Заняття № 7. Логічні наслідки.

Основні задачі.

7.1. Використовуючи поняття логічного наслідку для логіки предикатів, пересвідчитись, чи будуть правильними міркування:

1. Ніхто не може розшифрувати прислане повідомлення, не знаючи шифру, яким воно було зашифроване. Ні Іванов, ні Петренко його не розшифрували. Отже вони не знають шифру, яким зашифроване це повідомлення.
2. Для довільної множини X існує множина Y більшої потужності. Якщо X міститься в Y то потужність X не перевищує потужність множини Y. Кожна множина міститься в U. Отже, U не є множиною.
3. Кожне раціональне число є дійсним. Існує раціональне число. Отже, існує дійсне число.
4. Деякі першокурсники добре ставляться до всіх второкурсників. Жоден першокурсник не любить нікого зі студентів останнього курсу. Отже, жоден второкурсник не є студентом останнього курсу.
5. Декому подобається співати. Дехто не любить нікого, хто любить співати. Отже, декого люблять не всі.

7.2. Довести:

1. речення B є логічним наслідком речення A тоді і тільки тоді, коли речення $A \to B$ є тотожно істинною реченням;
2. Якщо речення B є логічним наслідком речення A і A тотожно істинна в інтерпретації $\mathcal{I}$, то і речення B тотожно істинна в інтерпретації $\mathcal{I}$.

7.3. 1. Доведіть, що коли $\models_{\mathcal{I}} A$, то $\models_{\mathcal{I}} \forall x A$;
2. Наведіть приклад того, що речення $A \to \forall x A$ може не бути тотожно істинною.

7.4. Чи правильно стоїть знак $\models$ у співвідношеннях:
а) $\forall x_i \exists x_j A(x_i, x_j) \models \exists x_i \forall x_j A(x_i, x_j)$;
б) $A(x_i) \to B \models \ \exists x A(x_i) \to B$?

7.5. Довести, що якщо $\Gamma \cup \{A\} \models B$ і A замкнена, то $\Gamma \models A \to B$.
Наведіть приклад того, що без обмеження на A це твердження може бути невірним.

7.6. Записати мовою логіки відношень означення неперервності функції в точці і вивести логічними засобами звідси означення розривності.

Домашнє завдання.

7.7. Будемо писати $\models_n \mathbf{A}$, якщо $\models_M \mathbf{A}$ для кожної множини з n елементами.

1. Доведіть, що з $\models_n \mathbf{A}$ випливає $\models_m \mathbf{A}$ при $m < n$.
2. Наведіть приклад речення $\mathbf{A}$, такого що $\models_n \mathbf{A}$, але не $\models_{n+1} \mathbf{A}$, де n — задане натуральне число.

7.8. Доведіть, що

1. $\forall \mathrm{x} \neg \mathbf{A} \Leftrightarrow \neg \exists \mathrm{x} \mathbf{A}$
2. $\exists \mathrm{x} \neg \mathbf{A} \Leftrightarrow \neg \forall \mathrm{x} \mathbf{A}$
3. $\forall \mathrm{x} \mathbf{A} \Leftrightarrow \forall \mathrm{y} \mathbf{A}^{\mathrm{x}}_{\mathrm{y}}$ якщо y не зустрічається в $\mathbf{A}$
4. $\exists \mathrm{x} \mathbf{A} \Leftrightarrow \exists \mathrm{y} \mathbf{A}^{\mathrm{x}}_{\mathrm{y}}$ якщо y не зустрічається в $\mathbf{A}$.