) \in k\}$$

Нашою головною метою є опис скінченно-породжених R-модулів. Але наші розрахунки є також дійсними для довільної пари локальних ньотерових кілець розмірності Круля 1, $R \subset \widetilde{R}$, таких що:

(1) $\widetilde{R}$ нормальне;

(2) $\operatorname{rad} R = \operatorname{rad} \widetilde{R} = J$;

(3) $F = \widetilde{R}/J$ двовимірне розширення поля $k = R/J$.

Ми маємо використати метод описаний Дроздом (див. [**5**]).

Оскільки кільце R є локально ньотеровим, для кожного скінченно-породженого R-модуля M існує точна послідовність

$$(\mathbf{2}) \qquad Q \xrightarrow{f} P \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

де Q та P скінченно-породжені вільні R-модулі, а f гомоморфізм, такий що $\operatorname{Im} f \subseteq JP$. [**16**].

Ми називаємо (**2**) вільним представленням M.

Тензорно домноживши точну послідовність (**2**) на $\widetilde{R}$, ми отримаємо точну послідовність:

$$(\mathbf{3}) \qquad \widetilde{Q} \xrightarrow{\widetilde{f}} \widetilde{P} \longrightarrow \widetilde{M} \longrightarrow 0$$

де $\widetilde{M}$ завжди позначає $\widetilde{R} \otimes_R M$, $\widetilde{f} = 1 \otimes f : \widetilde{R} \otimes_R Q \to \widetilde{R} \otimes_R P$. Оскільки $J = \operatorname{rad} \widetilde{R}$, ми маємо, що $\operatorname{Im} \widetilde{f} \subseteq \widetilde{R} \otimes_R JP = J \otimes_R P = J\widetilde{P} = JP$, тож (**3**) є знову вільним представленням $\widetilde{R}$-модуля $\widetilde{M}$.

Оскільки $\widetilde{R}$ нормальне, локальне та має розмірність Круля 1, воно є кільцем дискретного нормування, зокрема, областю головних ідеалів [**15**]. Таким чином, ми можемо обрати базиси в $\widetilde{P}$ та $\widetilde{Q}$ такими, що $\widetilde{f}$ задається дігональною $m \times m$ матрицею (де $m = rkP$, $n = rkQ$)

$$
\textbf{(4)} \qquad \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_m \end{pmatrix}
$$

де $a_1|a_2|...|a_m$.

Очевидно ми можемо вважати, що $\widetilde{M}$ не має нульових стовпчиків, і якщо t є генератором J (як $\widetilde{R}$-модуля), то ми можемо вважати, що $a_i = t^{k_i}$ для деяких цілих $k_i > 0$ (оскільки $\operatorname{Im} \widetilde{f} \subseteq J\widetilde{P}$, all $a_i \in J$).

Перепишемо матрицю (**4**) у формі:

$$
\textbf{(5)} \qquad \widetilde{F} = \begin{pmatrix} t\mathrm{I}_{r_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t^2\mathrm{I}_{r_2} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & t^s\mathrm{I}_{r_s} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}
$$

де I_r позначає $r \times r$ одиничну матрицю (можливо, що деякі $r_k = 0$, тобто відповідні блоки $t^k\mathrm{I}_{r_k}$ не існують в $\widetilde{M}$).

Тепер ми можемо переформулювати нашу мету. Нам потрібно тепер знайти всі гомоморфізми $f : Q \to P$ вільних R-модулів такі, що $\widetilde{f}$ можуть бути представлені фіксованою матрицею $\widetilde{M}$ вигляду (**5**) в деяких базисах $\widetilde{Q}$

та $\widetilde{P}$. Якщо f дано в деяких базисах Q та P матрицею M, це означає, що існують обертовні матриці C, D над $\widetilde{R}$ такі, що $C\widetilde{M} = MD$ (зауважимо, що всі значення M взяті з J оскільки $\operatorname{Im} f \subseteq JP$). Припустимо що M' інша матриця така, що $C'\widetilde{M} = M'D'$ для деяких обертовних $\widetilde{R}$-матриць C', D'. Нехай $f' : Q' \to P'$ - відповідний гомоморфізм вільних R-модулів. Тоді $P/\operatorname{Im} f \simeq P'/\operatorname{Im} f'$ тоді і тільки тоді, коли існують ізоморфізми $\alpha f = f'\beta$, або, що те саме, існують обертовні матриці A, B над R такі, що $AM = M'B$. В цьому випадку ми називаємо матриці M та M' *еквівалентними.*

Це дає нам:

$$AC\widetilde{M} = AMD = M'BD = C'\widetilde{M}{D'}^{-1}BD$$

або

$$C'^{-1}AC\widetilde{M} = \widetilde{M}{D'}^{-1}BD \tag{6}$$

Навпаки, якщо (**6**) справджується, ми отримуємо

$$AM = AC\widetilde{M}D^{-1} = C'\widetilde{M}{D'}^{-1}B = M'B$$

Позначимо через $\operatorname{Aut}\widetilde{M}$ множину всіх пар обертовних $\widetilde{A}$-матриць (X, Y) таких що $X\widetilde{M} = \widetilde{M}Y$. Тоді

$$({C'}^{-1}AC, {D'}^{-1}BD) \in \operatorname{Aut} M$$

i

$$(C', D')(C'^{-1}AC, D'^{-1}BD) = (A, B)(C, D).$$

Таким чином, класи еквівалентності матриць F знаходяться у взаємно-однозначній відповідності з подвійними суміжними класами:

(7) $GL(m,R) \times GL(n,R) \backslash GL(m,\widetilde{R}) \times GL(n,\widetilde{R}) / \operatorname{Aut}\widetilde{M}$

Зазначимо, що $GL(n,R)$ містить підгрупу конгруентності

$$GL(n,\widetilde{R},J) = \{X \in GL(n,\widetilde{R}) \mid X \equiv \mathrm{I}_n \mod J\} = GL(n,R,J)$$

Але $GL(n,\widetilde{R})/GL(n,\widetilde{R},J) \simeq GL(n,F)$, при тому, що

$$GL(n.R)/GL(n,R,J) \simeq GL(n,k).$$

Отже, подвійні суміжні класи **(7)** можна замінити подвійними суїжними класами:

(8) $GL(m,k) \times GL(n,k) \backslash GL(m,F) \times GL(n,F) / \overline{\operatorname{Aut}}\widetilde{A}$

де $\overline{\operatorname{Aut}}\widetilde{M}$ позначає образ $\operatorname{Aut}\widetilde{M}$ в $GL(m,F) \times GL(n,F)$.

Знайдемо $\operatorname{Aut}\widetilde{M}$. Припустимо, що $(X,Y) \in \operatorname{Aut}\widetilde{M}$, де

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1s} & x_{1,s+1} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2s} & x_{2,s+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{s1} & x_{s2} & \dots & x_{ss} & x_{s,s+1} \\ x_{s+1,1} & x_{s+1,2} & \dots & x_{s+1,s} & x_{s+1,s+1} \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1s} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{s1} & y_{s2} & \dots & y_{ss} \end{pmatrix}$$

Тут x_{ij} та y_{ij} — це блоки матриць X та Y, які відповідають поділу на блоки матриці $\widetilde{M}$ в $(\mathbf{5})$. Тоді

$$X\widetilde{M}=\begin{pmatrix} tx_{11} & t^2x_{12} & \dots & t^sx_{1s} \\ tx_{21} & t^2x_{22} & \dots & t^sx_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ tx_{s1} & t^2x_{s2} & \dots & t^sx_{ss} \\ tx_{s+1,1} & t^2x_{s+1,2} & \dots & t^sx_{s+1,s} \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{M}Y=\begin{pmatrix} ty_{11} & ty_{12} & \dots & ty_{1s} \\ t^2y_{21} & t^2y_{22} & \dots & t^2y_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t^sy_{s1} & t^sy_{s2} & \dots & t^sy_{ss} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Звідси:

$$x_{11}=y_{11}, x_22=y_22, ..., x_{ss}=y_{ss};$$

$$y_{ij}=t^{j-i}x_{ij}\equiv 0 \mod J \text{ якщо } i<j;$$

$$x_{ij}=t^{j-i}y_{ij}\equiv 0 \mod J \text{ якщо } i>j;$$

$$x_{s+1,j}=0 \text{ для } j=1,...,s.$$

Отже $\overline{\mathrm{Aut}\widetilde{M}}$ утворено з усіх пар $(\overline{X},\overline{Y})$ матриць над F вигляду:

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x}_{11} & \overline{x}_{12} & \dots & \overline{x}_{1s} & \overline{x}_{1,s+1} \\ 0 & \overline{x}_{22} & \dots & \overline{x}_{2s} & \overline{x}_{2,s+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \overline{x}_{ss} & \overline{x}_{s,s+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \overline{x}_{s+1,s+1} \end{pmatrix}$$

$$\overline{Y} = \begin{pmatrix} \overline{x}_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \overline{y}_{21} & \overline{x}_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ \overline{y}_{s1} & \overline{y}_{s2} & \dots & \overline{x}_{ss} \end{pmatrix}$$

Відповідно з цим поділом, для кожної пари матриць $(C, D) \in GL(m, F) \times GL(n, F)$ розіб"ємо на блоки матриці C і D (при цьому, очевидно, треба враховувати лише поділ стовпчиків):

$$C = (C_1 \ C_2 \ ... \ C_{s+1})$$

$$D = (D_1 \ D_2 \ ... \ D_s)$$

де C_i має розмір $m \times r_i$, а D_i має розмір $n \times r_i$ (див. (**5**)). Тепер при дії групи групи $\overline{\mathrm{Aut}\widetilde{M}}$ праворуч пара (C, D) перетворюється на пару (C', D'), де

$$C' = (C'_1 \ C'_2 \ ... \ C'_{s+1}),$$

$$D' = (D'_1 \ D'_2 \ ... \ D'_s),$$

$$C_i' = C_i\overline{x}_{ii} + \sum_{j<i} C_j\overline{x}_{ji},$$
$$D_i' = D_i\overline{x}_{ii} + \sum_{j>i} D_j\overline{y}_{ji}.$$

Дія елемента $(u, v) \in GL(m, k) \times GL(n, k)$ ліворуч переводить кожну матрицю C_i в uC_i, а D_i в vD_i. Отже, ми отримали зображення узагальненої в'язки ланцюгів, в якій

$$\mathcal{E} = \{\, e_1, e_2 \,\},$$
$$\mathcal{F} = \{\, c_1, c_2, \ldots, c_{s+1}, d_1, d_2, \ldots, d_s \,\},$$
$$e_1 - c_i \text{ для всіх } i = 1, \ldots, s+1,$$
$$e_2 - d_i \text{ для всіх } i = 1, \ldots, s,$$
$$c_i \sim d_i \text{ для всіх } i = 1, \ldots, d_s,$$
$$c_1 < c_2 < \cdots < c_{s+1},$$
$$d_1 > d_2 > \cdots > s,$$
$$e_1 \sim e_1 \text{ і } e_2 \sim e_2,$$
$$E_c = k \text{ і } F_c = F \text{ для всіх класів } c \in \mathfrak{X}/\theta.$$

(Зауважимо, що таких класів два $\{\, e_1, c_1, c_2, \ldots, c_{s+1} \,\}$ і $\{\, e_2, d_1, d_2, \ldots, d_s \,\}$.)

Як було показано вище, нерозкладні зображення цієї в'язки знаходяться у взаємно однозначній відповідності з струнними та стрічковими даними. Втім, не кожне зображення в'язки дійсно відповідає модулю над кільцем R: для цього необхідно і достатньо, щоб обидві "великі" матриці C, D були невиродженими. Це накладає на струни і стрічки додаткові умови.

Наприклад, якщо струна відповідає простому слову w, яке починається з $e_1 \sim e_1 - c_i$, то відповідна матриця C має вигляд

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{bmatrix}$$

Отже, вона вироджена, що неможливо. Так само, просте слово у струнних даних не може закінчуватись на $c_i - e_1 \sim e_1$, або починатись (відповідно, закінчуватись) з $e_2 \sim e_2 - d_j$ (відповідно, з $d_j - e_2 \sim e_2$).

Аналогічно, якщо w починається (або закінчується) з $c_i \sim d_j$, то відповідний стовпчик в матриці C_i є нульовим, що також неможливо. Те саме справджується, якшо w починається з $d_j \sim c_i$ або закінчується цими елементами. Отже, залишається єдина можливість для простих слів, які визначають струнні дані:

$c_{s+1} - e_1 \sim e_1 - c_{i_1} \sim d_{i_1} - e_2 \sim e_2 - ... - e_1 \sim e_1 - c_{s+1}$

Відповідні матриці мають вигляд:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \alpha & 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \alpha & \dots & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 1 & 1 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \alpha & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha \end{pmatrix}$$

Тут останні два стовпчики матриці C належать до c_{s+1}; k-ий стовпчик C належить до c_{i_k}, а k-ий стовпчик D належить d_{i_k}.

Так само, особливе слово, яке визначає струну, мусить мати вигляд

$$e_1 - c_{i_1} \sim d_{i_1} - e_2 \sim e_2 - ... - e_1 \sim e_1 - c_{s+1}$$

або

$$e_2 - d_{i_1} \sim c_{i_1} - e_1 \sim e_1 - ... - e_1 \sim e_1 - c_{s+1}.$$

Відповідні матриці у першому випадку мають вигляд

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \alpha & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 1 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \alpha & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \alpha & 0 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \alpha & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha \end{pmatrix}$$

Тут останній стовпчик C належить до c_{s+1}, k-ий стовпчик C належить до c_{i_k}, а k-ий стовпчик D належить d_{i_k}.

У другому випадку матриці мають вигляд

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \alpha & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 1 & 1 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \alpha & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 1 & 1 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \alpha & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha \end{pmatrix}$$

з тим самим розподілом стовпчиків.

Біособливі слова (з точністю до симетрії) — це

$$e_1 - c_{i_1} \sim d_{i_1} - e_2 \sim e_2 - ... - e_1,$$

або

$$e_1 - c_{i_1} \sim d_{i_1} - e_2 \sim e_2 - ... - e_2,$$

або

$$e_2 - d_{i_1} \sim c_{i_1} - e_1 \sim e_1 - ... - e_2.$$

Матриці відповідні до струнних даних з цими біособливими словами мають вигляд

$$C = \begin{pmatrix} \ddots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \alpha & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \alpha & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \alpha & 1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \alpha & 1 & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix}$$

В цьому випадку матриця c_{s+1} порожня, розподіл стовпчиків по інших матрицях — той самий, що й вище.

Нарешті, цикли мають вигляд (з точністю до зсуву)

$w = e_1 \sim e_1 - c_{i_1} \sim d_{i_1} - e_2 \sim e_2 - \dots - d_{i_k} \sim c_{i_k}$. Всі вони несиметричні. Якщо $f(t) \neq t^d$, то струнним даним $(w, f(t))$ відповідають матриці

$$C = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{I} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha\mathrm{I} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \mathrm{I} & \mathrm{I} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \alpha\mathrm{I} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \mathrm{I} & \mathrm{I} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha\mathrm{I} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \Phi \\ \alpha\mathrm{I} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \mathrm{I} & \mathrm{I} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \alpha\mathrm{I} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \mathrm{I} & \mathrm{I} & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha\mathrm{I} & 0 \end{pmatrix}$$

де Φ матриця Фробеніуса відповідна до многочлена $f(t)$. Тут знову матриця відповідна до c_{s+1}, порожня, а розподіл стовпчиків (точніше, вертикальних смуг) по матрицях C_k та D_k той самий, що й вище.

Кожне таке зображення задає вільне представлення

$$nR \xrightarrow{\phi} mR \longrightarrow M \longrightarrow 0\,.$$

деякого нерозкладного модуля M на кільцем R і в цей спосіб одержуємо всі такі представлення.

Матриця, яка задає гомоморфізм ϕ, дорівнює $C\widetilde{F}D$, де C, D — матриці, наведені у переліку нерозкладних зображень даної в'язки ланцюгів, а $\widetilde{F}$ — матриця, визначена формулою (**5**) вище. Тим самим, ми одержуємо опис всіх нерозкладних R-модулів.

Висновки

У дисертації розв'язано проблему узагальнення матричних задач на випадок алгебраїчно незамкненого поля. Зокрема, доведено підсилену гіпотезу Брауера-Тролла для бімодульних задач та аналогічну теорему для зображень артінових алгебр. Також доведено, що зважена частково впорядкована множина має скінчений зображувальний тип тоді й лише тоді, коли її форма Тітса слабо додатня. З цією метою були побудовані віддзеркалення для зображень зважених частково впорядкованих множин і встановлені їхні властивості, а також доведено, що, коли форма Тітса слабо додатня, всі нерозкладні зображення одержуються з тривіальних послідовним застосуванням функторі віддзеркалень.

Для узагальнених в'язок ланцюгів було наведено список атомних задач, та побудований алгоритм зведення матриць. Було також встановлено, що коли ми спрощуємо атомну частину в'язки ланцюгів і обмежуємо елементарні перетворення до таких, які не змінюють канонічної форми цієї частини, то ми знову отримуємо представлення (нової) узагальненої в'язки ланцюгів. В явній формі було надано алгоритм такого зведення. З цієї рекурсивної процедури було виведено результат, який дає опис всіх нерозкладних зображень довільної узагальненої в'язки ланцюгів. А саме, було розроблено комбінаторику струн і стрічок і встановлено процедуру, яка по кожним струнним або стрічковим даним будує відповідне нерозкладне зображення, причому такий спосіб одержуються всі нерозкладні зображення (з точністю до ізоморфізму).

Описані результати узагальнюють відомі результати Л. А. Назарової, А. В. Ройтера, Ю. А. Дрозда, В. М. Бондаренка, В. Длаба, К. Рінгеля. Вони можуть бути застосовані в різноманітних задачах теорії зображень, алгебраїчної геометрії, алгебраїчної топології, тощо. Приклад такого застосування наведений в останньому розділі.

Результати дисертації є новими і не мають аналогів у сучасній науковій літературі.

Бібліоґрафія

[1] И.Н.Бернштейн, И.М.Ґельфанд, В.А.Пономарев. Функторы Коксетера и теорема Габриеля. Успехи матем. наук **28**, №2 (1973), 19–33.

[2] В. М. Бондаренко. Представления связок полуцепніх множеств и их применения. Алгебра и анализ 3, №5 (1991) 38–61.

[3] Ю.А.Дрозд. Преобразования Коксетера и представления частично упорядоченных множеств. Функ. анализ прилож. **8:3** (1974), 34–42.

[4] Ю.А.Дрозд. О ручных и диких матричных задачах. В книге: Матричные задачи. Киев, Ин-т матем. АН УССР, 1977, с.104–114.

[5] Ю. А. Дрозд. Конечные модули над чисто нетеровыми кольцами. Труды матем. ин-та им. Стеклова. 183 (1991), 97–109.

[6] М.М.Клейнер. Частично упорядоченные множества конечного типа. Записки науч. семин. ЛОМИ **28** (1972), 32–41.

[7] М.М.Клейнер. О точных представленияч частично упорядоченных множеств конечного типа. Записки науч. семин. ЛОМИ **28** (1972), 42–60.

[8] П. Кон. Свободные кольца и их связи. Мир. Москва, 1975.

[9] Л.А.Назарова, А.В.Ройтер. Представления частично упорядоченных множеств. Записки науч. семин. ЛОМИ **28** (1972), 5–31.

[10] Л. А. Назарова и А. В. Ройтер. Конечно-порожденные модули над диадой локальных дедекиндовых колец. Известия Академии Наук СССР 33 (1969), 65-89.

[11] Л. А. Назарова и А. В. Ройтер. Об одной задаче Ѓельфанда. Функц. анализ прилож. 7:4 (1973).

[12] С.А.Овсиенко. Целые слабо положительные формы. В книге: Шуровские матричные задачи и квадратичные формы. Киев, Ин-т матем. АН УССР, 1978, с.3–17.

[13] А.В. Ройтер. Неограниченность размерностей неразложимых представлений алгебр, имеющих бесконечно много неразложимых представлений. Известия АН СССР. Сер. матем. 32 (1968), 1275–1282.

[14] А.В.Ройтер. Корни целых квадратичных форм. Труды Матем. ин-та им. Стеклова АН СССР **148** (1978), 201–210.

[15] M. Atiyah and I. Macdonald. Introduction to Commutative Algebra. Addison–Wesley, 1969.

[16] H. Bass Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings. Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960), 466–488.

[17] H.-J. Baues and Yu. Drozd. Representation theory of homotopy types with at most two non-trivial homotopy groups, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 128 (2000), 283–300.

[18] H.-J. Baues and Yu. Drozd. Indecomposable homotopy types with at most two non-trivial homology groups, in: Groups of Homotopy Self-Equivalences and Related Topics. Contemporary Mathematics, 274 (2001) 39–56.

[19] I. Burban and Yu. Drozd. Coherent sheaves on rational curves with simple double points and transversal intersections. Duke Math. J. 121 (2004) 189–229.

[20] W. W. Crawley-Boevey. Functorial Filtrations II: Clans and the Gelfand Problem. Journal of the London Mathematical Society 40 (1989), 385-402

[21] Crawley-Boevey. Matrix problems and Drozd's theorem. Banach Center Publ. 26, part 1 (1990), 199–222.

[22] H. Derksen, J. Weyman. Quiver Representations. Notices of the AMS - Volume 52, Number 2.

[23] V.Dlab, C.M.Ringel. On algebras of finite representation type. J. Algebra **33** (1975), 306–394.

[24] V.Dlab, C.M.Ringel. Indecomposable representations of graphs and algebras. Mem. Amer. Math. Soc. **173** (1976).

[25] V. Dlab and C. M. Ringel. Normal Forms of Real Matrices with Respect to Complex Similarity. Linear Algebra and its Applications 17, 107-124 (1977)

[26] Y.A.Drozd. Representations of bisected posets and reflection functors. CMS Conference Proceedings **24** (1996), 153–165.

[27] Yu. A. Drozd. Tame and wild matrix problems. In: *Representations and Quadratic Forms.* Institute of Mathematics, Kiev, 1979, 39–74.

[28] Y.A. Drozd. Reduction algorithm and representations of boxes and algebras. Comptes Rendues Math. Acad. Sci. Canada 23 (2001), 97–125.

[29] Yu. Drozd and G.-M. Greuel. Cohen–Macaulay module type, Compositio Math., 89 (1993) 315–338.

[30] Yu. Drozd and G.-M. Greuel. Tame and wild projective curves and classification of vector bundles. J. Algebra, 246 (2001) 1–54.

[31] P. Gabriel. Unzerlegbare Darstellungen. Manuscripta Math. 6 (1972), 71–103.

[32] M. M. Kleiner and A. V. Roiter. Representations of differential graded categories. In: *Representations of*

Algebras. Lecture Notes in Math. **488**, Springer, 1975, 316–319.

[33] O. Drozd. Generalized bunhes of chains В книзі: Алгебраїчні структури та їх застосування. Київ. Інститут математики НАН України - 2002. - Ст. 224-237.

[34] O. Drozd-Koroleva. Weighted partially ordered sets of finite type Algebra and Discrete Mathematics. - 2006. - №2. - Ст. 36-49

[35] О. Ю. Дрозд-Корольова. Бімодульні задачі над кільцями. Вісник Київського Університету. Серія: Фізико-математичні науки. - 2006. - Вип. 3.

[36] O. Drozd. Representations of generalized bunches of chains. Abstracts of Talks. IIIrd International Algebraic Conference in Ukraine (Sumy, 2001) - 2001.

[37] O. Drozd. Reduction algorithm for generalized boxes. Abstracts of ICRA X - 2002.

[38] O. Drozd. A generalization of Kleiner-Roiter algorithm. Abstracts of Talks. IV International Algebraic Conference in Ukraine. (Lviv, 2003) - 2003. - Ст. 62.

[39] O. Y. Drozd-Koroleva. Weighed bisposets of finite type. Abstracts of Talks. IV International Algebraic Conference in Ukraine (Odessa, 2005) - 2005. - Ст. 65-66.

[40] O. Drozd-Koroleva. Bimodule problems over rings. International Conference on Radicals. Abstracts of Talks. (Kiev, 2006) - 2006. - Ст. 29-30.