Заняття № 6. Тотожно істині та виконливі речення.

Основні задачі.

6.1. Вкажіть вільні та зв'язані входження кожної змінної в наступних реченнях:
1. $\forall x P(x)$;
2. $\P(x) \to \exists x Q(x)$;
3. $\exists x A(x) \wedge B(x)$;
4. $\exists x \forall y (P(x) \wedge Q(y)) \to \forall x R(x)$.

6.2. Доведіть, що наступні речення логіки відношень є тотожно істиними:
1. $\forall \mathrm{x} \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{x}}$, де терм t є вільним для x у реченні $\mathbf{A}$.
2. $\forall \mathrm{x}(\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \Rightarrow (\exists \mathrm{x} \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B})$, де x не є вільною змінною в реченні $\mathbf{B}$.

6.3. Доведіть, що якщо формули F_1 та $F_1 \to F_2$ тотожньо істині, то F_1 також тотожньо істине.

6.4. Наведіть приклади, які показують, що коли терм t не є вільним для x в реченні $\mathbf{A}$, речення $\forall \mathrm{x} \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{x}}$ та $\mathbf{A}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{x}} \Rightarrow \exists \mathrm{x} \mathbf{A}$ можуть не бути тотожно істиними.

6.5. 1. Доведіть, що коли $\models_{\mathcal{I}} \mathbf{A}$, то $\models_{\mathcal{I}} \forall \mathrm{x} \mathbf{A}$.
2. Наведіть приклад того, що речення $\mathbf{A} \Rightarrow \forall \mathrm{x} \mathbf{A}$ може не бути тотожно істиним.

6.6. Доведіть, шо наступні речення логіки предикатів є тотожно істинними
(a) $\forall x A \to A_t^{x_i}$ де терм t є вільним для x_i в реченьі A;
(b) $\forall x_i (A \to B) \to (\exists x_i A \to B)$, де змінна x_i не є вільною в реченьі B;
c) $(\forall x A \wedge \forall x B) \leftrightarrow \forall x_i (A \wedge B)$;
d) $\forall x_i \forall x_j A \leftrightarrow \forall x_j \forall x A$; e) $\exists x_i \forall x_j A \to \forall x_j \exists x A$;

6.7. Доведіть, шо наступні речення логіки предикатів не є тотожно істинними
a) $(\forall x_1 P_1(x_1) \to \forall x_1 P_2(x_1)) \to (\forall x_1 (P_1(x_1) \to P_2(x_1))$;
b) $(\forall x_1 (P_1(x_1) \vee P_2(x_1))) \to (\forall x_1 P_1(x_1) \vee \forall x_1 P_2(x_1))$;

6.8. Скількома способами можна проінтерпретувати реченьу

$$a) \quad (\exists x_2 P_1(x_!, x_2) \vee \forall x_1 P_2(x_1, c_1)) \wedge P_3(x_1, c_2, x_1);$$

$$b) \quad \exists x_2 (\forall x_1 (P_1(x_1, x_2, c_1) \to P_2(x_1, c_2, c_1))) \wedge P_3(x_1, c_3)$$

над множиною A із n елементів.

6.9. Скільки існує різних інтерпретацій речення

$$a) \quad \forall x_1 \forall x_2 (P(x_1, x_2) \to P(x_2, x_1));$$

$$b) \quad \forall x_1 \forall x_2 (P(x_1, x_2) \wedge P(x_2, x_1))$$

над множиною із n елементів, при яких вона перетворюється в істинне твердження?

6.10. Чи будуть тотожно істинними (загальнозначимими) речення:
1. $\forall x_1 P(x_1) \to \exists x_2 P(x_2)$;
2. $\forall x_1 (P_1(x_1) \to P_2(x_2)) \leftrightarrow (\exists x_1 P_1(x_1) \to P_2(x_2))$?

6.11. Чи буде виконливим речення $\forall x_1 \exists x_2 P(x_1, x_2) \leftrightarrow \exists x_2 \forall x_1 P(x_1, x_2)$?

Домашнє завдання.

6.12. Вкажіть вільні та зв'язані входження кожної змінної в наступних реченнях:
1. $\forall x P(x) \to P(y)$;
2. $\exists x \exists y (P(x, y) \wedge Q(z))$.

6.13. Нехай предикатні символи P_1 і P_2 у реченні $F = \exists x_3(P_1(x_1, x_3) \wedge P_2(x_3, x_2))$ інтерпретуються над множиною $\mathbb{R}$ так

$$P_1(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{при } x_2 = \operatorname{tg} x_1 \\ 0 & \text{в іншому разі.} \end{cases} \quad P_2(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{при } x_2 = x_1^3 \\ 0 & \text{в іншому разі} \end{cases}$$

Який предикат над $\mathbb{R}$ виражає речення F у цій інтерпретації?

6.14. Чи буде виконливою речення $\exists x_1 \exists x_2 (P(x_1) \wedge \rceil P(x_2))$?

6.15. Чи буде тотожно істинним речення $P(x_1) \to \exists x_2 P(x_2)$?

6.16. Наведіть приклади, які показують, що коли терм t не є вільним для x_i в реченьі A, то речення $\forall x A \to A_t^{x_i}$ та $A_t^{x_i} \to \exists x A$ можуть не бути тотожно істинними.