# БІМОДУЛЬНІ ЗАДАЧІ НАД КІЛЬЦЯМИ

О. Ю. ДРОЗД-КОРОЛЬОВА

## Вступ

Матричні задачі з'явилися як засіб обчислення зображень на початку 70-х років минулого сторіччя. Першим значним їх застосуванням до теоретичних питань теорії зображень стало доведення першої гіпотези Брауера–Тролла за допомогою алгоритму зведення матриць у роботі [5]. Хоча цю гіпотезу було раніше доведено в роботі [7] суто теоретико-модульними методами, результат [5] був істотно сильніший (і, до речі, його доведення теоретико-модульними методами так і не було одержано). Деяким недоліком результату [5] було те, що алгоритм зведення матриць там було розвинено лише для задач над алгебрично замкненим полем. Тому гіпотеза Брауера–Тролла (у підсиленій формі) випливала звідси лише для досконалих полів.

Наша стаття присвячена узагалненню алгоритму Клейнера–Ройтера на матричні задачі (бімодульні категорії) над артіновими комутативними кільцями. У розділі 1 ми наводимо основні означення й доводимо *теорему редукції*, яка складає підґрунтя узагальненого алгоритму зведення матриць. У розділі 2 доводяться твердження, з яких і випливає алгоритм зведення, а в розділі 3 з них виводиться підсилена гіпотеза Брауера–Тролла для артінових алгебр.

## 1. Бімодульні категорії. Теорема редукції

Нагадаємо деякі означення, пов'язані з бімодульними категоріями [2, 4]. Усі категорії та алгебри, які ми розглядаємо, є категоріями та алгебрами над деяким фіксованим комутативним кільцем $K$. Нехай $\mathbf{A}$ — деяка категорія, $\mathbf{M}$ — деякий $\mathbf{A}$-бімодуль, тобто біадитивний біфунктор $\mathbf{M} : \mathbf{A}^{\circ}{\times}\mathbf{A} \to \mathbf{Ab}$ (категорія абелевих груп). *Диференціюванням* $\partial$ категорії $\mathbf{A}$ до бімодуля $\mathbf{M}$ зветься набір $K$-лінійних відображень $\partial(X,Y) : \mathbf{A}(X,Y) \to \mathbf{M}(X,Y)$, які задовольняють правилу Ляйбніца: $\partial(ab) = (\partial a)b{+}a(\partial b)$. Якщо задано бімодуль $\mathbf{M}$ та диференціювання $\partial$, *бімодульна категорія* $\mathbf{El}(\mathbf{M},\partial)$ визначається в такий спосіб.

- Множиною *об'єктів* категорії $\mathbf{El}(\mathbf{M},\partial)$ є об'єднання множин елементів $\bigsqcup_{X\in\mathrm{Ob}\,\mathbf{A}} \mathbf{M}(X,X)$.

- *Морфізмом* об'єкта $x \in \mathbf{M}(X,X)$ в об'єкт $y \in \mathbf{M}(Y,Y)$ зветься такий морфізм $f \in \mathbf{A}(X,Y)$, що $fx = yf + \partial f$ (зауважимо, що всі елементи з останньої рівності належать $\mathbf{M}(X,Y)$).

Очевидно, $\mathbf{El}(\mathbf{M},\partial)$ знову є категорією над кільцем $K$. Більш того, якщо категорія $\mathbf{A}$ є *адитивною* (тобто в ній існують прямі суми) або *цілком адитивною* (тобто такою адитивною категорією, в якій кожен ідемпотентний морфізм визначає розклад у пряму суму), то такою ж є й бімодульна категорія $\mathbf{El}(\mathbf{M},\partial)$. Очевидно також, що коли ми замінимо категорію $\mathbf{A}$ еквівалентною їй категорією $\mathbf{A}'$, а $\mathbf{A}$-бімодуль $\mathbf{M}$ — відповідним $\mathbf{A}'$-бімодулем $\mathbf{M}'$, в результаті одержимо категорію $\mathbf{El}(\mathbf{M}',\partial')$ еквівалентну $\mathbf{El}(\mathbf{M},\partial)$. Наприклад, в якості $\mathbf{A}'$ можна взяти повну підкатегорію $\mathbf{A}$, яка містить по одному представнику з кожного класу ізоморфізму, а за $\mathbf{M}'$ — обмеження $\mathbf{M}$ на $\mathbf{A}'$.

Нехай $\mathbf{N}$ — підбімодуль в $\mathbf{M}$, $\mathbf{L} = \mathbf{M}/\mathbf{N}$. Позначимо $\partial_L$ композицію диференціювання $\partial$ з сюр'єкцією $\pi : \mathbf{M} \to \mathbf{L}$; очевидно, це є диференціювання категорії $\mathbf{A}$ до бімодуля $\mathbf{L}$. Проекція $\pi$ індукує функтор $\Pi : \mathbf{El}(\mathbf{M},\partial) \to \mathbf{El}(\mathbf{L},\partial_L)$, який також сюр'єктивний. Для кожного елемента $\xi \in \mathbf{L}(X,Y)$ фіксуємо деякий прообраз $\hat{\xi} \in \mathbf{M}(X,Y)$, тобто такий елемент, що $\pi(\hat{\xi}) = \xi$.

**Теорема 1.** *У описаній ситуації позначимо $\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{El}(\mathbf{L},\partial_L)$ і розглянемо $\widetilde{\mathbf{A}}$-бімодуль $\widetilde{\mathbf{N}}$ та диференціювання $\widetilde{\partial} : \widetilde{\mathbf{A}} \to \widetilde{\mathbf{N}}$, визначені в такий спосіб:*

- $\widetilde{\mathbf{N}}(\xi,\eta) = \mathbf{N}(X,Y)$, *якщо* $\xi \in \mathbf{L}(X,X)$, $\eta \in \mathbf{L}(Y,Y)$.
- $\widetilde{\partial}(f) = f\hat{\xi} - \hat{\eta}f - \partial f$, *якщо* $f : x \to y$ *в категорії* $\mathbf{El}(\mathbf{L},\partial_L)$.

*Тоді категорії $\mathbf{El}(\widetilde{\mathbf{N}},\widetilde{\partial})$ та $\mathbf{El}(\mathbf{M},\partial)$ еквівалентні. Ця еквівалентність задається відображенням $\phi : \mathbf{El}(\widetilde{\mathbf{N}},\widetilde{\partial}) \to \mathbf{El}(\mathbf{M},\partial)$, яке переводить елемент $x \in \widetilde{\mathbf{N}}(\xi,\xi)$ в елемент $x + \hat{\xi}$.*

Доведення зводиться до простої перевірки, якщо зауважити, що на об'єктах відображення $\phi$ є бієктивним за визначенням.

## 2. Застосування до артінового випадку

Припустимо, що категорія $\mathbf{A}$ та бімодуль $\mathbf{M}$ *локально артінові*, тобто всі $K$-модулі $\mathbf{A}(X,Y)$ та $\mathbf{M}(X,Y)$ є модулями скінченної довжини. Крім того, ми вважатимемо, що категорія $\mathbf{A}$ є цілком адитивною. Тоді ця категорія *локальна*, тобто кожен її об'єкт $X \in \operatorname{Ob}\mathbf{A}$ розкладається у скінченну пряму суму нерозкладних, а кільце ендоморфізмів кожного нерозкладного об'єкту є локальним артіновим кільцем. Якщо об'єкт $X \in \operatorname{Ob}\mathbf{A}$ розкладається у пряму суму $d$

нерозкладних об'єктів, назвемо число $d$ *розмірністю* об'єкта $X$, а також *розмірністю* кожного елемента $x \in \mathbf{M}(X,X)$. *Радикал* $\operatorname{rad}\mathbf{A}$ такої категорії збігається з множиною таких морфізмів $f: X \to Y$, для яких в якомусь (а тоді в кожному) розкладі $X \simeq \bigoplus_j X_j$, $Y \simeq \bigoplus_i Y_i$, де $X_i$ та $Y_j$ нерозкладні, відповідає матриця $(f_{ij})$, де $f_{ij}: X_j \to Y_i$, всі компоненти якої необертовні. Факторкатегорія $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}/\operatorname{rad}\mathbf{A}$ є *напівпростою*, тобто такою локальною категорією, в якій кожен ненульовий морфізм між нерозкладними об'єктами є ізоморфізмом. Бімодуль $\mathbf{M}$ повністю визначається своїм обмеженням на *кістік* $\mathbf{A}_0$ категорії $\mathbf{A}$, тобто повну підкатегорію, яка складається з нерозкладних об'єктів, взятих по одному з кожного класу ізоморфізму. Позначимо $\overline{\mathbf{M}} = \mathbf{M}/(\operatorname{rad}\mathbf{A}\mathbf{M} + \mathbf{M}\operatorname{rad}\mathbf{A})$; це бімодуль над $\overline{\mathbf{A}}$. Нехай $\overline{\mathbf{M}}(X_0,Y_0) \neq 0$ для якоїсь пари об'єктів $X_0, Y_0 \in \operatorname{Ob}\mathbf{A}_0$. Визначимо підмодуль $\mathbf{M}' \subseteq \overline{\mathbf{M}}$ на об'єктах з $\mathbf{A}_0$ правилом

$$\mathbf{M}'(X,Y) = \begin{cases} \overline{\mathbf{M}}(X_0,Y_0) & \text{якщо } \; X = X_0,\; Y = Y_0, \\ 0 & \text{інакше.} \end{cases}$$

Це дійсно підмодуль, оскільки $\overline{\mathbf{A}}(X_0,X) = \overline{\mathbf{A}}(X,X_0) = 0$ при $X \in \mathbf{A}_0,\ X \neq X_0$ і $\overline{\mathbf{A}}(Y_0,Y) = \overline{\mathbf{A}}(Y,Y_0)$ при $Y \in \mathbf{A}_0,\ Y \neq Y_0$. Оскільки $\overline{\mathbf{M}}(X_0,Y_0)$ є $K$-модулем скінченної довжини, в $\mathbf{M}'$ є максимальний підбімодуль $\mathbf{M}''$. Позначимо через $\mathbf{N}$ прообраз $\mathbf{M}''$ в $\mathbf{M}$. Тоді $\mathbf{L} = \mathbf{M}/bN \simeq \overline{\mathbf{M}}/\mathbf{M}''$ — простий $\mathbf{A}$-бімодуль. За побудовою, він анулюється радикалом $\operatorname{rad}\mathbf{A}$. Тому обмеження диференціювання $\partial_L$ на радикал є гомоморфізмом бімодулів:

$$\partial_L(ab) = (\partial a)b + a(\partial b) = \begin{cases} a(\partial b), & \text{якщо } \; b \in \operatorname{rad}\mathbf{A}, \\ (\partial a)b, & \text{якщо } \; a \in \operatorname{rad}\mathbf{A}. \end{cases}$$

Отже, або це обмеження нульове, або воно сюр'єктивне, тобто для кожного елемента $\xi \in \mathbf{L}(X,Y)$ існує такий елемент $r \in \operatorname{rad}\mathbf{A}$, що $\xi = \partial_L r$. Якщо $X = Y$, цю рівність можна переписати як $(1_X + r)\xi = 0(1_X + r) + \partial_L r$, бо $r\xi = \partial 1_X = 0$. Оскільки морфізм $1_X + r$ ($r \in \operatorname{rad}\mathbf{A}$) є завжди обертовним, кожен елемент з $\mathbf{L}(X,X)$ ізоморфний нульовому елементу. Отже, нерозкладними елементами категорії $\mathbf{El}(\mathbf{L},\partial_L)$ у цьому випадку є лише нульові елементи з $\mathbf{L}(X,X)$, де об'єкт $X$ нерозкладний в $\mathbf{A}$ (з точністю до ізоморфізму $X \in \mathbf{A}_0$).

Надалі припустимо, що $\partial_L(\operatorname{rad}\mathbf{A}) = 0$. Зокрема, якщо $X_0 \neq Y_0$, то взагалі $\partial_L = 0$. Позначимо $\overline{\mathbf{A}}(X_0,X_0) = A$, $\overline{\mathbf{A}}(Y_0,Y_0) = B$, $U = \mathbf{L}(X_0,Y_0)$. $K$-алгебри $A, B$ є тілами, тому існують максимальні ідеали $\mathfrak{m}$ та $\mathfrak{n}$ у кільці $K$ такі, що $\mathfrak{m}A = \mathfrak{n}B = 0$. Оскільки $U \neq 0$, обов'язково $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$. Отже, $A$ і $B$ — скінченновимірні тіла над полем $\mathbf{k} = K/\mathfrak{m}$, а $U$ — скінченновимірний (над $\mathbf{k}$) $A$-$B$-бімодуль.

**Твердження 2.** *Припустимо, що $X_0 \neq Y_0$. Позначимо*

$$m = \min\{\dim_A U, \dim_B U\}, \quad n = \max\{\dim_A U, \dim_B U\}.$$

(1) *Якщо $m = 1$, $n \leqslant 3$, у категорії $\mathbf{El}(\mathbf{L}, \partial_L)$ є лише скінченна кількість нерозкладних неізоморфних об'єктів.*
(2) *Якщо $m > 1$ або $n \geqslant 4$, категорія $\mathbf{El}(\mathbf{L}, \partial_L)$ (а тому й $\mathbf{El}(\mathbf{M}, \partial)$) містить безліч нерозкладних неізоморфних об'єктів, причому розмірності цих об'єктів необмежені. Якщо, крім того, поле $\mathbf{k}$ нескінченне, існує безліч розмірностей, в кожній з яких є безліч нерозкладних неізоморфних об'єктів.*

Це твердження добре відомо (див. напр. [3]).

**Твердження 3.** *Якщо $X_0 = Y_0$, в категорії $\mathbf{El}(\mathbf{L}, \partial_L)$ (а тому й у $\mathbf{El}(\mathbf{M}, \partial)$) існує безліч неізоморфних нерозкладних об'єктів, причому розмірності цих об'єктів необмежені. Якщо, крім того, поле $\mathbf{k}$ нескінченне, існує безліч розмірностей, в кожній з яких є безліч нерозкладних неізоморфних об'єктів.*

*Доведення.* Зауважимо, що тут $A = B$ і $m = n$. Об'єкт $x$ категорії $\mathbf{El}(\mathbf{L}, \partial_L)$ — це квадратна матриця з коефіцієнтами з $U$ (розміру $k \times k$, якщо $x \in \mathbf{L}(X, X)$, де $X = kX_0$). Дві такі матриці $x, y$ ізоморфні в категорії $\mathbf{El}(\mathbf{L}, \partial_L)$, якщо існує така обертовна матриця $S$ з коефіцієнтами з $A$, що $Sx = yS + \partial_L S$. Фіксуємо базу $u_1, u_2, \dots, u_n$ $U$ як правого $A$-модуля і позначимо $\phi(a)$, де $a \in A$, таку матрицю $(a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n, A)$, що $au_j = \sum_{i=1}^n u_i a_{ij}$. Очевидно, $\phi$ — гомоморфізм $A \to \mathrm{Mat}(n, A)$. Припустимо, що $n = 1$; тоді $\phi$ — автоморфізм тіла $A$, а елемент $u = u_1 a$ ототожнюється з елементом $a \in A$. Розглянемо кільце $P = A[t; \phi, \partial_L]$ *скручених многочленів.* Нагадаємо, що його елементи — многочлени вигляду $\sum_{i=1}^d t^i a_i$, але з множенням, "підкрученим" за правилом $at = t\phi(a) + \partial_L(a)$ для $a \in A$. Об'є кти з $\mathbf{El}(\mathbf{L}, \partial_L)$, тобто квадратні матриці $x$ над $A$ можна ототожнити з $P$-модулями (скінченновимірними над $\mathbf{k}$, або, що те саме, над $A$): у відповідному модулі елемент $t$ діє як множення на матрицю $x$. Розмірність такого об'єкту дорівнює розмірності над $A$ відповідного модуля. Ізоморфні об'єкти відповідають ізоморфним модулям і навпаки. Відомо (див. напр. [6]), що кільце $P$ має нерозкладні модулі довільної розмірності над $A$, що й доводить твердження. Якщо, крім того, поле $\mathbf{k}$ нескінченне, існує безліч розмірностей, в кожній з яких є безліч нерозкладних неізоморфних об'єктів (це, наприклад, об'єкти, які задаються жордановими клітинами над полем $\mathbf{k}$). Випадок $n > 1$ розглядається так само (навіть простіше). $\square$

## 3. Гіпотеза Брауера–Тролла

Результати попереднього розділу мають такий важливий наслідок.

**Наслідок 4.** *Припустимо, що категорія* $\mathbf{A}$ *та бімодуль* $\mathbf{M}$ *локально артінові. Якщо в категорії* $\mathbf{El}(\mathbf{M}, \partial)$ *існує безліч неізоморфних нерозкладних об'єктів, то їхні розмірності необмежені. Якщо, крім того, в якійсь розмірності є безліч неізоморфних об'єктів, то існує безліч розмірностей, в кожній з яких є безліч нерозкладних неізоморфних об'єктів.*

*Доведення.* Насправді досить довести останнє твердження. Воно ж легко виводиться (індукцією за розмірністю) з тверджень 2 та 3 (так само, як, наприклад, у [4]). □

Цей результат є варіантом відомої гіпотези Брауера–Тролла для бімодульних задач у підсиленій формі (підсиленням є останнє твердження про існування безлічі розмірностей). За допомогою стандартної техніки мінімальних резольвент з нього випливає аналогічна теорема для зображень алгебр.

**Теорема 5.** *Нехай* $\Lambda$ *— алгебра над локальним нетеровим комутативним кільцем* $K$*, скінченнопороджена як* $K$*-модуль. Якщо* $\Lambda$ *має безліч неізоморфних нерозкладних модулів скінченної довжини (над* $K$*), то довжини цих модулів необмежені. Більш того, якщо існує безліч неізоморфних* $\Lambda$*-модулів деякої фіксованої довжини, то існує безліч довжин, для кожної з яких є безліч нерозкладних неізоморфних* $\Lambda$*-модулів даної довжини.*

*Доведення.* Знов-таки, достатньо довести останнє твердження. Оскільки нас цікавлять лише модулі скінченної довжини, нічого не зміниться, якщо ми замінимо $K$ його $\mathfrak{m}$-адичним поповненням $\hat{K}$, де $\mathfrak{m}$ — максимальний ідеал, а алгебру $\Lambda$ — $\hat{K}$-алгеброю $\Lambda \otimes_K \hat{K}$. Тому надалі ми вважатимемо $K$ повним у $\mathfrak{m}$-адичній топології. Тоді відомо, що $\Lambda$ є напівдосконалим кільцем у розумінні [1] і для кожного скінченнопородженого $\Lambda$-модуля $M$ існує *мінімальне проективне подання*, тобто такий гомоморфізм скінченнопороджених проективних $\Lambda$-модулів $f : P_1 \to P_0$, що $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{rad} P_0$, $\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{rad} P_1$ і $M \simeq \operatorname{Coker} f$. Більш того, таке подання єдине з точністю до ізоморфізмів модулів $P_0$ та $P_1$. Нехай $\mathbf{P}$ — категорія скінченнопороджених проективних $\Lambda$-модулів, $\mathbf{R}$ — $\mathbf{P}$-бімодуль, визначений правилом $\mathbf{R}(P, P') = \operatorname{Hom}_\Lambda(P, \operatorname{rad} P')$ і функтор $C : \mathbf{El}(\mathbf{R}) \to \Lambda\text{-mod}$ переводить $f \in \mathbf{R}(P, P')$ в $\operatorname{Coker} f$. Цей функтор є *щільним*, тобто кожен модуль ізоморфний деякому $Cf$, а $Cf \simeq Cf'$ тоді й лише тоді, коли ці два гомоморфізми відрізняються лише на тривіальні прямі доданки вигляду $Q_i \to 0$

для деяких нерозкладних $Q_i$. Оскільки останніх є лише скінченна кількість, їх можна не брати до уваги. Отже, умови теореми виконуються для алгебри $\Lambda$ тоді й лише тоді, коли умови наслідку 4 виконуються для $\mathbf{P}$-бімодуля $\mathbf{R}$. З цього й випливає доведення теореми. $\square$

## Література


[1] H. Bass. Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings. Trans. AMS 95 (1960), 466–488.

[2] Crawley-Boevey. Matrix problems and Drozd's theorem. Banach Center Publ. 26, part 1 (1990), 199–222.

[3] V. Dlab and C.W. Ringel. Indecomposable Representations of Graphs and Algebras. Mem. AMS 173 (1976).

[4] Y.A. Drozd. Reduction algorithm and rfepresentations of boxes and algebras. Comptes Rendues Math. Acad. Sci. Canada 23 (2001), 97–125.

[5] M.M. Kleiner and A.V. Roiter. Representations of differential graded categories. Springer Lectute Notes in Math. 488 (1975), 316–339.

[6] П. Кон. Свободные кольца и их связи. Мир. Москва, 1975.

[7] А.В. Ройтер. Неограниченность размерностей неразложимых представлений алгебр, имеющих бесконечно много неразложимых представлений. Известия АН СССР. Сер. матем. 32 (1968), 1275–1282.



Київський університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет.