

Заняття № 5. Предикати. Речення.

Основні задачі.

5.1. Запишіть наступні речення мовою формул логіки предикатів:

1. Не всі птахи вміють літати.
2. Ви можете обманювати декого весь час, ви можете обманювати всіх деякий час, але ви не можете обманювати всіх і весь час.
3. Кожний, в кому є упертість, може вивчити математичну логіку.

5.2. Нехай предикати $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ над множиною $M = \{a, b, c, d\}$ задано таблицями значень

x	a	b	c	d
$P(x)$	1	1	0	1
$Q(x)$	0	1	0	0
$R(x)$	1	1	1	1

Побудувати таблиці значень предикатів:

- a) $\forall x_2(P(x_2) \rightarrow Q(x_1)) \wedge \exists x_2 R(x_2)$;
- b) $\exists x_1((\forall x_1(P(x_1) \rightarrow Q(x_1))) \leftrightarrow R(x_1))$;
- c) $\exists x_2 \forall x_3(\forall x_1 P(x_1) \rightarrow (R(x_2) \wedge Q(x_3)))$.

5.3. Предикати $P_1(x_1, x_2)$, $P_2(x_1, x_2)$, $P_3(x_1)$ задано на множині $M = \{a, b, c\}$ таблицями значень

$P_1(x_1, x_2)$	<table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>$x_1 \setminus x_2$</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr> <tr><td>a</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>b</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>c</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	$x_1 \setminus x_2$	a	b	c	a	1	1	0	b	0	1	0	c	0	1	1	,	$P_2(x_1, x_2)$	<table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>$x_1 \setminus x_2$</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr> <tr><td>a</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>b</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>c</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> </table>	$x_1 \setminus x_2$	a	b	c	a	1	0	1	b	1	1	1	c	0	0	1	,	$P_3(x_1)$	<table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>x_1</td><td>$P_3(x_1)$</td></tr> <tr><td>a</td><td>1</td></tr> <tr><td>b</td><td>0</td></tr> <tr><td>c</td><td>1</td></tr> </table>	x_1	$P_3(x_1)$	a	1	b	0	c	1
$x_1 \setminus x_2$	a	b	c																																												
a	1	1	0																																												
b	0	1	0																																												
c	0	1	1																																												
$x_1 \setminus x_2$	a	b	c																																												
a	1	0	1																																												
b	1	1	1																																												
c	0	0	1																																												
x_1	$P_3(x_1)$																																														
a	1																																														
b	0																																														
c	1																																														

Побудувати таблицю значень предикатів

- a) $\exists x_1 P_3(x_1) \rightarrow (\exists x_2 \forall x_1 P_1(x_1, x_2))$;
- b) $\forall x_1 P_2(x_1, x_2) \vee (\exists x_2 \neg P_3(x_2))$;
- c) $\forall x_1 \exists x_2 (\forall x_1 P_3(x_1) \rightarrow (\exists x_2 P_1(x_1, x_2) \vee \forall x_1 P_2(x_1, x_2)))$.

5.4. На множині \mathbb{N}_0 всіх натуральних чисел з нулем вибрано такі атомарні предикати $S(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_1 + x_2 = x_3, \\ 0, & \text{в іншому разі} \end{cases}$, $D(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_1 x_2 = x_3, \\ 0, & \text{в іншому разі} \end{cases}$

Запишіть наступні твердження у вигляді формул, що містять лише предикатні символи S , D

1. Дія додавання натуральних чисел асоціативна;
2. Добуток двох парних чисел є парним числом;
3. Кожне парне число є сумою трьох простих чисел;
4. Множина простих чисел-близнюків скінченна.

5.5. Область інтерпретації \mathcal{I} — множина фігур на площині. Предикатам $P(x)$, $Q(x)$, $R(x, y)$, $S(x, y)$ відповідають відношення $\mathcal{I}(P)$: « x — точка», $\mathcal{I}(Q)$: « x — пряма», $\mathcal{I}(R)$: $x \in y$, $\mathcal{I}(S)$: $x = y$.

1. Яке значення в цій інтерпретації має речення $\forall x(Q(x) \Rightarrow \exists y(Q(y) \wedge \neg \exists z(P(z) \wedge R(z, x) \wedge R(z, y)) \wedge \forall t(Q(t) \wedge \neg \exists z(P(z) \wedge R(z, x) \wedge R(z, t)) \Rightarrow S(y, t)))$? Чому?
2. Напишіть речення **A**, таке що $\text{val}(\mathcal{I}, \phi, \mathbf{A}) = 1$ тоді і лише тоді, коли $\phi(x) = X$, $\phi(y) = Y$, $\phi(z) = Z$, $\phi(t) = T$ — точки, причому прямі XY та ZT непаралельні.

5.6. Область інтерпретації \mathcal{I} — множина дійсних чисел. Предикатам $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ відповідають відношення $\mathcal{I}(P)$: «точка з координатами (x, y) належить колу радіуса 4 з центром $(1, 0)$ » та $\mathcal{I}(Q)$: «точка з координатами (x, y) належить тій півплощині з границею $x + y = 1$, яка не містить початку координат». При яких значеннях $X = \phi(x)$

(1) $\text{val}(\mathcal{I}, \phi, \mathbf{A}) = \mathbf{1}$, де $\mathbf{A} = \forall y(P(x, y) \Rightarrow Q(x, y))$?

(2) $\text{val}(\mathcal{I}, \phi, \mathbf{B}) = \mathbf{1}$, де $\mathbf{B} = \exists y(P(x, y) \wedge Q(x, y))$?

5.7. На множині $M = \{1, 2, 3\}$ інтерпретацію \mathcal{I} задамо таблицями:

$x \setminus y$	1	2	3
$\mathcal{I}(P)(x, y)$	1	0	0
	2	1	0
	3	0	1

x	$Q(x)$
1	1
2	0
3	1

Знайдіть значення в цій інтерпретації речення:

$$\begin{aligned} & \exists y(P(x, y) \Rightarrow \forall x(\neg Q(f(x, z), y) \vee \exists z(R(z) \vee \neg P(x, z))))); \\ & \forall x(\exists y Q(x, y) \vee \exists z \neg R(z)) \Rightarrow \forall z(R(z) \wedge \exists x \neg P(x, y, g(z))), \\ & \neg \exists y \forall x P(x, y) \wedge \exists z(Q(z) \vee \forall x(P(z, x) \Rightarrow \neg Q(x))). \end{aligned}$$

Додаткові задачі.

5.8. Побудувати алгоритм перевірки того, чи є задане слово реченням логіки відношень.

Домашнє завдання.

5.9. Запишіть наступні речення мовою формул логіки предикатів:

1. Кожен оселедець - риба, але не кожна риба - оселедець.
2. Якщо сонце світить, то це комусь потрібно.

5.10. Побудувати таблицю значень предиката $\exists x_2(\forall x_1 P_1(x_1, x_2) \rightarrow P_2(x_1, x_2)) \leftrightarrow P_3(x_1)$.

$x_1 \setminus x_2$	a	b	c
$P_1(x_1, x_2)$	0	1	0
	1	0	1
	0	1	1

$x_1 \setminus x_2$	a	b	c
$P_2(x_1, x_2)$	1	0	1
	0	1	0
	0	0	0

x_1	$P_3(x_1)$
a	0
b	1
c	1

5.11. Нехай на множині точок і прямих площини вибрано предикати $P_1(x)$ - " x - точка $P_2(x)$ - " x - пряма $P_3(x_1, x_2)$ - "точка x_1 лежить на прямій x_2 ". Виразити через них предикати:

- а) прямі x_1, x_2 перетинаються;
- б) точки x_1, x_2, x_3 лежать на одній прямій;
- в) прямі x_1, x_2, x_3 перетинаються в одній точці.

5.12. На множині $M = \{1, 2, 3\}$ інтерпретацію \mathcal{I} задано таблицями:

$x \setminus y$	1	2	3
$\mathcal{I}(P)(x, y)$	1	0	0
	2	1	0
	3	0	1

x	$Q(x)$
1	1
2	0
3	1

x	$R(x)$
1	0
2	0
3	1

Знайдіть значення в цій інтерпретації речення:

$$\begin{aligned} & \forall x(\exists y Q(x, y) \vee \exists z \neg R(z)) \Rightarrow \forall z(R(z) \wedge \exists x \neg P(x, y, g(z))), \\ & \neg \exists y \forall x P(x, y) \wedge \exists z(Q(z) \vee \forall x(P(z, x) \Rightarrow \neg Q(x))). \end{aligned}$$