Заняття № 8. Логічні виводи.

Аксіоми 8.1 (Аксіоми логіки відношень). .

1. $A \to (B \to A)$;
2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;
3. $A \to (A \vee B)$;
4. $B \to (A \vee B)$;
5. $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$;
6. $A \wedge B \to A$;
7. $A \wedge B \to B$;
8. $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to B \wedge C))$;
9. $(A \to B) \to ((A \to \rceil B) \to \rceil A)$;
10. $\rceil\rceil A \to A$;
11. $\forall x A \to A_t^x$ (якщо t - терм вільний для x в A);
12. $A_t^x \to \exists x A$ (якщо t - терм вільний для x в A);
13. $\forall x(A \to B) \to (A \to \forall x B)$ (якщо x - змінна, яка не є вільною в A);
14. $\forall x(B \to A) \to (\exists B \to A)$ (якщо x - змінна, яка не є вільною в A).

Основні задачі.

8.1. Нехай x не є вільною змінною в речені A. Доведіть, що

1. $\vdash (\exists x B \to A) \to \forall x(B \to A)$
2. $\vdash (A \to \forall x B) \to \forall x(A \to B)$.

8.2. Занумеруємо в який небудь спосіб усі символи предикатів логіки відношень: $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ і кожній речені A логіки відношень співставимо реченню $A^\star$ логіки висловлювань за наступним правилом:

- з речення A видалимо всі символи змінних і констант, фукціоналів і кванторів;
- символ предиката P_n замінимо атомом A_n логіки висловлювань, так щоб отримати речення логіки висловлювань.

Доведіть, що

1. Якщо A - аксіома числення предикатів, то то $A^\star$ - тавтологія;
2. Якщо $A_1, \ldots, A_n$ - вивід речення A з множини речень Γ у численні предикатів, то $A_1^\star, \ldots, A_n^\star$ - вивід речення $A^\star$ з множини речень $\Gamma^\star$ у численні висловлювань. Зокрема, якщо $\vdash A$, то $A^\star$ - тавтологія.
3. У численні предикатів неможливо одночасно $\vdash A$ і $\vdash \rceil A$.

8.3. Нехай T - теорія першого порядку. Позначимо $A \equiv_T B$, якщо $\vdash_T A \to B$ і $\vdash_T B \to A$ одночасно Доведіть, що
а) $\forall x_i(A \wedge B) \equiv_T \forall x A \wedge \forall x B$;
б) $\exists x_i(A \vee B) \equiv_T \exists x A \vee \exists x_i B$;
в) $\exists x_i(A \to B) \equiv_T \forall x_i A \to \exists x B$,
зокрема,
$\exists x_i(A \to B) \equiv_T A \to \exists x_i B$, якщо змінна x_i не є вільною в речені A,
$\exists x_i(A \to B) \equiv_T \forall x_i A \to B$, якщо змінна x_i не є вільною в речені B.

8.4. Перевірити, чи будуть наступні послідовності виводами в логіці відношень:

A: 1. $\forall x \exists y P(x, y) \to \exists y P(f(y, y))$;
B: 1. $\forall x P(x) \to P(f(y))$,
2. $\forall x P(x) \to \forall y P(f(y))$;
C: 1. $P(x) \to \exists P(x)$,
2. $(P(x) \to \exists x P(x)) \to (\forall x P(x) \to (P(x) \to \exists x P(x)))$,
3. $\forall x P(x) \to (P(x) \to' existsxP(x))$.

8.5. Доведіть, що

1. $\vdash \forall xA \vee \forall xB \to \forall x_i(A \vee B)$;
2. $\vdash \exists x_i(A \wedge B) \to \exists xA \wedge \exists xB$;
3. $\vdash (\exists xA \to \forall xB) \to \forall x_i(A \to B)$.

Чи завжди виводять обернені імплікації?

8.6. Побудувати виводи наступних речень:

1. $\exists x \exists y P(x, y) \to \exists y \exists x P(x, y)$;
2. $\exists x \forall y P(x, y) \to \forall y \exists x P(x, y)$;
3. $\forall x \forall y P(x, y) \to \forall x P(x, x)$;

8.7. Довести твердження:

1. $\forall x(P(x) \to Q(x)) \vdash \exists x P(x) \to \exists x Q(x)$;
2. $\forall x(P(x) \to Q(x)) \vdash \forall y P(y) \to \forall z Q(z)$.

8.8. Доведіть, що коли $\vdash_T A \to B$, то $\vdash_T \forall xA \to \forall xB$.

8.9. Довести, що якщо $\Gamma \vdash \forall x A(x)$, то $\Gamma \vdash A(t)$ для довільного терма t, вільного для x в $A(x)$.

Домашнє завдання.

8.10. Побудувати виводи наступних речень:

1. $\forall x \forall y P(x, y) \to \forall y \forall x P(x, y)$;
2. $\exists x P(x, x) \to \exists y \exists x P(x, y)$.

8.11. Побудуйте вивід речення $\exists x_i \urcorner A \to \urcorner \forall x A$.

8.12. Довести, що якщо $\Gamma \vdash A(t)$ для деякого терма t, вільного для x в $A(x)$, то $\Gamma \vdash \exists x A(x)$.